

C 323.5

K-659

1/11-4

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

540/2-71

2 - 5490



Г.И. Копылов, В.Н. Пенев, Ю.В. Тевзадзе,
А.И. Шкловская

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

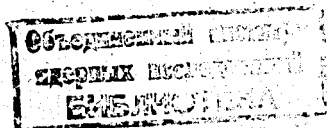
МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО
В МУЛЬТИРЕДЖЕВСКОЙ МОДЕЛИ

1970

2 - 5490

Г.И. Копылов, В.Н. Пенев, Ю.В. Тевзадзе,
А.И. Шкловская

**МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО
В МУЛЬТИРЕДЖЕВСКОЙ МОДЕЛИ**



Введение

Бюклинг и Каянти^{1,2/} предложили способ розыгрыша случайных звезд для мультипериферической модели. Его эффективность достаточно хороша для моделирования рождения 4-6 частиц.

В данной работе рассматриваются различные пути усовершенствования способа. В §1 показана связь метода Бюклинга-Каянти с существующими методами. В §2,3 предложены способы усовершенствования метода Бюклинга и Каянти. В §4 проведено сравнение эффективности метода при разных значениях параметров.

§1. Связь способа Бюклинга-Каянти с известными способами розыгрыша

Пусть при столкновении частиц a и b рождаются частицы $1, 2, \dots, n$. Обозначим компаунд-частицу $a + b$ (или $1 + 2 + \dots + n$) номером 0:

$$a + b \rightarrow 0 \rightarrow 1 + \dots + n ,$$

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n , \quad (1)$$

$$\omega_a + \omega_b = \omega_0 = \omega_1 + \dots + \omega_n .$$

Массы частиц пусть будут $m_a, m_b, m_1, \dots, m_n$. Введем еще следующие обозначения:

$$m_1 + \dots + m_k = \mu_k, \quad (2)$$

$$p_1 + \dots + p_k = P_k = \{ \vec{P}_k, E_k, M_k \}, \quad (3)$$

$$T_k = M_k - \mu_k. \quad (4)$$

1. Метод розыгрыша 4-импульсов P_1, \dots, P_n , удовлетворяющих законам сохранения, был впервые предложен одним из нас ^{/3,4/}. Импульсы задают последовательно в системах отсчёта $0_n, 0_{n-1}, \dots, 0_2$, в которых соответственно $\vec{P}_n=0, \vec{P}_{n-1}=0, \dots, \vec{P}_2=0$; эти импульсы мы будем обозначать $p_n^{(n)}, p_{n-1}^{(n-1)}, \dots, p_2^{(2)}$, отмечая верхним индексом систему отсчёта. Импульс $p_k^{(k)}$ ($k = n, \dots, 2$) однозначно определяется заданием кинетической энергии T_{k-1} частиц группы 0_{k-1} в системе 0_{k-1} и направления \vec{Q}_k ее вылета (или вылета частицы k) в системе 0_k . Процедура начинается с $k = n$; задав таким образом $p_n^{(n)}$, мы преобразуем его во всеобщую (например, лабораторную) систему отсчёта:

$$\omega_n = \frac{E_n \omega_n^{(n)} + \vec{P}_n \vec{p}_n^{(n)}}{M_n}, \quad \vec{p}_n = \vec{p}_n^{(n)} + \vec{P}_n \frac{\omega_n + \omega_n^{(n)}}{E_n + M_n}, \quad (5)$$

после чего можно вычислить 4-импульс группы 0_{n-1} оставшихся частиц $1, 2, \dots, n-1$

$$P_{n-1} = P_n - p_n \quad (6)$$

и повторить процедуру с $k = n - 1$ и т.д. вплоть до $k = 2$, когда формула (6) дает непосредственно $p_1 = P_1$ в лабораторной системе (при этом надо положить $T_1 = 0$). Эту процедуру можно условно изобразить в виде схемы (см. рис. 1).

В выбранных переменных T_{k-1} , $\vec{\Omega}_k$ интеграл состояний системы n частиц с амплитудой \mathcal{M} представляется в виде

$$S_n = \int dT_{n-1} d\vec{\Omega}_n \dots dT_{k-1} d\vec{\Omega}_k \dots dT_2 d\vec{\Omega}_3 d\vec{\Omega}_2 \times$$

$$\times 2^{-n} M_n^{-1} p_n^{(n)} \dots p_k^{(k)} \dots p_2^{(2)} \mathcal{M}^2. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь подробней способы задания величин T_{k-1} и $\vec{\Omega}_k$.

2. Энергии T_{k-1} удовлетворяют неравенству

$$T_n \geq T_{n-1} \dots \geq T_2 \geq T_1 \equiv 0. \quad (8)$$

В программе FOWL /6/ для задания энергий используются $(n - 2)$ случайных числа, расположенных в порядке возрастания. Вес состояния при этом равен

$$K_n = \frac{(2\pi)^{n-1}}{2(n-2)!} \frac{T^{n-2}}{M_n} \prod_2^n p_k^{(k)} \mathcal{M}^2. \quad (9)$$

Этот метод был предложен в работе ^{/4/}, а в ^{/5/} была оценена на примере фазового объема его эффективность. При $n > 10$ и $M_n \gg \mu_n$ она неудовлетворительна.

В первоначальном варианте программы ФОРС ^{/11/} в качестве T_{k-1} принималось $T_{k-1} = T_k \sqrt{\xi_{k-1}}$, где ξ_{k-1} - корень уравнения

$$(k-1) \xi_{k-1}^{k-2} - (k-2) \xi_{k-1}^{k-1} = a_{k-1}, \quad (10)$$

а a_{k-1} - случайное число. При этом веса состояний в ультрарелятивистском пределе при $\mathbb{M} \equiv 1$ постоянны

$$K_n = \frac{(\pi/2)^{n-1}}{(n-2)!(n-1)!} \frac{T_n^{2n-3}}{M_n} \prod_{k=2}^n \frac{2T_k p_k^{(k)}}{T_k^2 - T_{k-1}^2} \mathbb{M}^2. \quad (11)$$

В нынешнем варианте ФОРСа ^{/8/} T_{k-1} вычисляется по формуле $T_{k-1} = T_k \xi_{k-1}$, где ξ_{k-1} - корень уравнения

$$C_{k-1}(\xi_{k-1}) = a_{k-1}, \quad (12)$$

а функция

$$C_k(\xi_k) = \frac{\int_0^{\xi_k} d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{\frac{1}{2}}}{\int_0^1 d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

табулирована для $k = 2, \dots, 13$. Вес случайной звезды постоянен в ультрарелятивистском пределе:

$$K_n = \frac{\pi^{\frac{3}{2}(n-1)}}{2\Gamma(\frac{3}{2}(n-1))} \frac{T_n^{\frac{3n-5}{2}}}{M_n} \prod_{k=2}^n \frac{p_k^{(k)}}{\sqrt{T_k - T_{k-1}}} \mathbb{M}^2, \quad (14)$$

а в ультрарелятивистском обращается в нуль на границах фазового объема.

Эффективность обоих вариантов ФОРСа при моделировании фазового объема ($\mathcal{M} \equiv 1$) достаточно высока (у нового чуть выше, чем у старого), что позволяет успешно разыгрывать даже реакции с рождением двух десятков частиц. При $n = 10$ программа ФОРС втрое эффективнее программы FOWL.

3. Направления $\vec{\Omega}_k$ можно отсчитывать от любой, даже переменной, оси $\vec{\ell}_k$, так как $\vec{P}_k = 0$. В первых попытках моделирования^{/3/} и в первых вариантах программы ФОРС^{/1,8/} в качестве оси $\vec{\ell}_k$ брали \vec{P}_k и направление $\vec{\Omega}_k$ задавалось косинусом η_k угла между $\vec{P}_k^{(k)}$ и $\vec{\ell}_k$ и азимутальным углом ϕ_k (углом между плоскостями $(\vec{\ell}_k, \vec{P}_k)$ и $(\vec{\ell}_k, \vec{z})$). Формулы, определяющие \vec{P}_k по этим данным, см., например, в^{/3/} или^{/7/}. В другом варианте программы ось $\vec{\ell}_k$ неподвижна и совпадает с осью z , а $\arccos \eta_k$ и ϕ_k - обычные полярный и азимутальный угол; это чуть упрощает формулы. В обоих случаях величины η_k и ϕ_k выражаются через случайные числа β_k и γ_k формулами $\eta_k = 2\beta_k - 1$, $\phi_k = 2\pi \gamma_k$; именно в этом предположении написаны выше формулы для весов (9), (11) и (14). Свободой в выборе осей $\vec{\ell}_k$ можно воспользоваться для того, чтобы ввести в программу экспериментальные угловые распределения (за $\vec{\ell}_k$ надо тогда принять те оси, относительно которых измерены угловые распределения в системах отсчёта 0_k).

4. В способе Бюклинга-Каянти в качестве осей $\vec{\ell}_k$ предлагается брать импульс \vec{p}_a в системах отсчёта 0_k , т.е. $\vec{p}_a^{(k)}$. Это позво-

ляет связать квадрат передачи t_{k-1} 4-импульса от а к 0_{k-1} с косинусом η_k линейной связью

$$t_{k-1} = (p_a - P_{k-1})^2 = m_a^2 + M_{k-1}^2 - 2\omega_a^{(k)} E_{k-1}^{(k)} + 2p_a^{(k)} P_{k-1}^{(k)} \cos(\vec{p}_a^{(k)}, \vec{P}_{k-1}^{(k)}) \quad (15)$$

Здесь иногда бывает удобней пользоваться 4-импульсами частицы k:

$$E_{k-1}^{(k)} = M_k - \omega_k^{(k)}, \quad \vec{P}_{k-1}^{(k)} = -\vec{p}_k^{(k)}, \quad \cos(\vec{p}_a^{(k)}, \vec{P}_{k-1}^{(k)}) = -\eta_k \quad (16)$$

Через величины $t_{k-1} = q_{k-1}^2$ выражается амплитуда множественного рождения в мультипериферической модели (рис. 2), а именно:

$$\mathcal{M}^2 = \prod_1^{n-1} f_k(t_k) \quad (17)$$

где, например, $f_k(t_k) = \exp(\kappa_k t_k)$ или $(t_k - m_{\pi}^2)^{-2}$.

Идея Бюклинга и Каянти состоит в представлении этого процесса в виде последовательности шагов типа изображенной на рис. 3. Сравнение с рис. 1 демонстрирует близость их идеи с общепринятым способом задания такой последовательности, В то время как обычно положение оси \vec{t}_k не оговаривается, новый способ учитывает направление энергичной частицы а. В самом деле, обозначим систему с 4- импульсом ($+q_k$) и квадратом "массы" t_k буквой o_k . Тогда рис. 3 можно толковать как последовательность слияний систем а и o_k в систему 0_k и распадов $0_k \rightarrow 0_{k-1} + k$ для $k = n, n-1, \dots, 2$. Это дает возможность в (15) выразить t_{k-1} через t_k :

$$\omega_a^{(k)} = \frac{M_k^2 + m_a^2 - t_k}{2M_k} \quad (18)$$

$$p_a^{(k)} = \sqrt{[\omega_a^{(k)}]^2 - m_a^2} = \lambda_k / 2M_k, \quad (19)$$

где

$$\lambda_k = \sqrt{(M_k^2 + m_a^2 - t_k)^2 - (2M_k m_a)^2}. \quad (20)$$

В первый раз, при $k = n$, берется $t_n = p_b^2 = m_b^2 > 0$, во все следующие - $t_k < 0$.

Из (15) следуют пределы изменения t_{k-1} :

$$t_{k-1}^{(-)} \leq t_{k-1} \leq t_{k-1}^{(+)} < 0, \quad (21)$$

где

$$t_{k-1}^{(+)} = m_a^2 + M_{k-1}^2 - 2\omega_a^{(k)} E_{k-1}^{(k)} + 2p_a^{(k)} p_k^{(k)}. \quad (22)$$

Из формулы (15) следует

$$d\eta_k = \frac{dt_{k-1}}{2p_a^{(k)} p_k^{(k)}} = \frac{M_k}{\lambda_k p_k^{(k)}} dt_{k-1}. \quad (23)$$

Подстановка в (7) приводит к следующей записи интеграла состояний:

$$S_n = \frac{1}{4^{n-1}} \int dM_{n-1}^2 \frac{dt_{n-1}}{\lambda_n} d\phi_n \dots \int dM_2^2 \frac{dt_2}{\lambda_3} d\phi_3 \int \frac{dt_1}{\lambda_2} d\phi_2 \mathcal{M}^2 \quad (24)$$

в пределах (8), (21). Пределы для ϕ_k суть $(0, 2\pi)$. Бюклинг и Каянти^{/2/} разыгрывают, далее, T_{k-1} по методу упорядочения энергий (как в программе FOWL), а t_{k-1} - так, чтобы были равномерно распределены первообразные от $f_{k-1}(t_{k-1})$, например, при $f_k(t_k) = e^{K_k t_k}$

$$t_k = \frac{1}{\kappa_k} \ln [e^{\kappa_k t_k^{(-)}} + \beta_k (e^{\kappa_k t_k^{(+)}} - e^{\kappa_k t_k^{(-)}})] . \quad (25)$$

Тогда вес события есть

$$K_n = \frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-2)!} T_n^{n-2} \prod_{k=3}^n 2M_{k-1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\kappa_k t_k^{(+)}} - e^{\kappa_k t_k^{(-)}}}{4\lambda_{k+1} \kappa_k} \frac{\mathcal{N}^2}{\prod_1^{n-1} e^{\kappa_k t_k}} . \quad (26)$$

При построении гистограммы $M_{p\pi}$ в реакции $pp \rightarrow p\pi$ при $P_{\text{лаб}} = 19$ Гэв/с по этому способу (2000 событий) с $\mathcal{N}^2 = \exp(t_1 + t_2 + t_3)$ погрешность столбцов гистограммы достигала 15% (а в реакции $pp \rightarrow p\pi$ - 20%).

§2. Усовершенствование способа розыгрыша при $|\kappa_k t_k| \ll 1$

В поисках более совершенного метода розыгрыша мультиреджевской модели прибегнем к следующим грубым оценкам интеграла (2а) при $\mathcal{N}^2 = \prod_1^p \exp(\kappa_k t_k)$. Пусть энергия взаимодействия столь велика, что $M_k \approx T_k$. Будем считать, что основной вклад в процесс вносят малые передачи, так что $|t_k| \ll (M_k - m_a)^2$ и $|\kappa_k t_k| \ll 1$. Тогда в качестве пределов изменения t_k можно принять 0 и $-\infty$, а величину λ_k считать не зависящей от t_k :

$$\lambda_k \approx M_k^2 - m_a^2 . \quad (27)$$

Тогда при $k > 2$ $\int_{-\infty}^0 \exp(\kappa_k t_k) dt_k \approx \kappa_k^{-1}$, а при $k = 2$

$$\int \frac{dt_1}{\lambda_2} d\phi_2 e^{\kappa_1 t_1} \approx (2\pi / \kappa_1) (M_2^2 - m_a^2)^{-1} .$$

1. Пренебрежем сначала вариациями $(M_2^2 - m_a^2)^{-1}$ внутри фазового пространства. Тогда, например, следующий по порядку интеграл даст константу

$$\frac{1}{\lambda_3} \int dM_2 \frac{dt_2}{\lambda_2} d\phi_3 e^{\kappa_2 t_2} \approx \langle \lambda_2^{-1} \rangle \frac{1}{M_3^2 - m_a^2} \int dM_2^2 \frac{2\pi}{\mu_2^2 \kappa_2} = \frac{(M_3 - m_3)^2}{M_3^2 - m_a^2} \frac{2\pi}{\kappa_2} \langle \lambda_2^{-1} \rangle = \frac{2\pi}{\kappa_2} \langle (M_2^2 - m_a^2)^{-1} \rangle \text{ при } M_3 \gg \mu_3, m_a.$$

Аналогично сведутся к константе и последующие интегралы, так что приближенно

$$S_n = (\pi/2)^{n-1} (\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{n-1})^{-1} \langle (M_2^2 - m_a^2)^{-1} \rangle.$$

Следовательно, можно думать, что выбор в качестве переменных интегрирования M_k^2 и $\exp(\kappa_k t_k)$ сгладил бы вариации веса в мультиреджевской модели. Введем случайные числа a_k формулой

$$M_{k-1}^2 = \mu_{k-1}^2 + a_{k-1} [(M_k - m_k)^2 - \mu_k^2] \quad (k = n, \dots, 3), \quad (28)$$

а случайные числа β_k - с помощью формулы (25), тогда вес случайного события будет равен:

$$K_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=3}^n \frac{(M_k - m_k)^2 - \mu_{k-1}^2}{\lambda_k} \prod_{k=1}^{n-1} \left[\frac{e^{\kappa_k t_k^{(+)}} e^{\kappa_k t_k^{(-)}}}{\kappa_k} \right] \frac{1}{\lambda_2} \frac{\mathcal{M}^2}{\prod_{k=1}^{n-1} e^{\kappa_k t_k}}. \quad (29)$$

Когда выполнены условия $M_k \gg |t_k|, |\kappa_k t_k| \ll 1$, $\mathcal{M}^2 \approx \prod_{k=1}^{n-1} e^{\kappa_k t_k}$, то в выражении (29) все множители, кроме λ_2^{-1} , близки к постоянству.

2. Чтобы уменьшить и вариации веса в зависимости от λ_2 , учтем, что, в пренебрежении зависимостью λ_2 от t_1 , $\int dM_2^2 / \lambda_2 = \ell_n (M_2^2 - m_a^2)$.

Введем поэтому случайное число α_2 не формулой (28), а с помощью соотношения

$$\ln (M_2^2 - m_a^2) \Big|_{\mu_2}^{M_2} = \alpha_2 \ln (M_2^2 - m_a^2) \Big|_{\mu_2}^{M_3 - m_3},$$

то есть

$$M_2^2 = m_a^2 + (\mu_2^2 - m_a^2) \exp \left[\alpha_2 \ln \frac{(M_3 - m_3)^2 - m_a^2}{\mu_2^2 - m_a^2} \right], \quad (30)$$

так что

$$dM_2^2 = (M_2^2 - m_a^2) \ln \frac{(M_3 - m_3)^2 - m_a^2}{\mu_2^2 - m_a^2} d\alpha_2.$$

Остальные значения M_k вводятся по-прежнему формулой (28), в итоге:

$$\prod_2^{n-1} dM_k^2 = \prod_2^{n-1} d\alpha_k \prod_4^n [(M_k - m_k)^2 - \mu_{k-1}^2] (M_2^2 - m_a^2) \ln \frac{(M_3 - m_3)^2 - m_a^2}{\mu_2^2 - m_a^2}.$$

Вес состояния, определяемого таким образом, будет равен:

$$K_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \prod_4^n \frac{(M_k - m_k)^2 - \mu_{k-1}^2}{\lambda_k} \frac{\ln \frac{(M_3 - m_3)^2 - m_a^2}{\mu_2^2 - m_a^2}}{\lambda_3} \frac{M_2^2 - m_a^2}{\lambda_2} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\kappa_k t_k^{(+)}} - e^{\kappa_k t_k^{(-)}}}{\kappa_k} \frac{\mathfrak{M}^2}{\prod_1^{n-1} e^{\kappa_k t_k}}. \quad (31)$$

Теперь при изменениях M_2 вариации веса будут малы, зато появится более слабая зависимость веса от M_3 (порядка $\ln M_3 / M_3$).

§3. Усовершенствование способа розыгрыша при $|\kappa_k t_k| \approx 1$

Когда $\kappa_k t_k$ - величины порядка единицы, то входящее в вес (29) или (31) произведение $(\prod (e^{\kappa_k t_k^{(+)}} - e^{\kappa_k t_k^{(-)}}))$ может внутри фазового

пространства сильно меняться. Поставим себе задачу избавиться от этих вариаций в пределе $M_k \gg m_a \cdot \mu_k$. Заменяем, как и выше, λ_k на $M_k^2 - m_a^2$ и избавимся от тривиальных интегралов по ϕ_k :

$$S_n = \frac{(\pi/2)^{n-1}}{\lambda_n} \int \frac{dM_{n-1}^2}{M_{n-1}^2 - m_a^2} dt_{n-1} e^{\kappa_{n-1} t_{n-1}} \dots \int \frac{dM_2^2}{M_2^2 - m_a^2} dt_2 e^{\kappa_2 t_2} \int dt_1 e^{\kappa_1 t_1} \quad (32)$$

1. Нижний предел интегралов по t_k будем считать равным $-\infty$.

Для оценки верхнего предела формулу (22) заменим ее высокоэнергетическим приближением

$$t_{k-1}^{(+)} = - \frac{\alpha \beta M_k^2 + (\alpha - \beta)(\alpha t_k - \beta m_a^2)}{[p_a^{(k)}]^2}, \quad (33)$$

где

$$\alpha = \frac{M_{k-1}^2 - m_a^2}{2M_k}, \quad \beta = \frac{m_k^2 - t_k}{2M_k}, \quad p_a^{(k)} = \frac{\lambda_k}{2M_k}. \quad (34)$$

В тех реакциях, в которых (при $k > 2$) $M_k \gg m_a$, можно в ультрарелятивистском пределе считать $\alpha \gg \beta$.

В этом приближении

$$t_{k-1}^{+} = \left(z_{k-1} - z_{k-1}^2 \right) t_k - m_k^2 z_{k-1}, \quad (35)$$

где

$$z_{k-1} = \frac{M_{k-1}^2 - m_a^2}{M_k^2 - m_a^2}.$$

Когда же $k = 2$, то в верхнем узле на рис. 3 остается одна частица; если ее масса в данной реакции совпадает с массой частицы a ($M_1 = m_1 = m_a$), то $\alpha = 0$. Формула (33) приобретает вид

$$t_1^{(+)} = - \left(\frac{m_2^2 - t_2}{M_2^2 - m_a^2} \right)^2 m_a^2 \quad (36)$$

и в пределе $M_2 \gg \mu_2$ можно положить $t_1^{(+)} \approx 0$. Это укладывается в формулу (35), если только считать $M_1 = m_a$. Теперь сделаем предположение, что отношение эффективных масс групп зависит главным образом от числа частиц в группах. Так, можно было бы положить $M_{k-1}/M = (k-1)/k$, В мультипериферической модели /10/ число частиц в группе с массой M пропорционально $\ln M$, так что $M_{k-1}/M_k = \exp(ak) / \exp a(k+1) = \exp(-a)$ даже не зависит от k . Заменим поэтому (35) более простой формулой:

$$t_{k-1}^{(+)} = -m_k^2 z_{k-1} + \nu_{k-1} t_k \quad (37)$$

Считая, что ν_{k-1} и z_{k-1} слабо зависят от M_k и M_{k-1} , мы немедленно приобретаем право разбить интеграл состояний (32) на два независимых интеграла:

$$S_n^{(\tau)} = \int \frac{dM_{n-1}^2}{M_{n-1}^2 - m_a^2} \dots \frac{dM_k^2}{M_k^2 - m_a^2} \dots \frac{dM_2^2}{M_2^2 - m_a^2} \quad (38)$$

в пределах $\mu_k < M_k \leq M_{k+1} - m_{k+1}$ и

$$S_n^{(t)} = \int dt_{n-1} e^{K_{n-1} t_{n-1}} \dots \int dt_{k-1} e^{K_{k-1} t_{k-1}} \dots \int dt_1 e^{K_1 t_1} \quad (39)$$

в пределах $-\infty < t_{k-1} \leq t_{k-1}^+ \equiv \nu_{k-1} t_k < 0$ (и на множитель $(\pi/2)^{n-1} \lambda_n^{-1}$).

Нивелировать веса можно теперь по обеим группам переменных независимо, это крайне облегчает задачу.

2. Начнем с распределения масс. Вычислим для данной реакции (1) входящие в $S^{(M)}$ интегралы как функции k и T_k ; они понадобятся для розыгрыша T_k . Между результатами последовательного интегрирования имеется рекуррентная связь

$$S_k(T_k) = \int_0^{T_k} \frac{2M_{k-1} dT_{k-1}}{M_{k-1}^2 - m_a^2} S_{k-1}(T_{k-1}) \quad (k = 3, \dots, n) \quad (40)$$

при условии, что $S_2(T_2) \equiv 1$. Протабулируем функции $S_k(T_k)$ в интервале $0 \leq T_k \leq T_n$. Введем α_{k-1} с помощью уравнения

$$S_k(T_{k-1}) = \alpha_{k-1} S_k(T_k) \quad (k = n, n-1, \dots, 3), \quad (41)$$

так что

$$\frac{dM_{k-1}^2}{M_{k-1}^2 - m_a^2} = \frac{S_k(T_k)}{S_{k-1}(T_{k-1})} d\alpha_{k-1}$$

В переменных $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_2$ распределение (38) станет равномерным:

$$S_n(T_n) = S_n(T_n) \int_0^1 d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2. \quad (42)$$

Вместо того, чтобы табулировать $S_k(T_k)$ отдельно для каждой реакции (1), можно было бы ввести универсальную функцию

$$\sigma_k(\kappa) = \int_{m_a + m_\pi}^{\kappa} \frac{2\kappa d\kappa}{\kappa^2 - m_a^2} \sigma_{k-1}(\kappa) \quad (\sigma_2(\kappa) = 1),$$

через которую $S_k(T_k)$ выражается аналитически:

$$S_k(T_k) = \sigma_k(M_k - m_k) - \sigma_k(\mu_{k-1}), \quad (44)$$

и определять M_{k-1} из уравнения

$$\sigma_k(M_{k-1}) - \sigma_k(\mu_{k-1}) = \alpha_{k-1} [\sigma_k(M_k - m_k) - \sigma_k(\mu_{k-1})]. \quad (45)$$

Тогда

$$S_n(T_n) = S_n(T_n) \int_0^1 da_{n-1} \dots da_2 \frac{S_{n-1}(T_{n-1})}{\sigma_{n-1}(T_{n-1})} \dots \frac{S_3(T_3)}{\sigma_3(T_3)}. \quad (46)$$

При высоких энергиях распределение по $a_{n-1} \dots a_2$ здесь мало отличается от равномерного.

3. Распределение по передачам также можно свести к равномерному.

Введем константы ρ_k таким образом:

$$\rho_1 = \kappa_1, \quad \rho_2 = \kappa_2 + \rho_1 \nu_1, \quad \rho_3 = \kappa_3 + \rho_2 \nu_2 \quad (47)$$

и т.д. вплоть до ρ_n . Вместо замены (25) прибегнем к заменам

$$t_k = \frac{1}{\rho_k} \ln [e^{\rho_k t_k^{(-)}} + \beta_k (e^{\rho_k t_k^{(+)}} - e^{\rho_k t_k^{(-)}})], \quad (48)$$

тогда

$$e^{\rho_k t_k} dt_k = \frac{1}{\rho_k} [e^{\rho_k t_k^{(+)}} - e^{\rho_k t_k^{(-)}}] d\beta_k.$$

В переменных (48) интеграл (39) приобретает вид

$$S_n^{(t)} = \frac{e^{\rho_{n-1} t_{n-1}^{(+)}} e^{\rho_{n-1} t_{n-1}^{(-)}}}{\rho_{n-1} \dots \rho_1} \int_0^1 d\beta_{n-1} \dots d\beta_1 \prod_{k=1}^{n-2} \frac{e^{\rho_k t_k^{(+)}} - e^{\rho_k t_k^{(-)}}}{e^{\rho_k \nu_k t_{k+1}}} \quad (49)$$

Под знаком интеграла все множители близки к постоянству. Так, из (37) следует, что числитель $e^{\rho_k t_k^{(+)}} - e^{\rho_k t_k^{(-)}} \approx e^{\rho_k t_k^{(+)}} e^{\rho_k \nu_k t_{k+1}} e^{-m_{k+1}^2 z_k \rho_k}$

Первый множитель сократится со знаменателем, а второй, $(e^{-\rho_k m_{k+1}^2 z_k})$, следовало бы ввести в "массовый" интеграл $S^{(M)}$, но ввиду предполагаемой независимости z_k от M_k , M_{k+1} это внесло бы в $S^{(M)}$ лишь почти постоянные множители. Правила розыгрыша эффективных масс при этом остались бы прежними.

4. Теперь сделаем в первоначальном интеграле состояний (24) замены (41), (48). Вес состояния, характеризуемого $(3n-4)$ числами $a_{n-1}, \dots, a_3, \beta_{n-1}, \dots, \beta_2, \gamma_n, \dots, \gamma_2$, будет в ультрарелятивистском пределе сильно нивелирован:

$$K_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{\lambda_n} \prod_{k=2}^{n-1} \frac{M_k^2 - m_a^2}{\lambda_k} S_n(T_n) \times \quad (50)$$

$$\times \frac{e^{\rho_{n-1} t_{n-1}^{(+)}} - e^{\rho_{n-1} t_{n-1}^{(-)}}}{\rho_{n-1} \dots \rho_1} \prod_{k=1}^{n-2} \frac{e^{\rho_k t_k^{(+)}} - e^{\rho_k t_k^{(-)}}}{e^{\rho_k \nu_k t_{k+1}}} \frac{\pi^2}{\prod_{k=1}^{n-1} e^{+\kappa_k t_k}}$$

Оценить степень сглаженности весов можно только путем прямого моделирования.

§4. Сравнение разных способов

Какой из рассмотренных способов лучше?

Мы внесли изменения в действующую программу ФАРФОРС^{/11/} с тем, чтобы она моделировала периферические взаимодействия по способу Бюклинга и Каянти (ВК) и с помощью методов (31) (УВК-1) и (50) (УВК-2)

(см. Приложение). Эффективность способа мы оценивали величиной ϵ — долей звезд веса 1, получаемых по способу браковки ^{3,6/} из разыгрываемых программой звезд. Определялась зависимость ϵ от числа частиц n , коэффициента k и энергии взаимодействия M_n . Результаты показаны на рис. 4. Эффективности способов ВК и УВК-1 практически совпадают, способ же УВК-2 улучшает эффективность розыгрыша, особенно в случае $k > 1$. Эффективность падает с ростом n и практически не зависит от M_n . Мы испытали также модифицированный вариант способа УВК-1, в котором равномерно разыгрывается $\int \frac{dt}{(t - m_n^2)^2}$ вместо $\int e^{kt} dt$, но его эффективность оказалась на уровне 0,05 (рис. 5). Эффективность способа УВК-2 зависит от правильного выбора коэффициентов ν (рис. 4б).

Мы приходим к выводу, что метод, изложенный в §3, эффективнее метода ВК. Однако мы еще не умеем достаточно успешно воспроизводить мультипериферическую модель при больших множественностях (рис. 5).

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить за постоянный интерес к работе и обсуждения т.т. Нгуена Дин Ты, В.Г. Гришина, М.И. Соловьева, Е.Н. Кладницкую, К.П. Вишневскую, Ю.А. Трояна; за помощь — А.У. Абдурахимова, Х.Я. Супичакова. Мы многим обязаны сотрудникам Л.И. Жуковой, А. Гладкой, Н.В. Шариковой, Т.Н. Кулагиной и Л.И. Аверьяновой за помощь в подготовке программ.

Приложение

Режим работы программы ФАРФОРС^{/11/} задается с помощью переключателей массива IQM (15) (см. таблицу)

№ пп	Номер переключателя массива IQM (15)	Значение	Модель
I	6	2	Модель Буклинга и Каянти [1,2] (ВК)
2	2	10	Модель $\mathcal{F}(t)$ /9/
	6	I	
3	6	I	Усовершенствованная модель (УВК-1)
4	6	I	Усовершенствованная модель (УВК-2)
	2	5	
5	6	I	Модель с обменом полюсом $\frac{1}{t - m_a^2}$
	II	I	

А. В случае моделирования по методу Бюклинга и Каянти (БК) в подпрограмме АКАТА программы ФАРФОРС разыгрываются по методу упорядочения кинетические энергии T_k , а для вычисления цепочки величин (18-22) и веса события (26) вызываются подпрограммы MULTI и AOSI.

В. В модели УВК-1, так же как и в модели №5 (см. таблицу), кинетические энергии рассчитываются в подпрограмме АКАТА. Используются формулы, полученные на основании (28):

$$\text{при } k > 3 \quad T_{k-1} = \mu_{k-1} + [\mu_{k-1}^2 + \alpha_1 (2\mu_{k-1}T_k + T_k^2)]^{1/2},$$

$$\text{при } k = 3 \quad T_2 = [\mu_a^2 + (\mu_2^2 - m_a^2) \exp(\alpha_2 \ln \frac{(M_3 - m_3)^2 - m_a^2}{\mu_2^2 - m_a^2})]^{1/2} - \mu_a,$$

$$\text{при } k = 2 \quad T_1 = 0.$$

Подпрограмма MULTI осуществляет расчёт остальных величин (18-22), а также вычисляет вес (31).

С. В случае модели УВК-2 кинетические энергии находятся в подпрограмме TKMULT с использованием таблицы интегралов, вычисляемых в подпрограмме SNURE. Эти интегралы являются функциями кинетических энергий и числа частиц и входят в выражение (39) для $S^{(M)}$. Для каждого сеанса расчётов, а также для каждой новой реакции таблица интегралов рассчитывается заново. Вес события (50) вычисляется подпрограммой АКАТА с использованием подпрограммы MULTI.

Для работы программы в таком режиме нужно задать набор констант ν_k и κ_k (см. §3, п.3).

В режимах п.п. А и В необходим только набор κ_k .

Л и т е р а т у р а

1. E. Byckling and K. Kajantie. *Nucl. Phys.*, B9, 568, 1969.
2. E. Byckling, M. Kaartinen, K. Kajantie, H. Villanen. *Preprint Univ. of Helsinki*, No. 3-69, 1969.
3. Г.И. Копылов. *ЖЭТФ*, 35, 1426, 1958.
4. Г.И. Копылов. *ЖЭТФ*, 39, 1091, 1960.
5. G.I. Kopylov. *Nucl. Phys.*, 37, 425, 1962.
6. F. James. *CERN Yellow Rept.*, 68-15, 1968.
7. В.Е. Комолова, Г.И. Копылов. *Препринт ОИЯИ*, P-2027, 1965.
8. В.Е. Комолова, Г.И. Копылов. *Препринт ОИЯИ*, P11-3193, 1967.
9. A. Zieminski. *Nucl. Phys.*, B14, 1969.
10. Е.Л. Файнберг, Д.С. Чернавский. *УФН*, 82, 3, 1964.
11. Н. Ангелов, Г.И. Копылов, В.Н. Пенев, Ю.В. Тевзадзе, А.И. Шкловская. *Сообщение ОИЯИ*, 1-5449, Дубна, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1970 года.

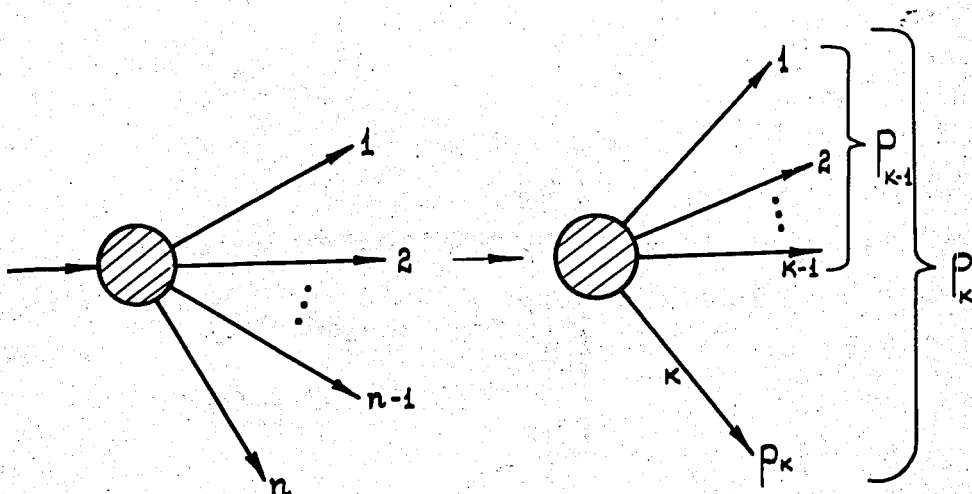


Рис. 1

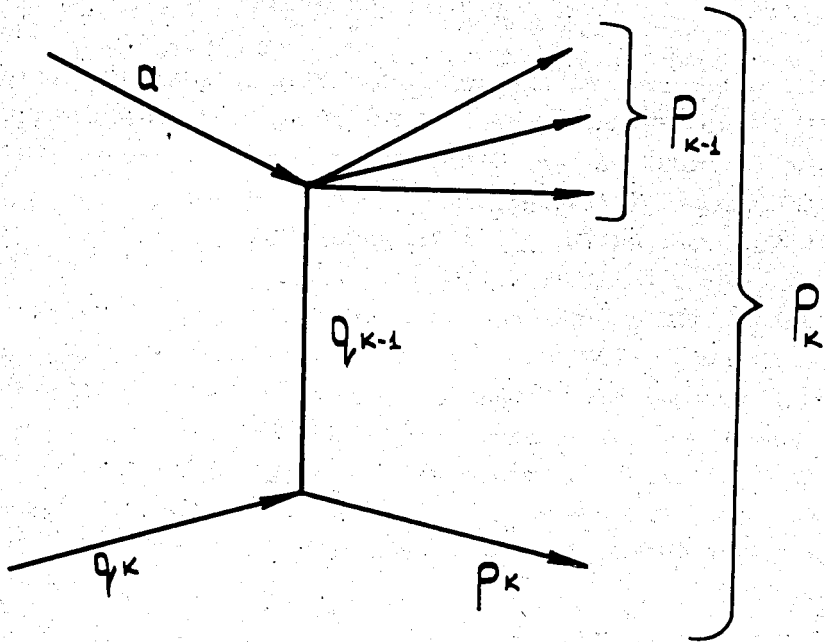


Рис. 2

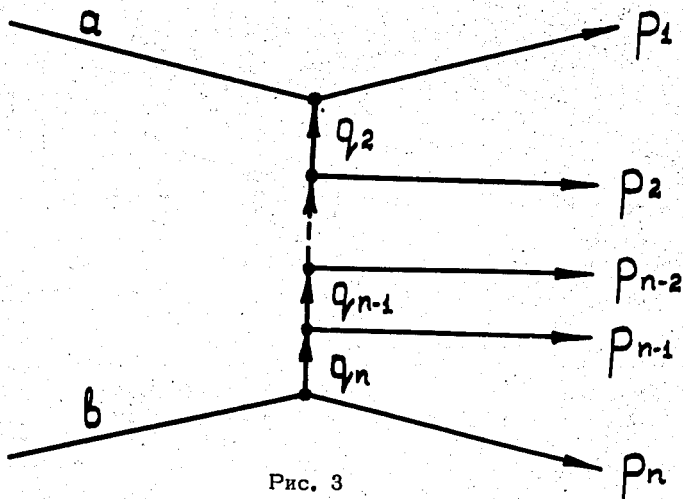


Рис. 3

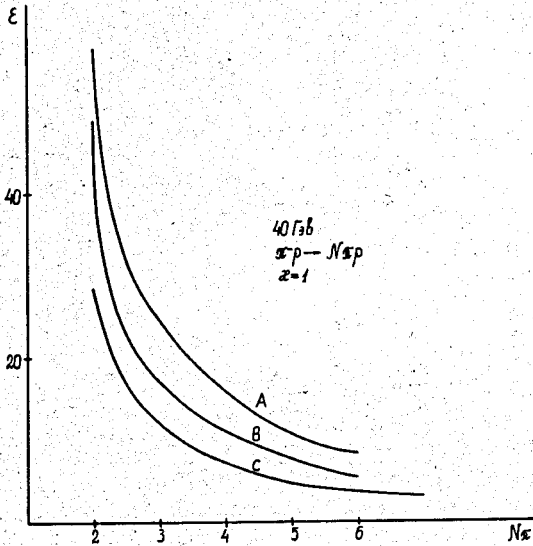


Рис. 4а. Зависимость эффективности способов ВК (кривая С), УВК-1 (кривая В), УВК-2 (кривая А) от числа π -мезонов в реакции $\pi^+ p \rightarrow N\pi^+ p$ при 40 ГэВ/с и $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_n = 1$.

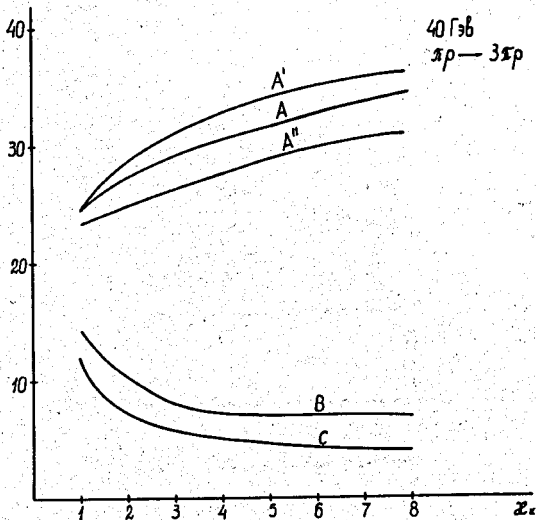


Рис. 4б. Зависимость эффективности способов ВК (кривая С), УВК-1 (кривая В) и УВК-2 (кривые А) от наклонов κ ($\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_n$) для реакции $\pi^+ p \rightarrow 3\pi^+ p$ при 40 ГэВ/с. Показана также зависимость ϵ от выбора коэффициентов ν_k для способа УВК-2. А' - ν_k - не подобраны, А - ν_k - подобраны (см. текст), А'' - $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{k-1} = 0$.

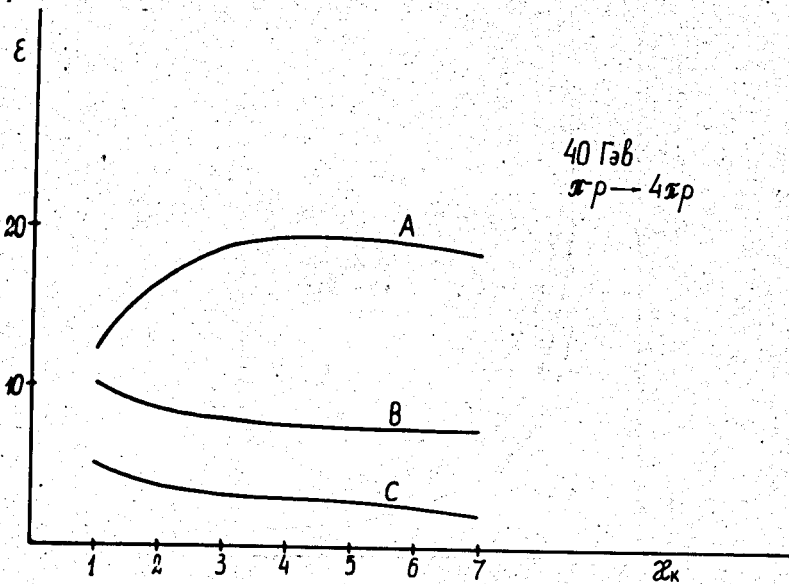


Рис. 4в. Зависимость эффективности способов ВК (С), УВК-1 (В), УВК-2 (А) от наклона κ ($\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = \dots \kappa_n$) для реакции $\pi p \rightarrow 4\pi p$ при 40 Гэв/с.

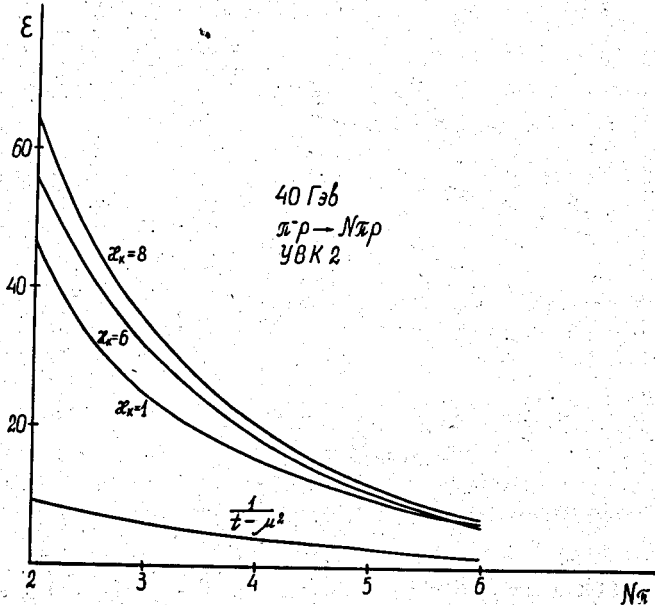


Рис. 5. Зависимость эффективности моделирования (УВК-2) в реакциях $\pi p \rightarrow N\pi p$ при 40 Гэв/с от числа π -мезонов N при разных κ ($\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = \dots \kappa_n$). Здесь же нанесена кривая для модификации способа УВК-1 с обменом полюсом $1 / (t - m_\pi^2)^2$.