ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 5597

М. Гусар

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Специальность 041 - теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной
степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1971

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор — Я.А. Смородинский

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук — В.Г. Кадышевский
доктор физико-математических наук — Ю.А. Шелепин

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт теоретической и экспериментальной физики.

Автореферат разослан "   "   1971 года.

Защита диссертации состоится "   "   1971 года на заседании Учёного совета Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

Р.А. Асанов

2 - 5597

М. Гусар

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

В своих основных работах[1-3] И.М. Гельфанд и М.А. Наймарк выяснили ряд основных математических вопросов теории представлений группы Лоренца. Кроме вопросов, рассмотренных этими авторами, в исследованиях, связанных с релятивистским разложением амплитуды рассеяния, поднят вопрос о нахождении явного вида представлений и шаровых функций группы Лоренца. Шаровые функции на однополостном гиперболоиде систематически рассматривались Н.Я. Виленкиным и Я.А. Смородинским[4]. Матричные элементы представлений группы Лоренца были рассмотрены в базисах $O(3)$, $O(2,1)$, $E(2)$. Из многочисленной литературы по этому вопросу мы отметим здесь лишь работы С. Штрёма[5] и А.А. Макарова, Г.И. Шепелева[6].

Диссертация посвящена исследованию основной серии унитарных представлений группы Лоренца. С помощью обобщения понятия спиноров выведены матричные элементы основной серии унитарных представлений этой группы. Полученный результат имеет более простой вид, чем матричные элементы представлений в базисах $O(3)$, $O(2,1)$, $E(2)$.

Наиболее простой результат, полученный в литературе в вышеуказанных базисах для матричных элементов, зависящих от шести параметров группы Лоренца, имеет вид трехкратной суммы, если гипергеометрическую функцию Гаусса не считать суммой, а заданной функцией. В таком смысле результат, полученный в диссертации, не содержит ни одной суммы. В том случае, если считать и саму гипергеометрическую функцию (в том числе D - функцию группы вращения) суммой, то матричные элементы, используемые в литературе, имеют вид 6-кратной суммы, а результат диссертации содержит двойную сумму.

Кроме того, в диссертации рассматривался также вопрос о переходе к представлениям в базисе угловых моментов. Показано, что переход от унитарных спиноров к базису углового момента осуществляется с помощью комплексных коэффициентов Вигнера группы трехмерных вращений. Наличие полюсов в комплексной ν-плоскости (см. ниже) в вышеуказанных коэффициентах перехода допускает получение матричных элементов представлений группы Лоренца в базисе угловых моментов.

В главе 1 рассмотрена группа трехмерных комплексных вращений $O(3,C)$ и показано, что связная часть этой группы изоморфна собственной группе Лоренца. К трехмерному комплексному вектору можно прийти следующим образом. Рассмотрим антисимметричный тензор $S_{\mu\nu}$ ($\mu,\nu = 0,1,2,3$) и составим трехмерный вектор $S_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ik\ell}S_{k\ell} + iS_{0i}$ ($i, k, \ell = 1,2,3$). При преобразованиях Лоренца S_i преобразуется как трехмерный комплексный вектор. Этот факт был замечен Ф.И. Федоровым /7/ в 1962 году.

Обозначим через M_i и N_i генераторы пространственных поворотов вокруг оси i и "бустов" вдоль оси i ($i = 1,2,3$). Хорошо известно, что если ввести линейную комбинацию генераторов

$$J_i = \frac{1}{2}(M_i + iN_i), \quad K_i = \frac{1}{2}(M_i - iN_i),$$

то J_i, K_i удовлетворяют алгебре Ли двух независимых угловых моментов. Такое распадение алгебры Ли отражает именно тот факт, что собственная группа Лоренца изоморфна группе $SO(3,C)$. Исходя из комплексной сферы $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$, можно систематическим образом прийти к параметризации группы Лоренца с помощью комплексных углов Эйлера. Комплексный поворот определяется как произведение двух операций: пространственного поворота вокруг некоторой оси и буста вдоль той же оси. Если осуществить параметризацию с помощью комплексных углов Эйлера, то подходящим базисом может быть базис унитарных спиноров, который задается собственными значениями операторов M_3 и N_3. Этот базис соответствует приведению $SO(3,C) \supset O(2) \times O(1,1) = O(2,C)$. В отличие от спинорной подгруппы $O(2) \times O(2)$ группы $O(4)$, подгруппа $O(2,C)$ является некомпактной. Это проявляется в непрерывности спектра генератора N_3. Таким образом, компоненты унитарного спинора по собственным значениям генератора M_3 образуют дискретное бесконечное множество, а компоненты по собственным значениям буста N_3 - непрерывны. На языке собственных значений J_3 и K_3 это означает, что унитарный спинор характеризуется комплексными числами $m = \frac{1}{2}(\mu + i\nu)$ и $m^* = \frac{1}{2}(\mu - i\nu)$. Для конечномерных представлений величина m отвечает непунктирному, а величина m^* - пунктирному индексу спиноров.

Матричные элементы унитарных представлений $\langle mm^* | T^{j\overset{*}{j}}(g) | nn^* \rangle$ являются собственными функциями операторов Казимира $\vec{J}^2$ и $\vec{K}^2$, т.е.

$$[\vec{J}^2 - j(j+1)] \langle mm^* | T^{j\overset{*}{j}}(g) | nn^* \rangle = 0, \quad (1)$$

$$[\vec{K}^2 - j^*(j^*+1)]\langle m m^* | T^{jj^*}(g) | n n^*\rangle = 0 , \qquad (2)$$

где j выражается с помощью хорошо известных квантовых чисел j_0, σ в виде: $j = \frac{1}{2}(j_0 - 1 + i\sigma)$. Генераторы $\vec{J}^2$ и $\vec{K}^2$ в уравнениях (1), (2) имеют вид дифференциальных операторов второго порядка, т.е. матричные элементы представлений в действительности удовлетворяют дифференциальному уравнению четвертого порядка. Уравнение такого типа записывалось в базисе углового момента в работе /5/. Вследствие использования спинорного базиса алгебры Ли, а также комплексных углов Эйлера оператор $\vec{J}^2$ зависит только от комплексных углов Эйлера, а $\vec{K}^2$ – от комплексно сопряженных им величин. Таким образом, четыре независимых решения системы уравнений (1), (2) строятся с помощью двух решений уравнения (1). В диссертации показано, что уравнения (1), (2) имеют регулярное решение только тогда, когда удовлетворяется условие квантования:

$$e^{i\pi(\mu-\kappa)} \frac{\sin\pi(j-n)\ \sin\pi(j^*-m^*)}{\sin\pi(j^*-n^*)\ \sin\pi(j-m)} = 1$$

$$(\mu = 2\,\mathrm{Re}\,m,\ \ \kappa = 2\,\mathrm{Re}\,n),$$

т.е. j_0 – целое (однозначное представление), j_0 – полуцелое число (двузначное представление). При этом нормированные решения уравнений (1) (2) запишутся в виде

$$\langle m m^* | T^{jj^*}_{(g)} | n n^*\rangle = e^{-i(m\phi+m^*\phi^*+n\psi+n^*\psi^*)}\, R^{jj^*}_{mm^*;nn^*}(\cos\theta, \cos\theta^*), \qquad (3)$$

где

$$R^{jj^*}_{mm^*;nn^*} = \frac{N^j_{mn}}{4i\sqrt{\sin\pi(m-n)\sin\pi(m^*-n^*)}}\,[P^{j^*}_{m^*n^*}(z^*)Q^j_{mn}(z) - P^j_{mn}(z)Q^{j^*}_{m^*n^*}(z^*)]$$

$$(z = \cos\theta).$$

Здесь N^j_{mn} – нормировочный множитель, а функции P и Q – функции Лежандра первого и второго родов.

Представления (3) тривиальным образом обобщаются на группу $SL(2,C)$.

Во второй части первой главы подробно изучены свойства, а также аналитическое поведение функций $R^{jj^*}_{mm^*;nn^*}$, которые являются комплексными аналогами хорошо известных d^j_{mn}-функций группы трехмерных вещественных вращений.

В главе II рассматриваются сферические функции относительно подгруппы $O(2,C)$. Вывод этих функций существенно отличается для сферы ненулевого радиуса (Σ) от сферы нулевого радиуса (Σ_0). Эти пространства относятся друг к другу так же, как трехмерный гиперболоид к конусу, причем сфера нулевого радиуса соответствует конусу с $k^2 = 0$. Аналогия становится очевидной, если отождествить четырехвектор нулевой длины k с волновым вектором электромагнитного поля. В этом случае комплексный вектор нулевого радиуса соответствует электромагнитной плоской волне. Точка на конусе $k^{0 2} - \vec{k}^2 = 0$ задается, например, тремя компонентами вектора $\vec{k}$ и поэтому конус является трехмерным пространством. В то же время сфера нулевого радиуса имеет четыре размерности. Четвертая координата пространства Σ_0 описывает ориентацию электрического и магнитного поля плоской волны вокруг направления вектора $\vec{k}$.

Показано, что нормированные сферические функции на Σ имеют вид

$$< \theta\ \ \theta^*;\ \phi\phi^*|\ jj^*;\ mm^*> = \sqrt{\frac{(2j+1)(2j^*+1)}{8\pi^2}}\, e^{i(m\phi+m^*\phi^*)}$$

$$R^{jj^*}_{mm^*;00}(\cos\theta,\ \cos\theta^*)\ . \tag{4}$$

В пространстве Σ_0 параметризация с помощью комплексных углов Эйлера теряет смысл. Чтобы получить сферические функции в базисе унитарных спиноров, вводятся параметры

$$S_1 = -i\cos\Theta\cos\phi - \sin\phi\ ,\quad S_2 = -i\cos\Theta\sin\phi + \cos\phi\ ,$$

$$S_3 = i\sin\Theta\ . \tag{5}$$

При этом сферические функции запишутся в виде

$$<\Theta\Theta^*;\ \phi\phi^*|\ jj^*;\ mm^*> = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\cos\frac{\Theta}{2}\right)^{j-m}\left(\sin\frac{\Theta}{2}\right)^{j+m}\cdot$$

$$\left(\cos\frac{\Theta^*}{2}\right)^{-j^*-1+m^*}\left(\sin\frac{\Theta^*}{2}\right)^{-j^*-1-m^*} e^{i(m\phi+m^*\phi^*)} \tag{6}$$

Сферические функции на сфере нулевого радиуса выведены также в базисе углового момента. Кроме того, показано, что если

отвлечься от двузначности, возникающей при переходе от вектора нулевой длины к спинорам, то однородные функции, рассмотренные Гельфандом и Наймарком, эквивалентны сферическим функциям на комплексной сфере нулевого радиуса.

В главе III рассматриваются матричные элементы представлений группы Лоренца в базисе углового момента. Так как матричный элемент оператора буста $e^{i\chi N_3}$ в базисе унитарных спиноров сводится к функции $e^{i\chi\nu}$, ясно, что сложность матричных элементов буста $d^{j_0\sigma}_{\ell\ell'\mu}(\chi) \equiv <\ell\mu|\ e^{i\chi N_3}\ |\ell'\mu>$ в базисе углового момента связана с коэффициентами перехода между базисом унитарных спиноров и базисом углового момента. Интуитивно видно, что эти коэффициенты представляют собой комплексные коэффициенты Вигнера группы $0(3)$. В данном случае слагаются два комплексных угловых момента, комплексно сопряженных друг другу. Выяснен точный смысл этой операции. Комплексные коэффициенты Вигнера принимают разный вид в зависимости от знаков величин $j_0+\mu$, $j_0-\mu$. С помощью известных соотношений между функциями Томэ–Виппла показано, что коэффициенты Вигнера в вышеуказанных случаях совпадают. При выводе этих соотношений значительную роль играет подходящий выбор фаз базисных функций. С помощью асимптотического поведения коэффициентов перехода $<\mu\nu|\ \ell\mu>$ выведена следующая формула для функции буста:

$$\frac{1}{2\pi i}\, d^{j_0\sigma}_{\ell\ell'\mu}(\chi) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{(j_0+\mu+k)!}{k!}\,\frac{<\mu\nu|\ \ell'\mu><\mu\nu|\ \ell\mu>^*}{\Gamma(j+m+1)\Gamma(j^*+m^*+1)}\Big|_{\nu=\nu_k} e^{i\chi\nu_k}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{(j_0-\mu+k)!}{k!}\,\frac{<\mu\nu|\ \ell'\mu><\mu\nu|\ \ell\mu>^*}{\Gamma(j-m+1)\Gamma(j^*-m^*+1)}\Big|_{\nu=\nu'_k} e^{i\chi\nu'_k}\ ,$$

где

$$\nu_k = i \mid j_0 + 1 + \mu + 2k \mid - \sigma$$

$$\nu_k' = i \mid j_0 + 1 - \mu + 2k \mid + \sigma .$$

В главе IV показано, что двумерная комплексная сфера допускает вложение двух четырехимпульсов и поэтому с помощью сферических функций относительно подгруппы $O(2,C)$ можно построить сразу двухчастичные состояния, преобразующиеся по неприводимому унитарному представлению группы Лоренца.

Двухчастичное состояние $|m_1, m_2; p_{(1)}, p_{(2)}>$ бесспиновых частиц при фиксированных значениях масс характеризуется 6 независимыми параметрами. Эти параметры можно вложить в группу Лоренца следующим образом. Исходим из стандартной системы отсчёта σ_0, где пространственные части импульсов частиц направлены вдоль оси z и имеют определенное отношение $-\delta$. Произвольные значения импульсов можно получить из системы σ_0 с помощью преобразования Лоренца

$$T(g) = C_3(\phi)\ C_2(\theta\ C_3(\psi),$$

где C_i - комплексный поворот вокруг оси i. Из этих операций первый пространственный поворот на угол $\mathrm{Re}\,\psi$ несущественен, так как оставляет импульсы неизменными. Если составить комплексный вектор

$$\vec{S} = p^0_{(1)}\ \vec{p}_{(2)} - p^0_{(2)}\ \vec{p}_{(1)} - i\ \vec{p}_{(1)} \times \vec{p}_{(2)}$$

из импульсов, то в системе σ_0 первый буст на угол $\mathrm{Im}\,\psi$ оставляет вектор $\vec{S}$ неизменным, а остальные преобразования переводят его в положение, охарактеризованное комплексными

полярными углами θ, ϕ. Таким образом, двухчастичное состояние импульсов можно задать в виде $|m_1, m_2; S, S^*; \theta, \theta^*; \phi, \phi^*; \mathrm{Im}\psi>$. При лоренц -преобразованиях этих состояний значительную роль играет т.н. вигнеров буст, который представляет собой элемент малой группы $O(2,C)$.

Выделим движение, соответствующее бусту, на угол χ. Тогда двухчастичные состояния, преобразующиеся по неприводимому унитарному представлению группы Лоренца, будут иметь вид (4).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /8-12/.

Литература

1. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз., 1958.
2. М.А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца, ГИФМЛ, 1962.
3. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. ГИФМЛ, 1962.
4. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ <u>46</u>, 1793 (1964).
5. S. Ström. Ark.Fys., <u>23</u>, 467 (1965), ibid. <u>33</u>, 465 (1967).
6. А.А. Макаров, Г.И. Шепелев. ЯФ, <u>12</u>, 1092 (1970).
7. Ф.И. Федоров. ДАН, <u>143</u>, 56 (1962).
8. M. Huszár, J. Smorodinsky. JINR preprint, E2-4225, Dubna 1968.
9. Я.А. Смородинский, М. Хусар. ТМФ., <u>4</u>, 328 (1970).

10. M. Huszár, J. Smorodinsky. Comm. of the JINR, E2-5020, Dubna 1970.
11. M. Huszár. Preprint of the JINR, E2-5429, Dubna 1970.
12. M. Huszár, J. Smorodinsky. XV International Conference on High-Energy Physics., p. 572.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 февраля 1971 года.