ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 5451

К.В. Рерих

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1970

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
В.А. Мещеряков

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
В.Г. Кадышевский
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
В.П. Павлов.

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Математический институт Академии наук СССР им. В.А. Стеклова, отдел математической физики.
Математический институт Сибирского отделения Академии наук СССР.

Автореферат разослан " " 1970 г.

Защита диссертации состоится " " 1970 г. на заседании Учёного совета Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Учёный секретарь Совета

Р.А. Асанов

2 - 5451

К.В. Рерих

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Настоящая диссертация посвящена так называемой проблеме Чу-Лоу, которая ждет своего решения с 1956 г. – с того времени, когда Чу и Лоу [1] получили уравнения, названные их именем. Вышеуказанная проблема состоит в нахождении решения уравнений Чу-Лоу

$$h_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} + \frac{1}{\pi} P \int_1^\infty \left[\frac{\mathrm{Im} h_i(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{A_{ij} \mathrm{Im}\, h_j(\omega')}{\omega' + \omega}\right] d\omega', \quad (1)$$

где

$$h_i(\omega) = \frac{e^{i\delta_i(\omega)} \sin \delta_i(\omega)}{q^3 u^2(q^2)},$$

описывающих p – волновое рассеяние π -мезона на статическом нуклоне в двухчастичном приближении в условии унитарности.

Несмотря на привлекательную в математическом отношении красоту и обнадеживающую простоту уравнений Чу-Лоу в их более элегантной функциональной формулировке ($S_i(\omega) = 1 + 2\, i q^3 u^2(q^2)\, h_i(\omega)$):

1. $S_i(w)$ – столбец мероморфных функций комплексного переменного $w = \frac{1}{\pi} \arcsin \omega$
2. $S_i^*(w) = S_i(w^*)$ – условие действительности Шварца (2)
3. $S_i(w)\, S_i(1-w) = 1$ – условие унитарности
4. $S_i(-w) = A_{ij}\, S_j(w)$ – условие кроссинг-симметрии,

развитой наиболее последовательно в работах Мещерякова [2-4] (см. также Wanders [5], Rothelutner [6]), и частичный успех в нахождении как общего решения функциональных уравнений Чу-

Лоу с двухрядной матрицей кроссинг-симметрии[5], так и некоторого класса решений этих уравнений с матрицами 3 и 4 порядков[4,6], имеющих методическое значение, рассматриваемая проблема является как весьма трудной, так и глубокой, требующей для ее всестороннего исследования обращения к разнообразным сферам математики (сингулярные интегральные уравнения[7], нелинейный функциональный анализ[8,12], функциональные уравнения одной переменной[9,16], бирациональные преобразования, преобразования Cremona[10,11]). Вселяющими уверенность в разрешимость этой проблемы явились пионерские работы Warnock'а[12], в которых на основе методов нелинейного функционального анализа был получен ряд важных результатов, доказывающих существование решения уравнений (1) в предположении малости константы связи λ_1. Доказанная аналитичность решения в малой окрестности нуля по константе связи и использование более тонких методов нелинейного анализа, основанных на понятии производной Фреше, позволит, по-видимому, продвинуться путем аналитического продолжения по константе πN-взаимодействия в область реальных значений λ_1. Хотя общеизвестная интегральная формулировка проблемы (1), по-видимому, более пригодна для доказательства теоремы существования, функциональная формулировка позволяет использовать несомненно более мощный аппарат, по крайней мере, для нахождения точных решений этих уравнений, что продемонстрировано полностью[2,5] или пока частично в[4,6,13-16].

Эффективность функционального подхода к проблеме Чу-Лоу, равно как и к подобным уравнениям, интересным с практической или методической стороны, немедленно подтверждается после беглого знакомства с функциональными уравнениями (2.3) и (2.4), решения которых ищутся в классе функций, заданном условиями (2.1) и (2.2). Из него автоматически следует, что, если $S_1(w)$

– решение (2), то $S_1(w+\beta(w))\cdot D(w)$ также является решением (2), где

$$\begin{aligned} &\beta^*(w)=\beta(w^*),\quad \beta(-w)=-\beta(w),\quad \beta(w+1)=\beta(w). \\ &D^*(w)=D(w^*),\quad D(-w)=D(w),\quad D(w)\,D(1-w)=1. \end{aligned} \tag{3}$$

Указанный известный[4] произвол, как выясняется в параграфе 5 диссертации, не является исчерпывающим, а выписанные выше свойства произвольных функций: чётность, мультипликативность, обратная периодичность ($D(w+1)=1/D(w)$) для $D(w)$ и нечётность, периодичность, транзитивность ($w\to w+\beta(w)$) для $\beta(w)$ являются наглядным следствием уравнений (2.3) и (2.4).

Приведенные мотивы, поясняющие интерес к этой полузабытой проблеме, ее актуальность, и сжатый обзор наиболее существенных для первых двух глав диссертации работ кратко отражают содержание введения и первого параграфа, в котором излагается не ставшая еще достаточно известной функциональная формулировка уравнений (1).

Во втором параграфе дается косвенный, но обнадеживающий ответ на следующий вопрос, естественно возникающий от сопоставления результатов работ[4,11,12]. Развитый в[4] метод нахождения сугубо (отвлекаясь от произвола (3)) рациональных (для отношений $S_i(w)/S_j(w)$) в плоскости w решений (2), где также были найдены все решения этого класса, совместно с заключением Kaiser'а[11] о недостижимости правильного борновского поведения (см. ур. (1)) в единственном решении Rothelutner'а–Мещерякова из этого класса[4,6] и оптимистическими результатами работ Warnock'а[12] наводит на априорную мысль о существовании существенно трансцендентных мероморфных решений уравнений (2) вообще и, в частности, этих уравнений с матрицей Чу–Лоу и дополнительными, выписанными ниже (см. (10)), условиями правильного борновского и порогового поведения.

На примере уравнений (2.3) и (2.4) с матрицей

$$A(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

имеющих методическое значение, сформулированное выше априорное утверждение доказывается в §2, а найденные решения имеют вид/13/:

$$1).\ S_i(w) = \begin{pmatrix} x_-(w) \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \phi_-(w), \qquad 2).\ S_i(w) = \begin{pmatrix} x_+(w) \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \phi_+(w).$$

$$x_-(w) = \frac{\mathrm{sh}\,\frac{c}{2}\left(w - \frac{3}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\frac{c}{2}\left(w + \frac{1}{2}\right)}, \qquad x_+(w) = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(w - \frac{3}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(w + \frac{1}{2}\right)} \qquad (5)$$

$$\phi_\pm(w) = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2} w \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \left[1 \pm \frac{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2w - 1 - \frac{1}{2}(-1)^k\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2k - \frac{1}{2}\right)}\right]}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \left[1 \pm \frac{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2w - 1 + \frac{1}{2}(-1)^k\right)}{\mathrm{ch}\,\frac{c}{2}\left(2k - \frac{1}{2}\right)}\right]}.$$

Из структуры приведенных решений видно, что отношения $x_\pm(w) = \frac{S_1(w)}{S_2(w)}$ являются трансцендентными мероморфными функциями, полюса (нули) которых расположены на линиях $\mathrm{Re}\, w = -\frac{1}{2}$ ($\mathrm{Re}\, w = \frac{3}{2}$) с трансцендентным периодом, равным $i\,\frac{2\pi}{c}$, где

$$c = \ln \frac{1}{2}\left(7 + 3\sqrt{5}\right).$$

Хотя рассмотренный пример не является физически интересным, что нетрудно заметить из невыполнения условия (10.1), но в методическом отношении он оказывается весьма полезным и стимулирующим дальнейшие рассмотрения.

В процессе получения решений (5) можно сделать вывод о важной роли геометрической интерпретации уравнений (2.3) и (2.4). Действительно, исходя из этих уравнений, можно получить для отношения $x(w) = S_1 / S_2$ нелинейное конечно-разностное уравнение 2 порядка, имеющее вид:

$$F\left(x(w+2),\ x(w+1),\ x(w)\right) = 0. \qquad (6)$$

Отсутствие каких-либо общих методов решения подобных нелинейных уравнений приводит к необходимости последовательных приближений. В качестве первого шага рассматриваются решения (6), для которых

$$x(w+1) = f(x(w)), \qquad (7)$$

где f – мероморфная функция $x(w)$.

Из интерпретации уравнения (7) как геометрического преобразования плоскости x и аналогичного (2.3) условия унитарности для $x(w)$, следует, что отображение (7) должно быть взаимно-однозначным, а это означает (см. Маркушевич[17]), что f есть дробно-линейная функция x:

$$x' = x(w+1) = \frac{\alpha\, x(w) - \beta}{x(w) + \alpha - \gamma}\,. \tag{7a}$$

Известная[18] классификация типов дробно-линейного преобразования оказывается полезной, а соответствующие канонические формы[18] преобразования (7a) весьма удобны для решения нелинейного уравнения (7a). Там же (§2) выясняется, что все известные[2-6] решения принадлежат к параболическому типу, характеризуемому тем, что (7a) имеет одну двукратную неподвижную точку на бесконечности, а решения (5) – к гиперболическому типу с двумя неподвижными точками в (7a).

Более того, оказывается, что других решений уравнений (2.3) и (2.4) с матрицами $A(1,1)$ и $A^{Ч-Л}$ (Чу-Лоу), для которых хотя бы одно отношение $x_i(w) = S_i / S_k$, $i \neq k$, подчинялось (7a), не существует.

Результаты этого параграфа ставят вопрос о возможном существовании решений, для которых отношения $x_i(w) = S_i(w)/S_k(w)$ (k -фиксированное) являются более сложными, чем дробно-линейная (см. (5.1) и (5.2)), рациональными функциями от некоторой трансцендентной функции $\xi(w)$ (в (5.1) и (5.2) $\xi(w) = e^{cw}$), а наличие простой функциональной зависимости $S_2 = -S_3$ в относительно сложных решениях (5) наводит на мысль о таком методе нахождения искомых решений, как предварительное изучение функциональных связей, определяющих те или иные неизвестные решения уравнений (2.3) и (2.4).

В §3-5[14-16] второй главы развиваются методы нахождения функциональных связей. Исходя из наличия известного произвола (3), отражающего свойства инвариантности уравнений (2.3) и (2.4) относительно мультипликативного преобразования функций а) $S_i \to S_i D$ и транзитивного преобразования аргумента б) $w \to w + \beta(w)$, нетрудно сделать заключение о структуре функционального соотношения между функциями $S_i(w)$, зависящего от последних полиномиальным образом.

Действительно, из этих двух инвариантностей следует, что функциональная связь должна иметь (а) вид однородного полинома от $S_i(w)$ N степени (б) с постоянными коэффициентами, которые должны быть действительными вследствие требования (2.2). Таким образом, функциональная связь задается уравнением[14]

$$P_N(S_1, S_2, \dots, S_n) = \sum_{\substack{m_1 m_2 \dots m_n \geq 0 \\ \sum m_i = N}} c_{m_1 m_2 \dots m_n} S_1^{m_1}(w) S_2^{m_2}(w) \dots S_n^{m_n}(w) = 0\,. \tag{8}$$

Из очевидных свойств инвариантности (8) относительно замен α) $w \to 1 - w$; β) $w \to -w$, индуцирующих в пространстве n измерений с координатами $S_1, \dots, S_n$ группу дискретных преобразований с образующими

$$\begin{aligned} &\mathrm{I})\quad S_i \to 1/S_i \\ &\mathrm{A})\quad S_i \to A_{ij} S_j\,, \end{aligned} \tag{9}$$

следует требование инвариантности (8) относительно преобразований I) и A), математическое отражение которого приводит к переопределенной линейной однородной алгебраической системе уравнений на коэффициенты $c_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ из (8).

Указанный алгоритм нахождения функциональных связей применяется к уравнениям (2.3) и (2.4) с матрицей $A^{Ч-Л}$.

Ввиду того, что при каждом N нужно проанализировать на существование нетривиального (ненулевого) решения $[2(N+1)N]$ систем уравнений на коэффициенты $c_{m_1 m_2 \ldots m_n}$, каждая из которых состоит из $\approx (N+1)^2$ уравнений на $E[\frac{1}{6}(N^2+3N+3)]$ неизвестных коэффициентов, такой анализ оказался бы крайне утомительным и затруднительным, если бы не целочисленность коэффициентов в этой системе, которая выдвигает эвристическую возможность использования ЭВМ для подобных поисков /14/. Однако результат такого анализа на ЭВМ показывает, что до $N \leq 10$ нет других функциональных связей, кроме известного соотношения $S_2^2 = S_1 S_3$, соответствующего решению Мещерякова- Rothelutner'a, а этот вывод дает скорее отрицательный ответ на вопрос, поставленный в конце §2 (см. выше), чем уверенность в существовании новых решений, рациональным образом зависящих от некоторой трансцендентной функции. Поэтому появляется необходимость в такой модификации предложенного алгоритма, которая бы позволила аналитически рассмотреть этот вопрос и дать на него более определенный ответ, что и осуществляется в следующем четвертом параграфе.

Рассматривая уравнения для $x(w) = S_1 / S_3$ и $y(w) = S_2 / S_3$, следующие из уравнений (2.3) и (2.4) с матрицей $A(1,1)$ и проводя рассуждения, полностью аналогичные приведенным выше (§3), приходим к рекуррентной системе алгебраических уравнений на

коэффициенты искомых полиномиальных функциональных соотношений между $x(w)$ и $y(w)$, решение которой на первом же этапе дает необходимые соотношения, связывающие степень полинома N с m_1 и n_1 – максимальными степенями x и y в этом полиноме, что делает рассмотрение менее громоздким. В результате такого аналитического исследования доказано в §4, что для уравнений с матрицей $A(1,1)$ не существует других, кроме известного /3/ и найденного в §2 решений, обладающих полиномиальными функциональными связями /15/.

Методически этот отрицательный результат оказывается полезным, поскольку он ставит следующий, пессимистически звучащий вопрос: имеются ли еще новые частные решения уравнений (2.3) и (2.4), зависящие от двух произвольных функций $D(w)$ и $\beta(w)$ и претендующие на роль физических решений уравнений (2) с матрицей $A^{Ч-Л}$, удовлетворяющих нижеприведенным локальным условиям, которые в переменной ω выглядят следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&1.\ S_1(\omega) \underset{\omega\to 1}{=} 1 + 0(q^{2\ell+1}) \text{ – пороговое поведение,}\\
&2.\ S_1(\omega) \underset{\omega\to 0}{\approx} \frac{\lambda_1}{\omega} \text{ – поведение в борновском полюсе.}
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Для ответа на этот вопрос в §5 на основе рассмотрений §§3,4 развивается общий метод локального построения инвариантных подпространств, определяемых искомыми функциональными связями, в пространстве решений уравнений типа уравнений Чу–Лоу.

Пусть S есть n-мерное комплексное пространство мероморфных действительных функций комплексного переменного w. Тогда n-мерный вектор $S(w)$ в этом пространстве удовлетворяет, как это следует из (2), уравнениям:

1. $S(1-w) = IS(w)$

$$(11)$$

2. $S(w+1) = IAS(w)$.

Для того, чтобы учесть наличие D -произвола в решениях (11) (см. (3)), удобно перейти к проективным координатам

$$x_i(w) = S_i(w)/S_k(w) \ ; \ i = 1,2,\dots,n \ ; \ i \neq k \ ,$$

где k можем выбрать для определенности $k = n$, хотя, возможно, в конкретных случаях будет более удобным другой выбор.

Поскольку уравнение унитарности для $x_i(w)$, имеющее вид (11.1), нелинейно, совершим важную для дальнейшего замену

$$x_i(w) = \frac{1-a_i(w-\frac{1}{2})}{1+a_i(w-\frac{1}{2})} \ , \qquad (12)$$

так что уравнение унитарности для $a_i(w)$ означает нечётность этих функций от w :

$$a_i(-w) = -a_i(w) \ . \qquad (13)$$

В переменных a_i уравнения (11.2) примут вид:

$$a_i(w+1) = G_i(a_j(w)) \ , \qquad (14)$$

где $G_i(a_j(w))$ задается следующей формулой:

$$G_i(a_j) = \frac{-\sum\limits_{q=1}^{n-1}\sum\limits_{\{k_q\}}^{n-1} a_{k_1}a_{k_2}\dots a_{k_q}\left[\sum\limits_{j=\{k_q\}}(A_{ij}-A_{nj})\right]}{1+\sum\limits_{q=1}^{n-1}\sum\limits_{\{k_q\}}^{n-1} a_{k_1}a_{k_2}\dots a_{k_q}\left[1-\sum\limits_{j=\{k_q\}}(A_{ij}+A_{nj})\right]} \ . \qquad (15)$$

Здесь символ $\sum\limits_{\{k_q\}}^{n-1}$ означает суммирование по упорядоченной системе элементов a_k с индексами $k_1<k_2<\dots<k_{q-1}<k_q$, $1\le k_\ell \le n-1$, а в коэффициентах, стоящих перед произведениями $a_{k_1}a_{k_2}\dots a_{k_q}$ с конкретными индексами $k_1, k_2\dots, k_q$, индекс суммирования j пробегает значения $k_1, k_2, \dots, k_q$.

Для физических решений (13-15) будем предполагать выполненными локальные условия (10), которые в переменных $a_i(w)$ означают следующее:

$$1.\ a_i(w) \underset{w\to 0}{\approx} 0\,(w^{2\ell+1}) \ ,$$
$$2.\ a_i(w)\big|_{w=-\frac{1}{2}} = \frac{1-\lambda_i/\lambda_n}{1+\lambda_i/\lambda_n} \ . \qquad (16)$$

Свойства действительности функций $a_i(w)$ (см. (2.2) и (12)) и операторов G_i из (15), являющихся операторами единичного, параллельного действительной оси w , сдвига аргумента, позволяют рассматривать функции $a_i(w)$ на действительной оси, а $(n-1)$-мерное комплексное пространство a - как действительное пространство $(n-1)$ измерения.

Допустим, что известно решение системы (13-15) на действительной оси. Поскольку функции $a_i(w)$ мероморфны, то всегда можно указать такой конечный отрезок действительной оси w, на котором все $a_i(w)$ аналитичны. Тогда "внутренняя теорема единственности" (см. Маркушевич /17/) в применении к аналитическому продолжению этих решений в комплексную область допускает взаимно-однозначный переход из комплексного пространства a в действительное подпространство a .

Далее предлагается занимающая центральное место во второй главе геометрическая интерпретация функциональных уравнений (14), (15), обсуждаются особые точки преобразования (14) и его неподвижные точки, множество которых ввиду нечётности $a_i(w)$ симметрично относительно инверсии всех осей a_i. Физически интересной (см. (16.1)) неподвижной точкой, как легко заметить из (14), (15), является начало координат в a-пространстве, через которое обязательно должно проходить физическое решение системы (14), (15).

Прежде чем обсуждать вопрос о том, как будут выглядеть в a-пространстве решения (13–15), предварительно дадим определение максимально широкого класса решений уравнений (13–15), которые лежат в инвариантных подпространствах a-пространства.

Поскольку (13–15) есть система из $(n-1)$ нелинейных конечно-разностных уравнений, то общее решение этой системы, вообще говоря (см., например, /19/), зависит от $(n-1)$ произвольных функций, одной из которых вследствие постоянства коэффициентов в (15) является функция $\beta(w)$ из (3). Поэтому максимально широкий класс решений, лежащих в инвариантных подпространствах в указанном выше смысле, можно определить следующим образом.

<u>Определение класса решений системы (13–15)</u>

Среди всех решений системы (13–15) с произвольной матрицей кроссинг-симметрии порядка n рассматриваются решения, являющиеся однозначными функциями от k-переменных:

$$a_i(w) = a_i(w + \beta_1(w), \phi_2(w), \ldots, \phi_k(w))$$

для $i = 1,2, \ldots, n-1$, где $1 \le k \le n-2$. Функция $\beta_1(w)$ имеет свойства (3), а $(k-1)$ – произвольные функции $\phi_j(w)$, в частности, могут иметь структуру $\phi_j(w) = w + \beta_j(w)$, где $\beta_j(w)$ имеют свойства (3).

Тогда рассмотрение $(n-1)$ уравнений

$$a_i = a_i(w + \beta_1(w), \phi_2(w), \ldots, \phi_k(w))$$

как параметрических уравнений k-мерной гиперповерхности Φ_k, вложенной в $(n-1)$-мерное пространство a, с учётом нечётности $a_i(w)$ и того, что оператор $G_i(a_j)$ для $a_j(w)$, являющихся одним из решений (13–15), есть оператор движения на k-мерной гиперповерхности Φ_k, приводит нас к следующим функциональным уравнениям итеративного типа на инвариантные гиперповерхности Φ_k:

$$\begin{aligned}
a'_{i_\ell} &= \phi_{i_\ell}(a'_{j_1}, a'_{j_2}, \ldots, a'_{j_k}), \\
a'_{i_\ell} &= G_{i_\ell}(a_{j_m}, \phi_{i_q}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k})), \\
a'_{j_p} &= G_{j_p}(a_{j_m}, \phi_{i_q}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k})),
\end{aligned} \tag{17}$$

$$1 \le \ell, q \le n-1-k; \quad 1 \le p, m \le k.$$

Появившиеся выше функции $\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \ldots, \phi_{i_{n-1-k}}$ задают общее уравнение гиперповерхности Φ_k в окрестности каждой неподвижной точки (14) следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_{i_1} &= \phi_{i_1}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i_{n-1-k}} &= \phi_{i_{n-1-k}}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}).
\end{aligned} \tag{18}$$

Вследствие инвариантности гиперповерхностей Φ_k относительно инверсии всех осей a_i эти функции должны быть нечётны относительно одновременного изменения знака $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}$, т.е.

$$\phi_{i_\ell}(-a_{j_1}, -a_{j_2}, \dots, -a_{j_k}) = -\phi_{i_\ell}(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}) . \quad (19)$$

Таким образом, нахождение всех инвариантных относительно преобразования (14) подпространств в a -пространстве сводится к решению систем функциональных уравнений (17), (19) на $(n-1-k)$ - неизвестные функции $\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \dots, \phi_{i_{n-1-k}}$. Метод решения таких функциональных уравнений есть разложение функций ϕ_{i_ℓ}, G_{i_ℓ}, G_{j_p} в ряды Тейлора в окрестности неподвижных точек (14).

Определив из систем (17), (19) коэффициенты разложения в ряд Тейлора для функций $\phi_{i_\ell}(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k})$, мы получим представление функций ϕ_{i_ℓ} в виде ряда в некоторой k -мерной окрестности неподвижной точки (14), размер которой будет определяться радиусом сходимости полученного ряда. Если удастся просуммировать эти ряды, то полученные таким путем функции ϕ_{i_ℓ} будут аналитическим заданием всей гиперповерхности Φ_k.

Найденные таким образом инвариантные подпространства позволяют уменьшить число неизвестных функций $a_i(w)$ в системе (13-15), что кроме существенного упрощения решения последней дает возможность проверить, не получая явного вида решений, выполнимость важного для p -волн условия (16.2).

Итак, результатом §5 является эффективный метод, на основе которого в §6 дается окончательный отрицательный ответ на

вопрос, поставленный в конце §4. Анализ уравнений (14), (15) с матрицами кроссинг-симметрии Чу-Лоу третьего и четвертого порядков с помощью вышеизложенного метода показывает, что в определенном в §5 классе функций (решений) имеются только следующие инвариантные кривые и поверхности (для четырехрядной матрицы $A^{Ч-Л}$):

для трехрядной $A^{Ч-Л}$

I. $a_1 = -a_3$.

II. 1) $a_1 = \dfrac{a_3 - a_4}{1 - a_3 a_4}$,

2) $a_3 = 0$,

3) $a_1 = -a_4,\ a_3 = 0$ (20)

4) $a_1 = 0,\ a_3 = a_4$

5) $a_4 = 0,\ a_3 = a_1$.

для четырехрядной $A^{Ч-Л}$,

которые соответствуют известным, но несовместимым с условием (16.2), решениям Rothelutner'a -Мещерякова[4,6].

Из этого следует неутешительный, но определенный вывод: интересующие нас решения содержатся только в общем решении этих уравнений, зависящем с учётом D-произвола (3) от трех, соответственно, четырех, произвольных периодических функций.

В главе III, §7, на основе решения Вандерса[5] для s-волн πN-рассеяния

$$S_1(w) = \frac{B(w)(B(w)-2)}{B^2(w)-1} D(w)$$

$$S_3(w) = \frac{B(w)}{B(w)-1} D(w), \quad (21)$$

где

$S_j(w(\omega)) = e^{2i\delta_j(\omega)}$, а $B(w) = w + \beta(w)$, (см. (2) и (3)).

построены формулы, описывающие экспериментальную информацию по s-фазам и явно учитывающие вклад ρ и σ -мезонов. Получено количественно хорошее описание энергетического хода s-фаз до энергии 260 Мэв в л.с.к. Найденные в результате этого анализа длины рассеяния находятся в хорошем согласии с результатами работ других авторов.

Обсуждается структура полюсов построенных функций $S_I(\omega)$ на физическом листе. Проведено условное разделение полюсов на близкие ($|q|^2<12$) и далекие ($|q|^2>12$) по параметру $|q|^2$, который соответствует p^2 из /20/. Полюса, расположенные вне круга ($|q|^2=12$), весьма существенны для понимания $s^{(+)}$-волн и дают небольшие ($\approx$ 30%) поправки к $s^{(-)}$-волнам. Интегральный вклад далеких полюсов в комбинацию длин рассеяния $a^{(+)}=\frac{1}{3}(a_1+2a_3)$, как это следует из ее экспериментально малого значения и полученного (§7) большого положительного вклада в эту комбинацию ($\approx$ 0,99) σ-мезона, отрицательный. Это означает, что взаимодействие в $s^{(+)}$- волне на малых расстояниях имеет характер отталкивания. Коэффициент интенсивности этого отталкивания, если аппроксимировать указанную далекую область одним полюсом $\frac{\gamma/2}{1+q^2/p^2}$, равен $-0,66$, что близко к универсальному значению этой константы в /20/ $\gamma\approx-0,5$.

В нашем рассмотрении нижняя граница значений соответствующего /20/ параметра p^2, характеризующая коротковолновость, равна 12, что в четыре раза меньше значения $p^2=50$ из /20/. Однако, поскольку коротковолновый полюсной потенциал /20/ является аппроксимацией области сравнительно высоких энергий, то сделанное в §7 сравнение нашего рассмотрения с концепцией коротковолнового отталкивания, если и не подтверждает ее полностью, то и не противоречит последней /21/.

Диссертация написана на основе опубликованных работ /13-16/ и /21/.

Литература

1. G.F. Chew, F.E. Low. Phys.Rev., 101, 1570 (1956).
2. В.А. Мещеряков. ЖЭТФ, 52, 648 (1966), ДАН СССР 174, 1054 (1967).
3. V.A. Meshcheryakov. Phys.Lett., 24B, 63 (1967).
4. В.А. Мещеряков. Препринт ОИЯИ Р-2369, Дубна, 1965.
5. G. Wanders. Nuovo Cim., 23, 816 (1962).
6. T. Rothelutner. Zs.Phys., 177, 287 (1964).
7. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз (1962).
8. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз (1959).
9. M. Kuczma. Functional equations in a single variable. Warsaw. Pol. Scien. Publ. (1968).
10. L. Cremona. Opere Matematiche. vol. 2 Milano (1915).
11. H.J. Kaiser. Preprint PHE, 68-2, Berlin (1968).
12. R.L. Warnock. Phys.Rev., 170, 1323 (1968), ibid. 174, 2169 (1968). H. McDanniel, R.L. Warnock. Phys.Rev., 180, 1433 (1969). Argonne preprint ANL/HEP, 6914 (1969).
13. В.И. Журавлев, В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. ЯФ, 10, 168 (1969).
14. В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. Сообщения ОИЯИ, Р2-4356, Дубна (1969).
15. В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. Сообщения ОИЯИ, Р2-4377, Дубна (1969).
16. V.A. Meshcheryakov, K.V. Rerikh. Ann.Phys., 59, 408 (1970). Preprint JINR P2-4733, Dubna (1969).
В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. ТМФ, 3, 78 (1970).
17. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций. "Наука", т. 1 (1967).

18. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. т. 3 "Наука", Москва (1967).

19. А.О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. "Наука", Москва, (1967).

20. D.V. Shirkov, V.V. Serebryakov. Nucl.Phys., B6, 607 (1968).

21. В.А. Мещеряков, К.В. Рерих. Сообщение ОИЯИ, Р2-5263, Дубна (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
10 ноября 1970 года.