ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 4566

М.Б.Шефтель

ГРУППА ЛОРЕНЦА, ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ АМПЛИТУДЫ

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1969

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Я.А.Смородинский

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
И.С. Шапиро
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Р.М. Мурадян

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Физический институт им. Лебедева АН СССР.

Автореферат разослан " " 1969 г.
Защита диссертации состоится " " 1969 г.
на заседании Ученого совета Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
Р.А. Асанов

2 - 4566

М.Б.Шефтель

ГРУППА ЛОРЕНЦА, ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ АМПЛИТУДЫ

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Свойства симметрии физических систем имеют принципиальное значение как для построения теории элементарных частиц, так и для описания других физических явлений. Математически им соответствует точная или приближенная инвариантность основных физических характеристик относительно групп непрерывных или дискретных преобразований и классификация возможных состояний систем с помощью собственных значений инвариантов этих групп. Так, инвариантность теории поля относительно группы Пуанкаре приводит к понятиям массы и спина элементарных частиц /1,2/. Аналогично, в релятивистской теории рассеяния фундаментальную роль должна играть группа Лоренца, которая является как группой преобразований систем отсчета в пространстве скоростей, так и группой движений в пространстве "существенных" переменных, от которых зависят релятивистские амплитуды.

Настоящая диссертация посвящена разработке аппарата представлений группы Лоренца и применению его в задачах релятивистской квантовой механики. Рассматривается 2 класса задач, и в связи с этим – гармонический анализ по представлениям группы Лоренца двух типов функций, заданных на гиперболоиде $u_0^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 = 1$: волновых функций одночастичных состояний и амплитуд двухчастичных реакций $1+2 \to 3+4$.

Базис представлений реализуется на собственных функциях оператора Лапласа на гиперболоиде. Задача сводится к получению прямых и обратных формул разложения по полной системе функций, т.е. аналога интеграла Фурье. Возникающие в результате разложения лоренцевы квантовые числа можно использовать для описания одночастичных состояний во внешних полях, волновых функций со спектром масс и спинов, либо для классификации состояний системы двух взаимодействующих релятивистских частиц и релятивистского фазового анализа амплитуд.

Глава I диссертации посвящена проблеме построения базиса унитарных неприводимых представлений группы Лоренца в пространстве собственных функций оператора Лапласа на гиперболоиде.

В §1 кратко рассмотрены наиболее вырожденные представления группы Лоренца на гиперболоиде. (Автор следует в основном работе Н.Я.Виленкина и Я.А. Смородинского [/3/]). Эти представления характеризуются единственным неисчезающим оператором Казимира $\Delta = L_i^2 - K_i^2$, который совпадает с дифференциальным оператором Лапласа-Бельтрами на гиперболоиде. Различным редукциям группы Лоренца $L(3,1)$ к своим подгруппам $L(3,0)$ или $L(2,1)$ или $P(2,0)$ соответствуют различные полные наборы коммутирующих операторов, состоящие из инвариантов группы и соответствующей цепочки подгрупп. При этом на гиперболоиде возникают различные системы координат с разделением переменных в операторе Лапласа. Базис неприводимых представлений реализуется на собственных функциях этого оператора в соответствующей системе координат. Формулы разложения функции $f(u)$ на гиперболоиде $u^2 = 1$ по неприводимым представлениям получаются с помощью преобразования Шапиро [/4/] с гиперболоида на конус.

Лоренцево квантовое число σ связано с инвариантом Δ:

$$\Delta f = \sigma(\sigma + 2) f$$

и для унитарных представлений имеет место $\sigma = -1 + ip$ (p вещественно [/4/]). Полученные формулы реализуют разложение только по серии наиболее вырожденных представлений типа $(p, m=0)$ (m связано с собственным значением второго инварианта $L(3,1)$), и они применимы лишь к волновым функциям

или амплитудам рассеяния бесспиновых частиц.

Следующая задача – построить базис для всей основной серии унитарных представлений $L(3,1)$ в пространстве собственных функций оператора Лапласа. Решению этой задачи посвящена остальная часть главы 1.

В §2 построены релятивистские шаровые функции со спином, являющиеся обобщением шаровых функций со спином Берестецкого [/5/] и реализующие неприводимые унитарные представления (m, p) группы Лоренца из основной серии

$$\Delta f = \left[\left(\frac{m}{2} \right)^2 - p^2 - 1 \right] f \tag{2}$$

$$\Delta' f = impf, \tag{3}$$

где Δ и Δ' – операторы Казимира

$$\Delta = L_i^2 - K_i^2, \quad \Delta' = 2i L_i K_i, \tag{4}$$

m – целое и p – вещественно, L_i и K_i – генераторы трехмерных и гиперболических вращений соответственно. Используется сферическая система координат. Базисные функции определены на прямом произведении двух пространств – гиперболоида и сферы, и получаются выделением унитарных представлений основной серии из прямого произведения бесконечномерного неунитарного представления $f^{\ell_i}_{m_\ell}(a, \theta, \phi)$ типа $(0, p_0)$ на гиперболоиде и конечномерного представления $\phi^s_\mu(\alpha)$ типа $(s, 0)$ на сфере с помощью релятивистского аналога $B^s_i(j, m, p)$ коэффициентов Клебша:

$$\langle a, \theta, \phi | p \tfrac{m}{2} jM \rangle = \sum_{i=1}^{2s+1} \sum_{\mu=-s}^{s} B^s_i(j,m,p)(\ell_i sjM | \ell_i s m_\ell \mu) f^{\ell_i}_{m_\ell}(a, \theta, \phi)\, \phi^s_m,$$

где

$$-s \le \frac{m}{2} \le s$$

$$p_0 = p + i\,\frac{m}{2}\,. \qquad (5)$$

Коэффициенты $B_l^s(j, m, p)$ последовательно определяются из полученного рекуррентного соотношения. Базисные функции есть собственные функции оператора Лапласа на гиперболоиде $\Delta_- = \Delta - \Delta'$

$$\Delta_- \langle a,\theta,\phi \,|\, p\,\frac{m}{2}\, jM \rangle = [\,(\frac{m}{2} - ip)^2 - 1\,] \langle a,\theta,\phi \,|\, p\,\frac{m}{2}\, jM \rangle\,. \qquad (6)$$

Базис $\Psi^{j(p)}_{M(\frac{m}{2})}(a,\theta,\phi)$ унитарных представлений полной группы Лоренца (с отражениями) строится как биспинор

$$\Psi^{j(p)}_{M(\frac{m}{2})}(a,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \Phi \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a,\theta,\phi \,|\, p\,\frac{m}{2}\, jM \rangle \\ (-1)^{j+s+m} \langle a,\pi-\theta,\pi+\phi \,|\, p(-\frac{m}{2}) jM \rangle \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

В §3 установлено, что базисные функции $\Psi^{j(p)}_{M(\frac{m}{2})}(a,\theta,\phi)$ являются решениями волновых уравнений для свободных полей с определенной массой κ и спином s в $2(2s+1)$ – компонентном формализме Вайнберга [6]

$$[\,i^{2s}\gamma^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}}\, p_{\mu_1} p_{\mu_2} \ldots p_{\mu_{2s}} + \kappa^{2s}\,]\,\Psi^{j(p)}_{M(\frac{m}{2})}(a,\theta,\phi) = 0\,, \qquad (8)$$

где $\gamma^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}}$ – обобщенные γ-матрицы Дирака. Этот результат связан с тем, что выбранная реализация неприводимых представлений $L(3,1)$ позволяет расширить их до неприводимых представлений группы Пуанкаре $P(3,1)$ в пространстве Минковского с редукцией

$$P(3,1) \supset L(3,1) \supset L(3,0) \supset L(2,0)\,.$$

Главы II и III посвящены возможным релятивистским обобщениям анализа амплитуд двухчастичных реакций по парциальным волнам в связи с поисками параметризаций, удобных в различных областях изменения энергий и углов рассеяния. Математической основой метода является гармонический анализ амплитуд, представленных как функции на группах, которые естественно возникают при описании кинематики рассматриваемых процессов.

Рядом авторов [7,8] рассматривались симметрии амплитуды рассеяния при фиксированном переданном импульсе Q, которым отвечает инвариантность относительно преобразований из малой группы 4-вектора Q, причем $Q^2 > 0$ соответствует группа вращений $L(3,0)$, $Q^2 < 0$ – трехмерная группа Лоренца $L(2,1)$ $Q^2 = 0$ $(Q \ne (0,0,0,0))$ – двумерная группа Евклида $P(2,0)$ и $Q = (0,0,0,0)$ – группа Лоренца $L(3,1)$ [x]. Разложение амплитуды по неприводимым представлениям этих групп приводит при $Q^2 > 0$ к ряду по парциальным волнам, при $Q^2 < 0$ – к интегральному представлению Зоммерфельда-Ватсона в теории Редже [9], при $Q^2 = 0$ – к представлению Глаубера по прицельному параметру в приближении эйконала [10] и при $Q = (0,0,0,0)$ – к разложению Толлера для амплитуды упругого рассеяния вперед по представлениям группы Лоренца.

Весьма интересно получить во всей физической области единое представление амплитуды с универсальной параметризацией, обеспечивающее простую связь с разложениями на различных группах симметрии. Желательно также иметь простые формулы преобразования между такими разложениями и простую связь различных параметризаций с универсальной.

Этим требованиям удовлетворяет предложенное в диссертации разложение амплитуды рассеяния по неприводимым представлениям группы Лоренца $L(3,1)$, связанное с воз-

---

x) Для единства обозначений мы отошли от более распространенных символов $O(3)$, $O(2,1)$, $E(2)$ и $O(3,1)$ соответственно.

можностью отобразить физические области в мандельстамовской плоскости на гиперболоид и представить амплитуду как функцию на этом гиперболоиде. В качестве универсальных параметров выступают лоренцевы квантовые числа p и m. Связь с различными группами симметрии амплитуды $L(3,0)$, $L(2,1)$ и $P(2,0)$ устанавливается выбором базиса с редукцией $L(3,1)\supset L(3,0)$, $L(3,1)\supset L(2,1)$ или $L(3,1)\supset P(2,0)$ соответственно. Различные базисы связаны между собой преобразованиями комплексной группы Лоренца.

Таким образом, мы получаем возможность параметризовать резонансы в s-канале через траектории Редже и реджевские вычеты в том же канале и, наоборот, делать заключения о траекториях Редже и вычетах из данных при низких энергиях ("Дуальность Хорна-Шмида /11/). Можно также связывать свойства амплитуды в представлении прицельного параметра с аналитическими свойствами парциальных амплитуд в комплексной ℓ-плоскости, исследовать свойства дочерних полюсов Редже и т.п. Результаты, полученные в главах II и III диссертации, представляют только первый шаг в этой программе.

В главе II подробно рассмотрены релятивистские разложения амплитуд двухчастичных реакций $1+2\to 3+4$ бесспиновых частиц с неравными массами.

В §1 рассматриваются двумерные разложения амплитуд по неприводимым представлениям группы Лоренца для произвольных физических значений кинематических переменных s, t, u и обсуждается их связь с релятивистским фазовым анализом на различных малых группах группы Пуанкаре. В качестве параметров выбраны компоненты 4-скорости $u_\mu = \frac{p_\mu}{m}$ одной из частиц в некоторой системе отсчета, и амплитуда рассматривается как функция, определенная на верхней полости гиперболоида $u^2 = 1$ x/. Обсуждается физический смысл преобразований группы движений $L(3,1)$ гиперболоида $u^2 = 1$.

x) Плоскость реакции соответствует сечению этого гиперболоида азимутальной плоскостью $\phi = 0$.

В §2 рассмотрены различные системы координат на гиперболоиде – сферическая (s), гиперболическая (H) и орисферическая (0). Амплитуда разлагается по собственным функциям оператора Лапласа на гиперболоиде в этих системах координат, реализующим базис неприводимых представлений группы Лоренца $(p,0)$ с редукцией $L(3,1)\supset L(3,0)\supset L(2,0)$, $L(3,1)\supset L(2,1)\supset L(2,0)$ и $L(3,1)\supset P(2,0)\supset L(2,0)$ соответственно.

Коэффициенты этих разложений получили название Лоренц-амплитуд. Связь компонент параметризующей 4-скорости u_μ с инвариантными переменными фиксируется выбором лоренцевой системы отсчета, в которой один из 4-векторов

$$u_s = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{s}}, \quad u_t = \frac{p_4 - p_2}{\sqrt{-t}}, \qquad K = m_2 [u_4 e^{-A(t)} - u_2]$$

имеет стандартный вид: $u_s = (1,0,0,0)$ – система центра масс, $u_t = (0,0,0,1)$ – система Брейта, $K = (\omega, 0, 0, \omega)$ – новая стандартная система отсчета. Вследствие этого, базис представлений строится редукцией группы Лоренца к малым группам векторов u_s, u_t или K, являющимся группами симметрии амплитуды при $s > 0$, $t < 0$ или $t = 0$ соответственно. Полученные разложения дают интегральные представления для коэффициентов разложения по группам симметрии, определяющих их связь с лоренц-амплитудами. Рассмотрены свойства разложений относительно кроссинга, который эквивалентен преобразованию из комплексной группы Лоренца.

В §3 изучаются свойства релятивистских разложений в гиперболической системе координат с редукцией $L(3,1)\supset L(2,1)\supset L(2,0)$, где с представлениями трехмерной группы Лоренца $L(2,1)$ связан реджевский комплексный момент $l = \gamma + iq$. Для реджезованной парциальной амплитуды получаем следующее интегральное представление

$$a(\ell,t) = -\frac{i\cos\pi\ell}{8\pi\sqrt{2}} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} (\sigma+1)\,d\sigma\, \frac{\Gamma(\sigma-\ell+1)\Gamma(\sigma+\ell+2)}{\Gamma(\sigma+1)} \frac{1}{\mathrm{ch}\,a} \times$$

$$\times [A^{+}(\sigma,\ell)\,\phi_{\ell}^{+\sigma}(a) + A^{-}(\sigma,\ell)\,\phi_{\ell}^{-\sigma}(a), \tag{9}$$

где

$$\phi_{\ell}^{\pm\sigma}(a) = P_{\ell}^{-\sigma-1}(-\mathrm{th}\,a) \pm P_{\ell}^{-\sigma-1}(\mathrm{th}\,a) \tag{10}$$

и $\sigma=\delta+ip$ – лоренцев момент, связанный с неунитарными представлениями.

При больших передачах импульса $t\to-\infty$ получена следующая оценка:

$$|a(\ell,t)|_{t\to-\infty} < (-t)^{-\frac{1+|\mathrm{Re}\,\sigma+1|}{2}} \tag{11}$$

Показано, что положение сингулярностей $a(\ell,t)$ в комплексной ℓ – плоскости, генерируемых сингулярностями лоренц – амплитуд $A^{\pm}(\sigma,\ell)$, при конечных σ не зависит от t. В частности, Лоренц-полюса при конечных σ приводят к фиксированным полюсам в ℓ -плоскости.

Выяснен механизм возникновения движущихся особенностей $a(\ell,t)$ за счет особенностей $A^{\pm}(\sigma,\ell)$ в σ -плоскости при $|\sigma|\to+\infty$ В частности, к простым полюсам Редже приводит лоренц-асимптотика вида

$$A^{+}(\sigma,\ell) \pm A^{-}(\sigma,\ell) \to \frac{e^{ip f_{\pm}(\ell)}}{p}, \tag{12}$$

и уравнение траектории Редже имеет вид

$$f_{\pm}(\ell) \pm a = 0. \tag{13}$$

В §4 в качестве решаемой модели рассмотрено нерелятивистское рассеяние заряженной частицы в кулоновском поле. Вычислен ведущий член в лоренц-асимптотике $A^{\pm}(\sigma,\ell)$ при $|\mathrm{Im}\,\sigma| \equiv |p| \to \infty$. Показано, что знание ведущего члена в лоренц-асимптотике приводит к правильным уравнениям семейства траекторий Редже для кулоновского потенциала в форме $a=\pm a_n(\ell)$ и к правильным значениям реджевских вычетов.

В §5 развитые здесь методы применяются к исследованию проблемы дочерних полюсов Редже, обсуждаемых рядом автором /12,13/ в связи с $L(3,1)$ – симметрией амплитуд упругого рассеяния вперед, когда $m_1=m_3$, $m_2=m_4$ и 4-мерный передаваемый импульс – нулевой вектор

$$Q = p_1-p_3 = p_4-p_2 = (\ ,0,0,0,0). \tag{15}$$

Кратко приведена теоретико-групповая аргументация, приводящая к дочерним полюсам в комплексной ℓ -плоскости. В рамках одномерных разложений по малым группам нет способа определить, являются ли эти дочерние полюса фиксированными или точками пересечения траекторий Редже с осью $t=0$. Проведено аналогичное исследование в рамках двумерных $L(3,1)$ разложений, которое показало, что семейства дочерних полюсов $\ell_{k,n}$ в комплексной ℓ -плоскости

$$\ell_{k,n} = -\sigma_k - 2n - 2 \tag{16}$$

генерируются лоренц-полюсами σ_k нормировочных Γ -функций и являются семействами фиксированных полюсов.

В главе III дан подробный анализ кинематики "4-хвостки" в пространстве скоростей для неравных масс, рассмотрена проблема кинематических сингулярностей и кинематических условий. Далее предложена параметризация амплитуды без кинематических полюсов в физической области.

В §1 построен в пространстве релятивистских скоростей ортогональный репер, с которым связана система отсчета. Репер состоит из четырех взаимно-ортогональных и нормированных 4-векторов I, II, III, IV: $I^2=1; II^2=III^2=IV^2=-1$. Вектор $IV_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (u_1)^\beta (u_3)^\gamma (u_4)^\delta$ ортогонален любой скорости и нормален к плоскости реакции. Здесь Φ -объем параллелепипеда, построенного на скоростях u_1, u_3, u_4 в пространстве Лобачевского:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & (u_1u_3) & (u_1u_4) \\ (u_3u_1) & 1 & (u_3u_4) \\ (u_4u_1) & (u_4u_3) & 1 \end{vmatrix} \tag{17}$$

Условие вещественности векторов репера определяет физические области в мандельстамовской плоскости инвариантных переменных s,t,u. Граница $\Phi(s,t,u)=0$ представляет собой кривую 3 порядка, ограничивающую физические области каналов рассеяния и канала распада /14/.

Показано, что для коллинеарных процессов, т.е. при $\Phi=0$ в любом канале, возникает естественное обобщение толлеровской 4-мерной симметрии для неравных масс, если рассматривать амплитуду при фиксированном векторе R :

$$R=[(u_3\cdot u_1)-(u_3\cdot u_4)(u_4\cdot u_1)]\,u_3+[(u_4\cdot u_1)-(u_4\cdot u_3)(u_3\cdot u_1)]\,u_4 + \tag{18}$$

$$+[(u_3\cdot u_4)^2-1]\,u_1 \,.$$

Это связано с тем, что при $\Phi=0$ всегда $R=(0,0,0,0)$ и малая группа R есть группа Лоренца. Доказано, что выражения для векторов репера несингулярны в физической области.

В §2 рассматривается проблема кинематических сингулярностей и кинематических условий для амплитуд рассеяния бесспиновых частиц с неравными массами.

Показано, что с параметризацией амплитуды в системе центра масс связано сингулярное в физической области отображение мандельстамовской плоскости на гиперболоид. Сингулярность отображения приводит к особенностям базиса разложения и к появлению зависимостей между коэффициентами, т.е. кинематических условий. С помощью разложения по представлениям группы Лоренца в H-системе продемонстрировано, как сингулярность параметризации при $s=0$ индуцирует кинематические особенности реджезованных парциальных амплитуд $a(\ell,s)$:

$$a(\ell,s) \underset{s\to 0}{\approx} \left[\frac{(m_3^2-m_4^2)^2}{m_3^2\,|s|}\right]^{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\sigma} \frac{1}{\ln|s|}\,, \tag{19}$$

где σ - лоренцево квантовое число, что согласуется с результатами Фридмана и Вонга /15/.

В §3 предложена параметризация амплитуды без кинематических полюсов во всей физической области. Для переменных x_0, x_1, x_2, определяющих положение точки на гиперболоиде x/

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2=1\,,$$

предложены следующие выражения

$$x_0^2=\frac{[(u_3+u_4)\cdot u_1]^2}{2[(u_3u_4)+1]}\,,\quad x_1^2=\frac{\Phi}{[(u_3u_4)^2-1]}\,,\quad x_2^2=\frac{[(u_3-u_4)\cdot u_1]^2}{2[(u_3u_4)-1]} \tag{20}$$

Показано, что "временная" и "пространственная" переменные x_0 и x_2 при кроссинге меняются ролями. Доказано, что нули знаменателей всегда совпадают с нулями числителей в физической области, и формулы отображения (20) здесь несингулярны. Подробно исследован ход линий в плоскости Мандельстама, соответствующих координатной сетке на гиперболоидах. Выбору (20) отображения соответствует параметризация амплитуды 4-скоростью u_1 в "системе равных скоростей". При $m_3=m_4$ система равных скоростей (с.р.с.) и система центра

x/Это сечение гиперболоида $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$ азимутальной плоскостью $\phi=0$.

масс (с.ц.м.) (и соответствующие параметризации амплитуды) совпадают, и с.р.с. есть несингулярное обобщение с.ц.м. для неравных масс. Получена матрица преобразования Лоренца $\Lambda^{(0z)}(a)$ от с.р.с. к с.ц.м., где

$$\operatorname{sh} a = (m_3 - m_4)\sqrt{\frac{(p_3 \cdot p_4) - m_3 m_4}{2 m_3 m_4 (p_3 + p_4)^2}} \, . \qquad (21)$$

Выяснен вид несингулярного разложения в с.р.с. в H-системе после преобразования к с.ц.м.

Все кинематические полюса в плоскости Мандельстама и комплексного момента содержатся в D-функции преобразования.

В главе IV рассматриваются неприводимые представления "многомерных лоренц- и пуанкаре-групп" $L(m,n)$ и $P(m,n)$ в различных базисах, реализованных на собственных функциях многомерных операторов Лапласа.

В §1 кратко изложена постановка задачи. Неприводимые представления групп $L(m,n)$ и $P(m,n)$ плодотворно используются в динамических моделях элементарных частиц для классификации одночастичных состояний /16,17/. Поля рассматриваются как многоуровневые системы с определенными значениями массы и спина для каждого уровня. Состояниям системы сопоставляют базисные векторы неприводимых представлений или их суперпозиции. В связи с этим возникает проблема разложения волновых функций по различным базисам $L(m,n)$-и $P(m,n)$-групп.

В §2 рассмотрена реализация групп $L(m,n)$ и $P(m,n)$ как групп движений в многомерных вещественных пространствах R постоянной кривизны, в которых определено скалярное произведение

$$g^{ab} x_a y_b \equiv [x, y] = x_{-n+1} y_{-n+1} + \ldots\ldots + x_0 y_0 - x_1 y_1 - \ldots - x_m y_m \, . \qquad (23)$$

Перечислены их непрерывные подгруппы, обладающие инвариантами. Показано, что полный набор коммутирующих операторов, определяющих базис представления, состоит из инвариантов группы и ее подгрупп, образующих цепочку, на специальной диаграмме, а также сформулированы правила построения систем координат в пространстве R по этой диаграмме.

В §3 строятся серии наиболее вырожденных унитарных неприводимых представлений групп $L(m,n)$ и $P(m,n)$ в пространстве собственных функций дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами, который совпадает с единственным неисчезающим инвариантным оператором группы в пространстве R:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \, , \qquad (24)$$

где $g_{\alpha\beta}$ -метрический тензор в криволинейных координатах u^α, и $g = \det g_{\alpha\beta}$.

Предложен графический метод построения базисных функций, который каждому типу элементов диаграммы всегда сопоставляет одну и ту же функцию. Составлена таблица, в которую сведены функции для всех типов элементов.

Итак, каждой цепочке подгрупп на диаграмме однозначно соответствует система координат и собственная функция оператора Лапласа в этих координатах, являющаяся базисом неприводимого представления.

Формулы разложения волновых функций в пространстве R по базису неприводимых представлений $L(m,n)$ и $P(m,n)$-групп получены обобщением метода интегральных преобразований Виленкина-Смородинского /3/.

Диссертация включает три приложения.

В Приложении I приведены функции со спином для спина 1/2 и 1 и показано, что они являются решениями соответствующих уравнений Дирака и Вайнберга.

В Приложении II подробно рассмотрены геометрические свойства систем координат в пространстве релятивистских скоростей Лобачевского.

В Приложении III доказаны некоторые утверждения главы III.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /18-23/.

Литература

1. V.Bargman, E.P.Wigner. Proc.Mat.Acad.Sci.,USA, 34,211 (1948).
2. Ю.М. Широков. ЖЭТФ 33, 861 (1957).
3. Н.Я.Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ 46, 1793 (1964).
4. М.А.Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. Физматгиз Москва (1958).
5. В.Б. Берестецкий. ЖЭТФ 17, 12 (1947).
6. S.Weinberg. Phys.Rev., 133, B1318 (1964).
7. H.Joos, Lectures in Theoretical Physics, v.VIIA, Boulder, Colorado (1965).
8. M.Toller. Nuovo Cim., 37, 631 (1965) u 54, 295 (1968). G.Cosenza, A.Sciarrino, M.Toller.Nuovo Cim.,57A,253(1968).
9. J.F.Boyce, J.Math.Phys., 8, 675 (1967).
10. A.Salam, J.Strathdee. ICTP preprint IC/68/31 Trieste,1968.
11. R.Dolen, D.Horn, C.Schmid. Phys.Rev., 166 1768 (1968).
12. A.Sciarrino, M.Toller. J.Math.Phys., 8, 1252 (1967).
13. G.Domokos. Phys.Rev., 159, 1387 (1967). G.Domokos and P.Suranyi. Nuovo Cim., 57A, 813 (1968).
14. T.W.B.Kibble. Phys.Rev., 117, 1159 (1960).
15. D.Freedman. J.Wang.Phys.Rev., 153, 1596 (1967).
16. E.Majorana. Nuovo Cim., 9, 335 (1932).
17. A.O.Barut, D.Corrigan, H.Kleinert. Phys.Rev., 167, 1527 (1968). A.O.Barut, H.Kleinert. Phys.Rev., 157, 1180(1967). Y.Nambu. Progr.Theor.Phys., 37, 368 (1966). T.Takabayashi, Progr.Theor.Phys., 37, 765 (1967).

18. М.Б. Шефтель. ЯФ, 5, 1116 (1967). Препринт ОИЯИ Р-2785, Дубна, 1966.
19. М.А. Либерман, Я.А. Смородинский, М.Б.Шефтель, ЯФ, 7, 202 (1968).
20. M.Sheftel, J.Smorodinsky, P.Winternitz. Phys.Lett., 26B, 241 (1968).
21. П. Винтерницц, Я.А. Смородинский, М.Б. Шефтель, ЯФ 7, 1325 (1968).
22. П. Винтерницц, Я.А. Смородинский, М.Б. Шефтель, ЯФ, 8, 833 (1968).
23. M.Sheftel, J.Smorodinsky, B.Usatov. Preprint E2-4393, Dubna (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1969 года.