ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



2 - 5437

Ю. Нири

# ПОЛНАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1970

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Я.А. Смородинский

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук В.М. Шехтер
кандидат физико-математических наук Л.И. Пономарев

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт теоретической и экспериментальной физики.

Автореферат разослан " " 1970 года.

Защита диссертации состоится " " 1970 года на заседании Ученого совета Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Ученый секретарь Совета

Р.А. Асанов

2 - 5437

Ю. Нири

# ПОЛНАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

7300 бр.

Наиболее последовательным подходом к задаче трех тел в квантовой механике является развитый в последнее время метод гиперсферических функций /1 - 12/. Метод этот достаточно хорошо разработан для связанных состояний, и сделаны попытки применить его к проблеме рассеяния. Следуя общей схеме теории возмущений, сначала строятся базисные функции - волновые функции системы трех невзаимодействующих частиц. После этого функции взаимодействующих частиц разлагаются по этому базису.

Сходимость ряда теории возмущений очень сильно зависит от конкретного выбора базисных функций. Поэтому методы построения полной системы ортонормированных функций заслуживают тщательного исследования.

Исходными базисными функциями в настоящей диссертации выбираются гиперсферические функции - функции, определенные на пятимерной сфере, являющиеся собственными функциями угловой части шестимерного лапласиана. Выбор этот отражает инвариантность свободного гамильтониана относительно группы $O(6)$. Гиперсферические функции должны описывать трехчастичные состояния с определенным угловым моментом, т.е. они должны быть собственными функциями трехмерного оператора момента количества движения $J$ и его проекции $J_3$.

Если не требовать симметрии относительно перестановок, то самым простым способом построения гиперсферических функций является так называемый метод "деревьев" /13/. Нам необходимо модифицировать эти функции так, чтобы в них появилась перестановочная симметрия, т.е. нужно решить задачу о переходе к функциям, которые одновременно являются собственными функциями группы перестановок $S_3$. Гиперсферические функции с определенными свойствами симметрии относительно перестановок частиц принято называть $K$ - гармониками, они введены впервые в /I,2/.

Групповой подход к задаче трех тел, основанный на инвариантности лапласиана относительно $O(6)$, проведен впервые Драгтом/4/, который дал классификацию трехчастичных состояний согласно цепочке вложенных подгрупп

$$O(6) \supset SU(3) \supset O(3).$$

Эта цепочка дает четыре квантовых числа, в то время как движение системы $n$ частиц с заданной энергией - импульсом определяется $3n - 4$ параметрами, и требует для своего квантово-механического описания $3n - 4$ чисел (т.е. 5 квантовых чисел при $n = 3$). Поэтому классифицированные по приведенной выше цепочке состояния оказываются вырожденными. Для описания состояний, входящих в состав вырожденного терма, и служит пятое квантовое число; его часто называют "недостающим" квантовым числом. Вырожденные состояния образуют некоторое подпространство, в котором надо построить базис. Это может быть сделано двумя способами: или прямой ортогонализацией функций (например, по Шмидту), или с помощью дополнительного эрмитового оператора $\hat{\Omega}$, коммутирующего с генераторами $O(3)$. (Его собственное значение и есть недостающее квантовое число). Первый способ прост, но имеет тот недостаток, что неизвестен пятый оператор, и трудно получить решение с нужными свойствами симметрии. Если же использовать $\hat{\Omega}$, то, так как он является эрмитовым оператором, его собственные функции по определению ортогональны. Однако, поскольку $\hat{\Omega}$ - оператор высокого (третьего) порядка, мы приходим к алгебраическому уравнению высокой степени.



Вопросы, связанные с $\Omega$, создают по-видимому, самые существенные трудности в работах, основанных на методе гиперсферических функций. Поэтому в настоящей диссертации после попытки решить уравнение для $\Omega$ в общем виде мы выбираем другой, обходной путь: мы ставим своей целью найти матрицы перехода от общих гиперсферических функций к $K$ - гармоникам. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и трех приложений.

В главе I рассматриваются групповые свойства задачи трех тел. Показано, что на векторах

$$\vec{\xi} = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2), \quad \vec{\eta} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{I}$$

(где радиус-векторы $\vec{x}_i$ трех частиц с равными массами связаны условием $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 0$), и на комплексных векторах

$$\vec{z} = \vec{\xi} + i\vec{\eta}, \quad \vec{z}^* = \vec{\xi} - i\vec{\eta} \tag{2}$$

можно построить группы $O(6)$, $SU(3)$ и в некоторых случаях — $O(4)$. Для этой цели вводятся разные системы координат, дана параметризация. Попутно найдены соотношения между $D$ - функциями Вигнера в подвижных и неподвижных системах координат.

Во второй главе диссертации строится система функций, характеризуемая пятью квантовыми числами $K$, $J$, $M$, $\nu$, $\Omega$, в угловых переменных на пятимерной сфере. Четыре из этих квантовых чисел возникают из разложения $O(6) \supset SU(3) = O(3) \times O(2)$, а именно: $K(K+4)$ - собственное значение лапласиана на 5-мерной сфере; $J(J+1)$ – собственное значение квадрата оператора момента количества движения $J^2 = 4\sum_{i>k} J_{ik}^2$

$$J_{ik} = \frac{1}{2}\left(iz_i\frac{\partial}{\partial z_k} - iz_k\frac{\partial}{\partial z_i} + iz_i^*\frac{\partial}{\partial z_k^*} - iz_k^*\frac{\partial}{\partial z_i^*}\right) \quad ; \tag{3}$$

$M$ – собственное значение $J_3 = 2J_{12}$ и $\nu$ – собственное значение оператора

$$N = \frac{1}{2}\sum_k\left(z_k\frac{\partial}{\partial z_k} - z_k^*\frac{\partial}{\partial z_k^*}\right). \tag{4}$$

Пятое квантовое число $\Omega$ уже не содержится в подгруппах; оно берется из группы $O(6)$ и определено как собственное значение оператора

$$\hat{\Omega} = \sum_{i,k,\ell} J_{ik}B_{k\ell}J_{\ell i} = Sp\, JBJ, \tag{5}$$

где

$$B_{ik} = \frac{1}{2}\left(iz_i\frac{\partial}{\partial z_k} + iz_k\frac{\partial}{\partial z_i} - iz_i^*\frac{\partial}{\partial z_k^*} - iz_k^*\frac{\partial}{\partial z_i^*}\right). \tag{6}$$

В этой главе получен явный вид пяти коммутирующих операторов.

На основании выражения

$$ds^2 = |dz|^2 = g_{ik}q^iq^k =$$

$$= \rho^2\left[\frac{1}{4}da^2 + \frac{1}{4}d\lambda^2 + \frac{1}{2}d\Omega_1^2 + \frac{1}{2}d\Omega_2^2 + d\Omega_3^2 - \right. \tag{7}$$

$$\left. -\sin a\, d\Omega_1 d\Omega_2 - \cos a\, d\Omega_3 d\lambda\right] + d\rho^2$$

построен оператор Лапласа



$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}g^{ik}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial q^k} =$$

$$= 4\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2\,\mathrm{ctg}\,2a\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\sin^2 a}\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \cos a\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\Omega_3} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\Omega_3^2}\right) + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \frac{1}{2\cos^2 a}\left[\frac{\partial^2}{\partial\Omega_1^2} + \sin a\left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega_1\partial\Omega_2} + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_2\partial\Omega_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_2^2}\right]\right\}.$$

Разработан метод вычисления генераторов группы трехмерных вращений $J_{ik}$

$$J_{ik} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ik\ell}\left[\ell_1^{(\ell)}\frac{\partial}{\partial\Omega_1} + \ell_2^{(\ell)}\frac{\partial}{\partial\Omega_2} + \ell^{(\ell)}\frac{\partial}{\partial\Omega_3}\right] \tag{9}$$

и группы деформаций $B_{ik}$. Выведен явный вид оператора $\hat{\Omega}$ :

$$\hat{\Omega} = -\frac{1}{4}\left\{\sqrt{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega_+^2}H_+ + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_-^2}H_-\right) + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_3^2}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \right.$$

$$+ \Delta_\theta\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{1}{\cos a}\left(\Delta_\theta - \frac{\partial^2}{\partial\Omega_3^2} + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\Omega_3} + \tag{10}$$

$$\left. + \mathrm{tg}\,a\left[i\left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega_+^2} - \frac{\partial^2}{\partial\Omega_-^2}\right)\frac{\partial}{\partial\Omega_3} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega_+^2} + \frac{\partial^2}{\partial\Omega_-^2}\right)\right]\right\}$$

$$H_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial}{\partial a} \pm i\frac{1}{\sin a}\frac{\partial}{\partial\lambda} \pm \frac{i}{2}\,\mathrm{ctg}\,a\frac{\partial}{\partial\Omega_3}\right].$$

Показано, что до $K < 4$ кратность всех состояний равна единице, а в интервале $4 \leqslant K < 8$ появляются состояния с кратностью 2. Не вырождены все состояния с $J = 0$ и $J = K$. Поэтому, несмотря на принципиальные трудности, связанные с $\Omega$, для практических расчетов можно ограничиться четырьмя квантовыми числами. Наконец, в этой главе приведен общий вид решения задачи

$$\Phi^J_{M,\nu} = \sum_{x}\sum_{\mu} a_\nu(x,\mu)D^{\frac{K}{2}-x}_{\nu,\frac{\mu}{2}}(\lambda,a,0)D^J_{\mu,M}(\varphi_1\theta\varphi_2), \tag{11}$$

коэффициенты в котором должны быть определены так, чтобы полученные базисные функции удовлетворяли уравнению Лапласа на пятимерной сфере, и уравнению для собственных значений оператора $\hat{\Omega}$.

Из-за сложности совместного решения системы двух уравнений для $K$ и $\Omega$ в главе 3 используется другой путь: методом "деревьев" /13/ строится полная система функций с квантовыми числами $K$, $j_1$, $M_1$, $j_2$, $M_2$. От этой системы совершается переход к $K$ – гармоникам (к системе функций, соответствующей квантовым числам $K$, $J$, $M$, $\nu$, ($j_1 j_2$) ) путем преобразования Фурье. Функции получены в виде

$$\Phi^{j_1 j_2}_{JM\nu}(\vec{\xi},\vec{\eta}) = A_{JM}\sum_{m}\sum_{\mu,\delta}\sum_{\varkappa}\left(j_1,\frac{\mu+\delta}{2};j_2,\frac{\mu-\delta}{2}\Big|J;\mu\right)^2 \cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\frac{K-\delta}{4},W+\frac{\mu}{4};\frac{K+\delta}{4},-W+\frac{\mu}{4}\Big|\frac{K}{2}-\varkappa;\frac{\mu}{2}\right)}{\left(\frac{j_1}{2}+m,\frac{\mu+\delta}{4};\frac{j_2}{2}+n-m,\frac{\mu-\delta}{4}\Big|\frac{K}{2};\frac{\mu}{2}\right)}\;\frac{(-1)^{\frac{K+\mu-\delta}{4}-\frac{\nu}{2}+\varkappa}}{2^{K/4}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\Delta^{(J)}_{0\mu}\,\Delta^{(\frac{K}{2}-\varkappa)}_{\delta/2,\nu}}{\Delta^{(\frac{K}{2})}_{\frac{K}{2},\frac{\mu}{2}}}\left[\frac{(j_1+2m)!\,(j_2+2n-2m)!}{(K+\varkappa+1)!\,\varkappa!}\right]^{1/2}\cdot \tag{I2}$$

$$\cdot\binom{n+j_1+\frac{1}{2}}{m}\binom{n+j_2+\frac{1}{2}}{n-m}\cdot D^{\frac{K}{2}-\varkappa}_{\nu,\frac{\mu}{2}}(\lambda,a,0)\,D^{J}_{\mu M}(\varphi_1\theta\varphi_2).$$



Решения уравнений для $K$ и $\Omega$ ищутся в виде линейных комбинаций

$$\Phi^{J}_{M,\nu} = \sum_{j_1 j_2} C_{(j_1 j_2)}\,\Phi^{j_1 j_2}_{JM\nu}(\vec{\xi},\vec{\eta}). \tag{I3}$$

Далее исследован частный случай построения собственной функции при $J = 0$.

$$\Phi^{jj}_{00}(\vec{\xi},\vec{\eta}) = -\sum_{\nu}\frac{i^{j}}{2^{2j-1/2}}\left(\frac{K+2}{2j+1}\right)^{1/2}\frac{\Gamma(2j+2)\Gamma(K+3/2)}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+3/2)\Gamma\left(\frac{K+3}{2}\right)}\cdot \tag{I4}$$

$$\cdot\left(\frac{K}{4},\frac{\nu}{2};\frac{K}{4},-\frac{\nu}{2}\Big|j;0\right)D^{K/4}_{\nu/2,-\nu/2}(\lambda,2a,-\lambda)$$

В качестве иллюстрации развитой нами техники в главе 4 рассматривается классическая задача трех тел. Получены уравнения движения в "истинных" координатах и в квазикоординатах Больцмана /14/. Приведены примеры потенциалов для системы трех частиц.

В пятой главе демонстрируется другое возможное применение $K$ – гармоник. При изучении диаграмм Далитца для распадных процессов оказывается удобным разложить плотность точек внутри физической области по системе ортонормированных полиномов, в частности, по построенной нами системе функций. Для этого надо найти связь между координатами Далитца $\varepsilon_i = \frac{1}{2}x_i^2$ и нашими переменными:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}\left(1+\sin^2\frac{a-\lambda}{2}+\cos^2\frac{a+\lambda}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin(a-\lambda)+\sin(a+\lambda)\right)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}\left(1+\sin^2\frac{a-\lambda}{2}+\cos^2\frac{a+\lambda}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin(a-\lambda)+\sin(a+\lambda)\right)\right] \tag{I5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{6}\left[\cos^2\frac{a-\lambda}{2}+\sin^2\frac{a+\lambda}{2}\right].$$

Таким образом, диаграмма Далитца параметризуется с помощью $a$ и $\lambda$. Мы рассматриваем простейшие случаи: распады мезонов со спинами 0 и I на три бесспиновые частицы. Поэтому, разлагая плотность точек на диаграмме Далитца, мы можем ограничиться случаями $J = 0, I$, для которых функции достаточно просты.

В приложение I вынесены расчеты и таблицы, связанные с числом состояний при заданных $K$. В приложении II показано, что уравнения для $\Omega$ можно существенно упростить; остается лишь аккуратно сосчитать коэффициенты в них и получить численные результаты. Наконец, в приложении III найдены пределы изменения переменных $a$ и $\lambda$, связанных с деформациями треугольника, составленного из трех частиц.

Основные результаты настоящей диссертации изложены в работах /7-I2/ и докладывались на XV Международной конференции по физике высоких энергий (Киев, 1970).



ЛИТЕРАТУРА

I. А.М.Бадалян, Ю.А.Симонов, ЯФ 3, 6 (1966).
2. Ю.А.Симонов. ЯФ 3, 630 (1966).
3. В.В.Пустовалов, Ю.А.Симонов. 5I, 345 (1966).
4. A.J.Dragt. Journ.Math.Phys., 6, 533 (1965).
5. J.M.Lévy-Leblond, M.Lévy-Nahas. Journ.Math.Phys., 6, I57I (1965).
6. R.C.Whitten, F.T.Smith. Journ.Math.Phys., 9, II03 (1968).
7. J.Nyiri, Ya.A.Smorodinsky. Preprint JINR E4-4043 (1968).
8. Ю.Нири, Я.А.Смородинский. ЯФ 9, 882 (1969).
9. J.Nyiri, Ya.A.Smorodinsky. Preprint JINR E2-4809, (1969).
I0. Ю.Нири, Я.А.Смородинский. ЯФ I2, 202 (1970).
II. J.Nyiri, Ya.A.Smorodinsky. Preprint JINR E2-5067 (1970).
I2. Ю.Нири, Я.А.Смородинский. Материалы XV Международной конференции по физике высоких энергий, Киев (1970).
I3. Н.Я.Виленкин, Г.И.Кузнецов, Я.А.Смородинский. ЯФ 2, 906 (1965).
I4. Уиттекер. Аналитическая динамика, ОНТИ, Москва (1937).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1970 года.