

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Г-175

2-82-344

ГАЛЬПЕРИН
Александр Самуилович

**ГРАССМАНОВА АНАЛИТИЧНОСТЬ
И КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СУПЕРГРАВИТАЦИИ**

Специальность 01.04.02 – теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1982

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор

В.И. Огиевецкий.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник

Р.Э. Каллош,

доктор физико-математических наук
профессор

Ю.И. Манин.

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Физико-технический институт АН УССР, г. Харьков.

Автореферат разослан " " _____ 1982 г.

Защита диссертации состоится " " _____ 1982 г.
на заседании специализированного совета КО 47.01.01. Лаборатории
теоретической физики Объединенного института ядерных исследований,
г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ

Ученый секретарь Совета

В.И. Журавлев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Теории супергравитации, бурное развитие которых началось в 1976 г., привлекают общее внимание как первый пример действительно единых теорий поля, способных, как надеются, описать все взаимодействия, включая гравитацию. Большая часть результатов этого направления (мультиплеты полей супергравитаций, инвариантные действия, сокращение расходимостей и т.д.) была получена в компонентном подходе, использующем набор обычных полей в x -пространстве. Несмотря на результативность, этот подход имеет ряд недостатков: 1) в нем отсутствует явная ковариантность относительно локальной суперсимметрии (это существенно при квантовании); 2) в нем сложно описывать взаимодействие супергравитаций с материей; 3) он громоздок и малопривлекателен эстетически.

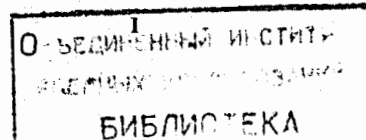
Другой существующий подход основан на дифференциальной геометрии вещественного суперпространства. Обладая по построению явной суперковариантностью, он использует, однако, неадекватные физическому содержанию суперпотенциалы - реперы E_A^M (например, уже в случае 1 - супергравитации E_A^M содержат спины 3, 5/2 и т.д.). Вследствие этого приходится налагать алгебраические ограничения на тензор кручения, теряя тем самым геометрическую простоту и резко усложняя вариационный принцип.

Наконец, третий подход, основанный на комплексной геометрии и понятии аналитичности, оказался полностью адекватным в случае $N=1$, где известно три варианта теорий супергравитации. Здесь геометрическая прозрачность соответствует физическому содержанию теории. По этой причине представляется важным поиск комплексных геометрий, внутренне присущих расширенным супергравитациям ($N \geq 2$).

Цель работы - исследование простейших представлений расширенной суперсимметрии с центральными зарядами, изучение выявляющихся при этом комплексных аналитических базисов суперпространств и внутренних геометрий теорий супергравитации.

Научная новизна работы. Введено понятие грасмановой аналитичности. Показано, что с помощью этого понятия можно реализовать 2-суперсимметрию с центральным зарядом на комплексном 1-суперполе вне массовой оболочки. Найден аналитический базис 2-суперпространства, отличный от кирального.

Изучена аналитическая структура 2-суперполя Файе-Сондуса. Показано, что это суперполе при разложении по 1-суперполям вне массовой



оболочки содержит два киральных суперполя в двух комплексных $\mathbb{C}^{4,2}$ - суперпространствах соответственно.

Найдена комплексная геометрия новой минимальной $U(1)$ - супергравитации с локальной γ_5 - инвариантностью. Показано, что она связана со специальным ($n=0$) случаем неминимальной I-супергравитации, в котором сохраняется суперобъем $\mathbb{C}^{4,4}$ суперпространства. Возникающее ограничение на предпотенциалы решено точно в компонентах и линеаризованно в суперполях. Построено инвариантное действие. Показано, что ослабленному ограничению соответствует $4 + 4$ мультиплет материи, взаимодействующий с $U(1)$ - супергравитацией.

Обобщены операторы суперспина и суперизоспина и найдены операторы Казимира для расширенных $USp(N)$ ($N=2, 4, 6$) супералгебр Пуанкаре с центральными зарядами.

Практическая ценность работы. Развитый в диссертации геометрический явно ковариантный подход к $U(1)$ - супергравитации окажется, по-видимому, важным при анализе расходимостей, в особенности γ_5 - аномалии, с которой в данном случае связано нарушение суперсимметрии. Он допускает обобщение на случай расширенных супергравитаций. Возникающее в нашем подходе ограничение на предпотенциалы имеет прямой аналог в случае $N=2$. Изучение более простого случая $N=1$ могло бы подсказать решение задачи при $N=2$. Найденные при анализе простейших представлений 2-суперсимметрии с центральными зарядами инвариантные базисы будут необходимы, наряду с киральными базисами, для построения внутренней комплексной геометрии 2-супергравитации. Операторы Казимира расширенных $USp(N)$ - супералгебр с центральными зарядами могут быть использованы для построения проекционных операторов и суперполевых уравнений движения.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, Института физических проблем, Института ядерной физики АН УзССР, на II Международном семинаре "Квантовая теория гравитации" (Москва, 1981), а также излагались в лекции автора на 9-ой Зимней школе ИТЭФ (1981).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, пяти глав основного содержания, заключения, приложения и списка литературы, содержащего 76 наименований. Каждая глава снабжена аннотацией. Общий объем диссертации - 77 страниц.

Во введении обсуждается значение вопросов, рассмотренных в диссертации, кратко излагаются содержание работы и полученные результаты.

В главе I напоминаются основные положения суперсимметрии (§§1,2). После введения понятий I-суперсимметрии и I- суперполей обсуждаются

теории I-супергравитации в линеаризованном приближении. Аналогично эйнштейновской теории супергравитацию можно рассматривать как теорию супергравитационного мультиплета, генерируемого супертоком. Супермультиплет токов не является единственным, различные его варианты приводят к различным I-супергравитациям. В § 3 дается суперспиновый анализ разных способов составления приводимого по супергруппе Пуанкаре супертока из неприводимых представлений, приведены мультиплеты полей и линеаризованные суперполевые уравнения движения.

В главе II вводится понятие аналитичности по грассмановым спинорным переменным (§ I). Как вещественная грассманова переменная выступает майорановский спинор:

$$\theta_\alpha = \begin{pmatrix} \theta_\alpha \\ \bar{\theta}_\alpha \end{pmatrix}, \quad \theta = C \bar{\theta}^T,$$

где $\theta_\alpha, \bar{\theta}_\alpha$ - сопряженные вейлевские спиноры, C - матрица зарядового сопряжения. Условие аналитичности Коши-Римана имеет следующий аналог в грассмановом случае:

$$(\mathcal{D}_\alpha^\theta + i \mathcal{D}_\alpha^{\bar{\theta}}) \phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0.$$

В I-суперсимметрии киральность также интерпретируется как аналитичность:

$$\bar{\mathcal{D}}_2 \psi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \Rightarrow \psi = \varphi(x^m + i \theta \sigma^m \bar{\theta}, \theta).$$

В § 2 показано, что комплексное I-суперполе реализует представление $O(2)$ - суперсимметрии с центральным зарядом (вне массовой оболочки). Приведено разложение этого суперполя по компонентам, преобразования суперсимметрии, инвариантное действие. Центральный заряд оказывается пропорциональным массе и, как электрический заряд, принимает противоположные знаки для частиц и античастиц.

В § 3 приведено решение условия аналитичности

$$(\hat{\mathcal{D}}_\alpha^\theta + i \mathcal{D}_\alpha^{\bar{\theta}}) \phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \Rightarrow \phi(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-m\bar{\theta}\gamma} \varphi(x^\alpha \bar{\theta}^\beta \gamma_\beta, \theta, i\gamma)$$

и найдена его связь с комплексным I-суперполем. Действие в терминах $\phi(x, \theta, \bar{\theta})$ обнаруживает глубокую аналогию с обычным действием для кирального суперполя. Решение условия аналитичности подсказывает наличие "аналитического" и "антианалитического" базисов, обсуждаемых в § 4.

Эти базисы напоминают правый и левый киральные базисы I-суперпространства. Они образуют инвариантные пространства 2-суперсимметрии, отличные от киральных:

$$\chi^a - \bar{\theta} \delta^a \eta, \quad \theta + i\eta,$$

$$\chi^a + \bar{\theta} \delta^a \eta, \quad \theta - i\eta.$$

Такая конструкция легко обобщается на случай 4- и 8- суперсимметрий с использованием кватернионных и октавных мнимых единиц соответственно.

Найденные базисы подают надежду на формулировку 2-супергравитации, не содержащую сторонних ограничений. Необходимое для этого расширение $O(2)$ до $SU(2)$ и изучение аналитических свойств мультиплетта Файе-Сониуса проведено в главе III.

Здесь дифференциальные условия на изоспинорное 2-суперполе Файе-Сониуса (ФС)

$$D_\alpha(i\phi_j) = \bar{D}_\alpha(i\phi_j) = 0$$

рассматриваются как условия грассмановой аналитичности по разным параметрам спинорных переменных ($D_\alpha i, \bar{D}_\alpha i$ - спинорные производные $SU(2)$ - суперсимметрии с центральным зарядом). Показано, что ФС-мультиплет представляется парой киральных I-суперполей в двух $\mathcal{C}^{4,2}$ -суперпространствах соответственно.

В § I обсуждается постановка задачи. Анализ ограничений на кручение в 2-супергравитации показывает, что в этом случае имеет смысл наряду с киральным также ФС-мультиплет. По аналогии со случаем $N = 1$ можно надеяться, что разрешение условий на ФС-мультиплет подскажет выбор адекватного комплексного суперпространства 2-супергравитации.

В § 2 приведены основные определения и обозначения. § 3 посвящен разрешению дифференциальных связей. Здесь показано, что с ФС-мультиплетом ассоциированы два различных типа грассмановой аналитичности: 2-аналитичность и киральность, т.е. I-аналитичность. Совместное действие этих аналитичностей столь ограничительно, что сводит все обилие полей в исходных 2-суперполях к двум киральным I-суперполям φ_i с высшим спином $1/2$.

В § 4 найдена реализация генераторов супералгебры на I-суперполях. Доказывается, что необходимо ограничиться вещественным центральным зарядом, который билинейно реализуется через спинорные производные I-суперсимметрии.

В § 5 устанавливаются формулы для инвариантного свободного действия ФС-мультиплетта через I-суперполя и указана его связь с действием в терминах 2-суперполей.

В § 6 мы обсуждаем возможность представления решений дифференциальных условий на языке сдвигов координат суперпространства. Оказывается, что с ФС-мультиплетом ассоциированы два $\mathcal{C}^{4,2}$ -суперпространства:

$$\chi_I^m = \chi^m + i\theta^1 \delta^m \bar{\theta}_1 - i\theta^2 \delta^m \bar{\theta}_2 - 2\theta^1 \delta^m \bar{\theta}_2, \quad \bar{\theta}_I^\alpha = \bar{\theta}_1^\alpha + i\bar{\theta}_2^\alpha,$$

$$\chi_{II}^m = \chi^m - i\theta^1 \delta^m \bar{\theta}_1 + i\theta^2 \delta^m \bar{\theta}_2 + 2\theta^2 \delta^m \bar{\theta}_1, \quad \bar{\theta}_{II}^\alpha = \bar{\theta}_1^\alpha + i\bar{\theta}_2^\alpha.$$

Эти суперпространства сами по себе замкнуты относительно одной из суперсимметрий, однако номера этих суперпространств так коррелированы с внешним индексом i суперполей φ_i , что все остальные преобразования (вторая суперсимметрия, $SU(2)$, центральный заряд) не выводят φ_i из области их определения. Это важное свойство указанных базисов еще предстоит понять. Кроме того, в более глубоком понимании нуждается роль центрального заряда, который реализуется дифференциальными операторами второго порядка и не сводится к сдвигам координат $\chi^m, \theta^i, \bar{\theta}_i$. Добавки к χ^m являются компонентами изотриплета, что указывает на фундаментальную роль в случае 2-супергравитации объекта Z^{mij} , преобразующегося по представлению $1 \oplus 3$ группы $SU(2)$ и сводящегося в плоском пределе к

$$Z_0^{mij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \chi^m - i(\theta^i \delta^m \bar{\theta}^j + \theta^j \delta^m \bar{\theta}^i).$$

В главе 4 обсуждаются комплексные геометрии, внутренне присущие различным I-супергравитациям. Особое внимание уделено новому варианту с локальной $U(1)$ -симметрией, для которого дана явно ковариантная суперполевая формулировка.

В § I наминается известная геометрическая схема для неминимальной супергравитации, состоящая во введении комплексного суперпространства

$$\mathcal{C}^{4,4} = \{z_L^M\} = \{\chi_L^M, \theta_L^M, \bar{\varphi}_L^M\}$$

и группы преобразований в нем, сохраняющей инвариантным киральное подпространство $\mathcal{C}^{4,2} = \{\delta_L^M\} = \{\chi_L^M, \theta_L^M\}$. Предпотенциалы $\mathcal{H}^M, \bar{\mathcal{H}}^M, \mathcal{H}^M$ определяют физическое суперпространство $\mathbb{R}^{4,4}$ как гиперповерхность в $\mathcal{C}^{4,4}$. В естественном групповом ограничении

$$\text{Bez} \left(\frac{\partial z_L^M}{\partial z_L^M} \right)^{3n+1} = \text{Bez} \left(\frac{\partial \delta_L^M}{\partial \delta_L^M} \right)^{2n}$$

каждому n соответствует неминимальная эйнштейновская супергравитация, за исключением $n = -1/3$ (минимальная теория) и $n = 0$. Как показано в § 2, в случае $n = 0$ после перехода в калибровку Весса-Зумино возникает локальная группа $U(1)$.

В § 3 обсуждается инвариант

$$U(x, \theta, \bar{\theta}) = \text{Ber} \left(\frac{\partial z_L}{\partial \bar{z}_R} \right), \quad z_R^M = z_L^{M\dagger},$$

присущий только случаю $n = 0$. Как становится ясно в § 4, для написания действия необходимо положить

$$U(x, \theta, \bar{\theta}) = 1.$$

Решение этого ограничения на предпотенциалы легко находится в компонентах.

В § 5 определяются инвариантные интегралы и построено действие $U(1)$ -супергравитации. Последнее отлично от инвариантного суперобъема, который здесь равен нулю.

В § 6 развивается формализм дифференциальной геометрии в $\mathbb{R}^{4,4}$.

§ 7 посвящен ослабленному ограничению на суперполе $U(x, \theta, \bar{\theta})$. В этом случае тоже существует действие, описывающее мультиплет материи с суперспином $1/2$, взаимодействующий с $U(1)$ -супергравитацией.

В заключительных замечаниях (§ 8) обсуждаются возможные обобщения для расширенных супергравитаций.

В главе 5 находятся операторы Казимира расширенной $USp(N)$ -суперсимметрии с центральными зарядами.

§ 1 посвящен обсуждению расширенных $USp(N)$ -супералгебр Пуанкаре с центральными зарядами. Они представляют большой интерес ввиду того, что физически интересные представления должны иметь центральные заряды.

В § 2 вводят модифицированные операторы суперспина и суперизоспина, квадраты (степени) которых являются искомыми операторами Казимира.

В приложение вынесен ряд полезных формул.

Основные результаты, полученные в диссертации

1. Введено понятие грассмановой аналитичности, найдены инвариантные базисы в 2-, 4- и 8- суперпространствах.

2. Проведено анатомирование мультиплета Файе-Сонюса. Показано, что он реализуется вне массовой оболочки двумя киральными суперполями в двух комплексных $\mathbb{C}^{4,2}$ -суперпространствах соответственно.

3. Найдена внутренняя геометрия и построено инвариантное действие $U(1)$ -супергравитации. Доказано, что эта модель может быть получена исходя из специального ($n = 0$) случая неминимальной $U(1)$ -супергравитации. Возникающее ограничение на предпотенциалы решено точно в компонентах и линеаризованно в суперполях.

4. Рассмотрено ослабленное ограничение в формулировке $U(1)$ -супергравитации. Показано, что ему соответствует $4 + 4$ мультиплет полей материи, взаимодействующий с $U(1)$ -супергравитацией.

5. Найдены операторы Казимира в случае $USp(N)$ -супералгебр Пуанкаре о центральными зарядами.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах

Гальперин А.С., Иванов Е.А., Огиевецкий В.И. Письма ЖЭТФ, 1981, т. 33, вып. 3, 176.

Гальперин А.С., Иванов Е.А., Огиевецкий В.И. Preprint JINR, Dubna, E2-81-482. Ядерная физика, 1982, т. 35, вып. 3, 790.

Гальперин А.С. Материалы IX Зимней школы ИТЭФ. "Энергоиздат", 1982.

Гальперин А.С., Огиевецкий В.И., Сокачев Э.С. Preprint JINR, Dubna, E2-81-854.

Гальперин А.С., Литов Л.Б., Сорока В.А. Препринт ОИЯИ P2-82-121, Дубна.

Гальперин А.С., Огиевецкий В.И., Сокачев Э.С. Письма ЖЭТФ, 1982, т. 35, вып. 6, 263.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 мая 1982 года.