

4380

Экз. чит. зал

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2 - 4380



В.К.Сусленко

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

К КИНЕМАТИКЕ РЕАКЦИЙ
С ТРЕМЯ ЧАСТИЦАМИ
В КОНЕЧНОМ КАНАЛЕ

1969

2 - 4380

В.К.Сусленко

К КИНЕМАТИКЕ РЕАКЦИЙ
С ТРЕМЯ ЧАСТИЦАМИ
В КОНЕЧНОМ КАНАЛЕ

Abstract

The kinematical relations for reactions with three particles in the final state are considered and the results relating to the lightest particle are obtained getting as an example the reaction $N+N \rightarrow N+N+\pi$. The expressions (1.6) and (1.5) give a solution of the energy and momentum conservation laws in a special case of an extremum (max and min) kinetic energy of the lightest particle denoted as q in Fig.1.

Taking into account a realness condition restriction given by the expression (1.8), one obtains the formula (1.12) for the threshold kinetic energy $T_{\text{thresh}}(\theta_\pi^L)$ for any angle of emission θ_π^L of particle q (a pion). The expression (1.16) gives the value of the maximum permissible angle of emission $\theta_{\pi \text{max}}^L$ at a given value of the incident kinetic energy T in the region

$$\frac{\mu(4m+\mu)}{2m} = T_{\text{thresh}}(0^\circ) \leq T \leq T_{\text{thresh}}(90^\circ) = \frac{\mu(4m-\mu)}{2(m-\mu)}.$$

The value of the energy $T = T_{\text{thresh}}(90^\circ)$ is of importance because it divides a whole region of kinetic energies of the incident particle p_1 into two different regions, in the first of them there exists the limiting angle $\theta_{\pi \text{max}}^L(T)$, and in the second one all physical angles are permitted.

The results may be summarized as follows.

- i) At values of kinetic energies in the region $T_{\text{thr}}(0^\circ) \leq T < T_{\text{thr}}(90^\circ)$ for the pions produced in the reaction $N+N \rightarrow N+N+\pi$ there exists a restriction on the values of the angles $\theta_{\pi \text{max}}^L$ given by the expression (1.16) and the permitted region of these angles is given by (1.17). In this case the kinetic energies of a spectrum of pions, produced at the angle θ_π^L and at the incident kinetic energy T , are enclosed in the region

$$r^{(-)}(\theta_\pi^L, T) \leq T_\pi^L(\theta_\pi^L, T) \leq r^{(+)}(\theta_\pi^L, T),$$

where the expression for $r^{(+)}(\theta_\pi^L, T)$ is given by (1.6) with (1.5). It is important that in this region a minimum kinetic energy of pion spectrum is not equal to zero, everywhere being given by expression for $r^{(-)}(\theta_\pi^L, T)$. The value $T_\pi^L = 0$ becomes possible at the values $T \geq T_{\text{thresh}}(90^\circ) = \frac{\mu(4m-\mu)}{2(m-\mu)}$.

- ii) At values $T \geq T_{\text{thresh}}(90^\circ)$ there is no restriction relating to the values of angles and their whole physical region is permitted. In this case the pion kinetic energies are enclosed in the region $0 \leq T_\pi^L(\theta_\pi^L, T) < r^{(+)}(\theta_\pi^L, T) = T_{\pi \text{max}}^L(\theta_\pi^L, T)$,

where the values of maximum kinetic energies $T_{\pi \text{max}}^L(\theta_\pi^L, T)$ are given by the formulae (1.7.1)-(1.5).

- iii) The $(-)$ solution $r^{(-)}(\theta_\pi^L, T)$ in (1.5), (1.6) and (3.3) cannot be ignored because in the region $T_{\text{thresh}}(0^\circ) \leq T < T_{\text{thr}}(90^\circ)$ it gives the values of the minimum kinetic energies $T_{\pi \text{min}}^L(\theta_\pi^L, T)$. Further, there exists a continuous transition of the curves $r^{(-)}(\theta_\pi^L, T)$ from the region $T_{\text{thr}}(0^\circ) \leq T < T_{\text{thr}}(90^\circ)$ to the region $T \geq T_{\text{thresh}}(90^\circ)$, at point $T = T_{\text{thresh}}(90^\circ)$ all they passing through it and reaching the value $T_{\pi \text{min}}^L(90^\circ, T_{\text{thr}}(90^\circ)) = 0$. In the region $T > T_{\text{thresh}}(90^\circ)$ these curves cannot be treated as those in preceding region and they are to be attributed to the $(+)$ solution for the supplementary angle to the angle $\theta_\pi^L \leq \frac{\pi}{2}$, i.e. $r^{(-)}(\theta_\pi^L, T) = r^{(+)}(\pi - \theta_\pi^L, T)$.

These results of Section 1 are qualitatively shown in Fig.3. In Section 2 a geometrical interpretation of these results was made and their rough illustrations are given in Fig.2, for what it was sufficient to consider the velocity $v_{i \text{max}}^B$ ($i=1,2,3$) in the three particle case as an analog of the velocity v_j^B ($j=1,2$) in two particle case.

Finally, one has to bear in mind that the above mentioned results are of general meaning for different three particle final state reactions, and as such an example the formulae in the case of the reaction $\pi + N \rightarrow N + \pi + \pi$ are also given in Section 3.

Рассмотрим реакцию $N + N \rightarrow N + N + \pi$ (рис. 1), для которой приняты обозначения $p_1, p_2 (q_1, q_2)$ - нуклоны и соответствующие им 4-векторы в начальном (конечном) состоянии, q - образовавшийся пион и соответствующий ему 4-вектор; m - масса нуклона, μ - масса пиона. Нас будут интересовать кинематические характеристики конечных частиц, а именно: спектры кинетических энергий и их границы и возможный интервал углов вылета в лабораторной системе отсчета в зависимости от величины начальной кинетической энергии T налетающего нуклона p_1 . Для нуклонов этот вопрос рассматривался в работе ^{1/}. Целью настоящей работы является исследование кинематики пионов, образующихся в реакции $N + N \rightarrow N + N + \pi$.

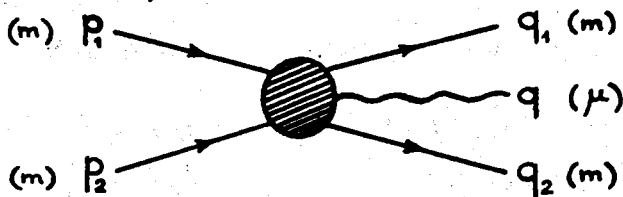


Рис.1. Реакция с тремя частицами в конечном канале.

1. Формулы экстремальных энергий спектра $r^{(2)}(\Theta_{\pi}^L, T)$, пороговых энергий $T_{\text{пор}}(\Theta_{\pi}^L)$ и граничного угла вылета $\Theta_{\pi \text{ max}}^L$ для пионов, образующихся в реакции



Условием для определения экстремальных полных энергий спектра пионов в лабораторной системе отсчета ($\vec{p}_2^L = 0$, L - система) q_0^L экс для реакции



является минимальное значение инварианта $z^2 = (q_1 + q_2)^2$, легко определяемое в системе центра масс двух конечных нуклонов $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$ (D - система)

$$z_{\text{min}}^2 = R_{\text{огр}}^2 - R_{\text{гр}}^2 = (m + m)^2 = 4m^2, \quad (1.1)$$

где

$$R_{\text{огр}} = p_{10}^L + m - q_0^L \text{ экс}, \quad (1.2)$$

$$R_{\text{гр}}^2 = p_1^{L2} + q_{\text{экс}}^{L2} - 2p_1^L q_{\text{экс}}^L \cos \Theta_{\pi}^L. \quad (1.3)$$

Подставив (1.2) и (1.3) в (1.1), получим квадратное уравнение для q_0^L экс

$$\begin{aligned} & [(2m+T)^2 - p_1^{L2} \cos^2 \Theta_{\pi}^L] q_{\text{экс}}^{L2} - (2m+T)(2mT + \mu^2) q_{\text{экс}}^L + \\ & + \left[\frac{1}{4}(2mT + \mu^2)^2 + \mu^2 p_1^{L2} \cos^2 \Theta_{\pi}^L \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

решением которого является

$$q_0^{L(\pm)}(\Theta_\pi^L, T) = \frac{1}{2[(2m+T) - p_1^{L2} \cos^2 \Theta_\pi^L]} [(2m+T)(2mT + \mu^2) + \dots] \quad (1.5)$$

$$p_1^L \cos \Theta_\pi^L \sqrt{(2mT + \mu^2)^2 - 4\mu^2[(2m+T)^2 - p_1^{L2} \cos^2 \Theta_\pi^L]} ,$$

где $p_1^L = \sqrt{T(T+2m)}$. Из (1.5) экстремальные кинетические энергии пионов определяются выражением

$$r^{(\pm)}(\Theta_\pi^L, T) = q_0^{L(\pm)}(\Theta_\pi^L, T) - \mu , \quad (1.6)$$

где решение со знаком (+) в (1.6) при любых величинах T определяет максимальную границу спектра кинетических энергий пионов, т.е.

$$r^{(+)}(\Theta_\pi^L, T) = T_{\pi \max}^L(\Theta_\pi^L, T). \quad (1.7.1)$$

Для (-) решения возможны следующие интерпретации:

а) если существует предельный угол вылета пионов $\Theta_{\pi \max}^L < \frac{\pi}{2}$,

то (-) решение определяет минимальные допустимые кинетические энергии спектров пионов, т.е.

$$r^{(-)}(\Theta_\pi^L, T) = T_{\pi \min}^L(\Theta_\pi^L, T); \quad (1.7.2)$$

б) если допустимы все углы $0 \leq \Theta_\pi^L \leq \pi$, то (-) решение эквивалентно (+) решению для дополнительного угла, а именно:

$$r^{(-)}(\Theta_\pi^L, T) = r^{(+)}(\pi - \Theta_\pi^L, T) = T_{\pi \max}^L(\pi - \Theta_\pi^L, T). \quad (1.7.3)$$

Более детально роль и смысл решения со знаком (-) в (1.6) могут быть установлены на основе анализа, в результате которого необходимо определить интервалы величин T , к которым относятся указанные выше возможности.

Начнем с рассмотрения условия вещественности величины $q_{0\text{экс}}^{L(\pm)}(\Theta_{\pi}^L, T)$, накладывающего ограничение

$$(2mT + \mu^2)^2 - 4\mu^2 [(2m+T)^2 - p_1^{L2} \cos^2 \Theta_{\pi}^L] \geq 0, \quad (1.8)$$

из которого следует, что равенство нулю левой части (1.8) в свою очередь, является условием для величины пороговой начальной энергии T пор в зависимости от угла вылета Θ_{π}^L , явное выражение для которой имеет вид

$$T_{\text{пор}}^{(\pm)}(\Theta_{\pi}^L) = \frac{\mu}{2[m^2 - \mu^2(1 - \cos^2 \Theta_{\pi}^L)]} \{ \mu m (3 - 2 \cos^2 \Theta_{\pi}^L) \pm \sqrt{(4m^2 - \mu^2)^2 + \mu^2 \cos^2 \Theta_{\pi}^L [(4m^2 - \mu^2) + 4m^2 \cos^2 \Theta_{\pi}^L]} \}. \quad (1.9)$$

Из выражения (1.8) легко получить, разлагая его на множители, величины пороговых энергий $T_{\text{пор}}^{(0^\circ)}$ и $T_{\text{пор}}^{(90^\circ)}$ при $\Theta_{\pi}^L = 0^\circ$ и $\Theta_{\pi}^L = 90^\circ$, соответственно.

$$T_{\text{пор}}^{(0^\circ)} = \frac{\mu(4m + \mu)}{2m} \cong 290 \text{ МэВ}, \quad (1.10)$$

$$T_{\text{пор}}^{(90^\circ)} = \frac{\mu(4m - \mu)}{2(m - \mu)} \cong 316 \text{ МэВ}. \quad (1.11)$$

Заметим, что выражение (1.10) получается также из условия минимума квадрата полной энергии системы $W^2 = (p_1 + p_2)^2$, необходимой для начала протекания реакции (1.0),

$$W_{\text{min}}^2 = 2m(2m + T_{\text{пор}}) = (m + m + \mu)^2. \quad (1.10.1)$$

Величина $T_{\text{пор}}$, определенная из (1.10.1), как и следовало ожидать, совпадает с величиной $T_{\text{пор}}^{(0^\circ)}$, определенной из (1.8).

Подставив последовательно (1.10) и (1.11) в (1.9), устанавливаем, что в формуле (1.9) перед корневым выражением необходим только знак (+), т.е.

$$T_{\text{пор}}(\Theta_{\pi}^L) = T_{\text{пор}}^{(+)}(\Theta_{\pi}^L) =$$

$$= \frac{\mu}{2[m^2 - \mu^2(1 - \cos^2 \Theta_{\pi}^L)]} \left\{ \mu m(3 - 2\cos^2 \Theta_{\pi}^L) + \sqrt{(4m^2 - \mu^2)^2 + \mu^2 \cos^2 \Theta_{\pi}^L [(4m^2 - \mu^2) + 4m^2 \cos^2 \Theta_{\pi}^L]} \right\} \quad (1.12)$$

Относительно выражения (1.12) следует отметить, что

- а) подкоренное выражение всегда > 0 ,
 б) при $\Theta_{\pi}^L = 0^\circ$ и $\Theta_{\pi}^L = 90^\circ$ оно приводит в (1.10) и (1.11), соответственно;

в) вследствие квадратичной зависимости от $\cos \Theta_{\pi}^L$ не удается получить сведений о величинах пороговых энергий в интервале углов $90^\circ < \Theta_{\pi}^L \leq 180^\circ$. Для выяснения вопроса о величинах пороговых энергий в интервале углов $90^\circ < \Theta_{\pi}^L \leq 180^\circ$, обратимся к величинам, которые получаются из (1.5) и (1.6) для этого интервала, вычислив их при $T = T_{\text{пор}}(90^\circ) = T^*$. В результате вычислений получаем

$$q_{\text{max}}^{L(+)}(90^\circ \leq \Theta_{\pi}^L \leq 180^\circ) \Big|_{T=T^*} =$$

$$= \frac{(2mT^* + \mu^2)(2m + T^*) - 2\mu T^*(2m + T^*) \cos^2 \Theta_{\pi}^L}{2[(2m + T^*)^2 - T^*(2m + T^*) \cos^2 \Theta_{\pi}^L]} \quad (1.13)$$

$$= \mu \frac{\left(\frac{2mT^* + \mu^2}{2\mu} - T^* \cos^2 \Theta_{\pi}^L \right)}{[(2m + T^*) - T^* \cos^2 \Theta_{\pi}^L]} = \mu.$$

так как $2mT^* + \mu^2 = 2\mu(2m + T^*)$. Выражение (1.13) означает, что пороговой энергией для всех углов $\Theta_{\pi}^L \geq 90^\circ$ является величина $T_{\text{пор}}(90^\circ)$. Она же представляет величину начальной энергии, больше которой становятся возможны все углы в интервале $0^\circ \leq \Theta_{\pi}^L \leq 180^\circ$.

Далее, легко видеть, что

$$T_{\text{пор}}(90^\circ) - T_{\text{пор}}(0^\circ) = \frac{\mu(4m - \mu)}{2(m - \mu)} - \frac{\mu(4m + \mu)}{2m} = \frac{\mu^2(2m + \mu)}{2m(m - \mu)} > 0 \quad (1.14)$$

и что для величин начальных энергий в интервале

$$\frac{\mu(4m + \mu)}{2m} = T_{\text{пор}}(0^\circ) \leq T < T_{\text{пор}}(90^\circ) = \frac{\mu(4m - \mu)}{2(m - \mu)} \quad (1.15)$$

существует ограничение допустимого угла $\Theta_{\pi \text{ max}}^L$, налагаемое условием (1.8) вещественности величины (1.6), а именно:

$$\cos \Theta_{\pi \text{ max}}^L(T) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2(Zm + T)^2 - (2mT + \mu^2)^2}{T(T + 2m)}} \quad (1.16)$$

причем возможные величины углов Θ_{π}^L лежат в интервале, определяемом из соотношения

$$\cos \Theta_{\pi \text{ max}}^L(T) \leq \cos \Theta_{\pi}^L \leq +1. \quad (1.17)$$

Величины кинетических максимальных энергий спектра пионов определяются при этом формулой (1.7.1), а спектр энергий лежит в интервале

$$r^{(-)}(\Theta_{\pi}^L, T) \leq T_{\pi \text{ max}}^L(\Theta_{\pi}^L, T) \leq r^{(+)}(\Theta_{\pi}^L, T). \quad (1.18)$$

В частности, интересно отметить, что при минимальной пороговой началь-

ной энергии $(T_{\text{пор}})_{\text{min}} = T_{\text{пор}}(0^\circ) = \frac{\mu(4m + \mu)}{2m}$, для которой

$$\cos \Theta_{\pi \text{ max}}^L(T_{\text{пор}}(0^\circ)) = +1, \quad \Theta_{\pi \text{ max}}^L(T_{\text{пор}}(0^\circ)) = 0^\circ,$$

энергетический спектр пионов является монохроматическим с кинетической энергией

$$T_{\pi}^L(0^\circ, T_{\text{пор}}(0^\circ)) = q_{0 \text{ max}}^L(0^\circ, T_{\text{пор}}(0^\circ)) - \mu = \frac{\mu^2}{2m} \approx 10,5 \text{ МэВ}, \quad (1.19)$$

где

$$q_{0 \text{ max}}^L(0^\circ, T_{\text{пор}}(0^\circ)) = \frac{2m T_{\text{пор}}(0^\circ) + \mu^2}{4m} = \mu + \frac{\mu^2}{2m}. \quad (1.20)$$

Очевидно, что для любого угла в интервале $0 \leq \Theta_{\pi}^L \leq \pi/2$ (а следовательно, для любой энергии T в интервале (1.15), имеется кинетическая энергия пиона $T_{\pi_{\text{ГР}}}^L = T_{\pi_{\text{ГР}}}^L(\Theta_{\pi}^L)$, выражение для которой получается при подстановке (1.18) в (1.6)

$$T_{\pi_{\text{ГР}}}^L(T \geq T^*) = r^{(\pm)}(\Theta_{\pi_{\text{ГР}}}^L) = 2\mu^2 \frac{(2m + T)}{(2mT + \mu^2)} - \mu. \quad (1.21)$$

Для энергий $T \geq T_{\text{пор}}(90^\circ)$ кривая (1.21) переходит в кривую максимальной кинетической энергии пионов, вылетающих под углом $\Theta_{\pi}^L = 90^\circ$,

$T_{\pi_{\text{max}}}^L(\Theta_{\pi}^L = 90^\circ, T)$, определяемую выражением

$$\begin{aligned} T_{\pi_{\text{max}}}^L(\Theta_{\pi}^L = 90^\circ, T \geq T^*) &= r^{(\pm)}(\Theta_{\pi}^L = 90^\circ, T \geq T^*) = \\ &= \frac{2mT + \mu^2}{2(2m + T)} - \mu. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Учитывая (1.13), легко убедиться, что при $T \geq T_{\text{пор}}(90^\circ)$, минимальная кинетическая энергия пиона $T_{\pi_{\text{min}}}^L(T \geq T^*)$ обращается в нуль, т.е.

$$T_{\pi_{\text{min}}}^L(T \geq T^*, 0 \leq \Theta_{\pi}^L \leq \pi) = r^{(-)}(\Theta_{\pi}^L = 90^\circ, T = T^*) = 0. \quad (1.23)$$

Кратко сформулируем полученные выше результаты.

1) При начальных кинетических энергиях в интервале $T_{\text{пор}}(0^\circ) \leq T < T_{\text{пор}}(90^\circ)$ для пионов, образующихся в реакции $N + N \rightarrow N + N + \pi$, существует ограничение на величины углов вылета Θ_{π}^L , определяемое выражением (1.16), а возможный интервал углов вылета при данном T дается выражением (1.17). В этом случае кинетические энергии спектра пионов, вылетающих под углом Θ_{π}^L , заключены в интервале

$$r^{(-)}(\Theta_{\pi}^L, T) \leq T_{\pi}^L(\Theta_{\pi}^L, T) \leq r^{(+)}(\Theta_{\pi}^L, T),$$

где

$$r^{(\pm)}(\Theta_{\pi}^L, T) = q_{0(\text{min})}^{L(\pm)}(\Theta_{\pi}^L, T) - \mu = T_{\pi(\text{min})}^{L(\pm)}(\Theta_{\pi}^L, T)$$

определяются выражением (1.5) и (1.6).

Величина минимальной энергии спектра в этом случае отлична от нуля. Величина кинетической энергии $T_{\pi}^L = 0$ становится возможной, только начиная с величины начальной кинетической энергии $T = T_{\text{пор}}(90^\circ) = \frac{\mu(4m-\mu)}{2\pi(m-\mu)}$. Величина пороговой энергии для образования пиона под углом Θ_{π}^L определяется выражением (1.12).

2) При начальных кинетических энергиях $T \geq T_{\text{пор}}(90^\circ)$ для образующихся пионов не существует ограничения по углу вылета Θ_{π}^L , для которого в данном случае разрешен весь физический интервал. В этом случае кинетические энергии пионов $T_{\pi}^L(\Theta_{\pi}^L, T)$ лежат в интервале $0 \leq T_{\pi}^L(\Theta_{\pi}^L, T) \leq r^{(+)}(\Theta_{\pi}^L, T) = T_{\pi \text{ max}}^L(\Theta_{\pi}^L, T)$, где величины максимальных кинетических энергий пионов $T_{\pi \text{ max}}^L(\Theta_{\pi}^L, T)$ определяются по формулам (1.5) - (1.7).

Отметим также, что формула (1.7.1) и формула (38) работы /2/ эквивалентны. В этом легко убедиться, имея в виду, что

$$2m + T = \frac{W^2}{2m} = \frac{W}{m} p_{20}^B, \quad 2mT + \mu^2 = 2W q_{0 \text{ max}}^B, \quad p_1^L = \frac{W}{m} \sqrt{\frac{W^2}{4} - m^2} = \frac{W}{m} k^B.$$

Условие (40) работы /2/ эквивалентно условию положительности величины под корнем в выражении (1.16), являясь тем самым условием существования граничного угла пиона Θ_{π}^L .

2. Геометрическая интерпретация законов сохранения энергии и импульса для реакции $N + N \rightarrow N + N + \pi$.

Для наглядности результаты, полученные в разделе 1, могут быть интерпретированы геометрически на основе преобразования спектра импульсов из системы центра масс (B - система, $\vec{p}_1^B + \vec{p}_2^B = 0$) в L - систему ($\vec{p}_2^L = 0$), рассматриваемого в зависимости от скорости центра масс β_{CM}^B . Для двух частиц в конечном канале анализ такого типа прост и приводит к трем случаям /3-5/:

$$\text{а) } \beta_{\text{CM}}^B > v_J^B, \quad \text{б) } \beta_{\text{CM}}^B = v_J^B, \quad \text{в) } \beta_{\text{CM}}^B < v_J^B, \quad (2.1)$$

где v_j^B — величина вектора скорости частицы j ($j=1,2$) в B — системе, взятого в направлении скорости $\vec{\beta}_{CM}^B$. Случай трех частиц в конечном канале может быть сведен к двухчастичному, если в соотношениях (2.1) вместо величины v_j^B ($j=1,2$) для двухчастичного случая всюду рассматривать величину $v_{i \max}^B$ ($i=1,2,3$; $\vec{p}_1^B + \vec{p}_2^B = \vec{q}^B + \vec{q}_1^B + \vec{q}_2^B = 0$), по аналогии со случаем (2.1), определяемую максимальной границей спектра кинетических энергий (импульсов) $T_{i \max}^L$ ($p_{i \max}^L$) частицы i в B — системе, вылетающей в направлении скорости β_{CM}^B .

Удобное соотношение для π — мезонов в случае трех частиц в конечном канале получим, рассмотрев (2.1), $\beta^B \geq v_{\pi \max}^B$, которое означает, что

$$\frac{p_{20}^{B2} - m^2}{p_{20}^{B2}} > \frac{q_{0 \max}^{B2} - \mu^2}{q_{0 \max}^{B2}},$$

$$p_{20}^B > \frac{m}{\mu} q_{0 \max}^B. \quad (2.2)$$

Учитывая, что $p_{20}^B = \frac{W}{2}$, $q_{0 \max}^B = \frac{1}{2W} (W^2 + \mu^2 - 4m^2)$, $W^2 = 2m(2m + T)$, приходим к условию

$$2\mu(2m + T) \geq (2mT + \mu^2), \quad (2.3)$$

эквивалентному условиям (1.8) или (1.16).

Три различных случая (2.3) для реакции типа $N + N \rightarrow N + N + \pi$ означают следующее:

$$a) \beta_{CM}^B > v_{\pi \max}^B, \quad \text{т.е.} \quad 2\mu(2m + T) > (2mT + \mu^2). \quad (2.4)$$

Здесь (рис. 2а) $T_{\text{пор}}(0^\circ) \leq T < T_{\text{пор}}(90^\circ)$ и для любой энергии в этом интервале осуществляются только углы вылета от 0 до $\Theta_{\pi \max}^L(T)$, определяемого формулой (1.16). Для каждого угла Θ_{π}^L из этого допустимого интервала осуществляется спектр кинетических энергий от некоторой минимальной величины $r^{(-)}(\Theta_{\pi}^L, T)$ до максимальной, $r^{(+)}(\Theta_{\pi}^L, T)$, определяемых по формуле (1.6).

$$б) \beta_{\text{см}}^B = v_{\pi \text{ max}}^B, 2\mu(2m+T) = 2mT + \mu^2, T = \frac{\mu(4m-\mu)}{2(m-\mu)}. \quad (2.5)$$

Этот случай (рис. 2б) осуществляется только при начальной энергии $T = T_{\text{пор}}(90^\circ) = T^*$. Граничный угол вылета пионов становится равным $\Theta_{\pi \text{ max}}^L = \frac{\pi}{2}$. Минимальная кинетическая энергия спектра пионов становится равной нулю $T_{\pi \text{ min}}^L (T = T^*) = 0$.

$$в) \beta_{\text{см}}^B < v_{\pi \text{ max}}^B, 2\mu(2m+T) < (2mT + \mu^2), T > T_{\text{пор}}(90^\circ). \quad (2.6)$$

Теперь (рис. 2в) не существует ограничения для угла вылета Θ_{π}^L , который лежит во всем физическом интервале. Нижняя граница спектров пионов для всех углов есть $T_{\pi \text{ min}}^L = 0$. Ветвь решения со знаком (-), $r^{(-)}(\Theta_{\pi}^L, T)$, в случае а) определявшая в области $T(0^\circ) \leq T \leq T_{\text{пор}}(90^\circ)$ нижнюю границу кинетических энергий спектров пионов, здесь определяет границу максимальной энергии спектров для дополнительных углов к углам $\Theta_{\pi}^L \leq \pi/2$,

$$r^{(+)}(\pi - \Theta_{\pi}^L, T > T^*) = r^{(-)}(\Theta_{\pi}^L, T > T^*). \quad (2.7)$$

Случаи а)-в) схематически изображены на рис. 2.

3. Заключение

Результаты раздела 1 и их геометрическая иллюстрация в разделе 2 получены на примере реакции $N + N \rightarrow N + N + \pi$, но можно показать, что они имеют более общий характер. В частности, аналогичная картина свойственна реакциям типа

$$\pi + N \rightarrow N + \pi + \pi \quad (\mu + m \rightarrow m + \mu + \mu) \quad (3.1)$$

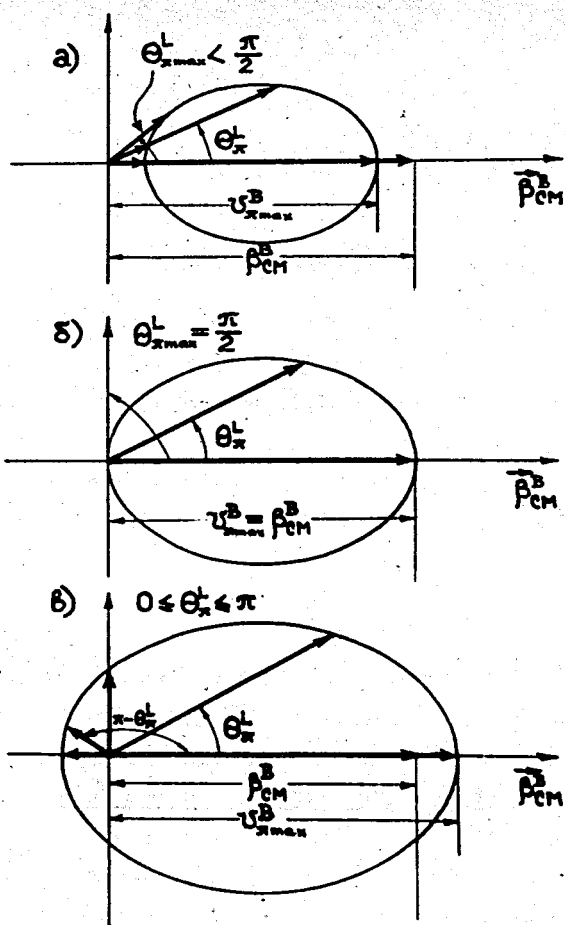


Рис.2. Геометрическая иллюстрация трех характерных случаев кинематики легкой частицы (частица q) в реакции $N+N \rightarrow N+N+\pi$.

а) $v_{\pi \max}^B < \beta_{CM}^B$. Имеется граничный угол вылета $\theta_{\pi \max}^L$ для частицы q ; спектр кинетических энергий частицы q заключен в интервале $r^{(-)}(\theta_{\pi}^L) \leq T_{\pi}^L(\theta_{\pi}^L) \leq r^{(+)}(\theta_{\pi}^L)$, где величины $r^{(\pm)}(\theta_{\pi}^L)$ при $\theta_{\pi}^L < \theta_{\pi \max}^L$ равны длинам векторов от начала координат до пересечения с эллипсом импульсов.

б) $v_{\pi \max}^B = \beta_{CM}^B$. Граничный угол $\theta_{\pi \max}^L = \pi/2$; становится возможной величина $T_{\pi}^L(\theta_{\pi}^L) = 0$, спектр кинетических энергий частицы q заключен в интервале $0 \leq T_{\pi}^L(\theta_{\pi}^L) \leq r^{(+)}(\theta_{\pi}^L)$, где величина $r^{(+)}(\theta_{\pi}^L)$ равна длине вектора, проведенного из начала координат до точки пересечения его с эллипсом импульсов.

в) $v_{\pi \max}^B > \beta_{CM}^B$. Возможны все углы вылета $0 \leq \theta_{\pi}^L \leq \pi$, границы спектра в интервале $0 < T_{\pi}^L \leq r^{(+)}(\theta_{\pi}^L)$.

и

$$N + A^{M_1} \rightarrow B^{M_2} + N + N \left(\begin{array}{l} m + M_1 \rightarrow M_2 + m + m \\ \text{при } M_1 - M_2 < m \end{array} \right) \quad (3.2)$$

для первой из которых ниже приводятся основные формулы для пионов конечного канала.

$$q_0^L \left(\frac{\pi}{\pi} \right) (\Theta_\pi^L, T) = \frac{1}{2[(m + p_{\pi 0})^2 - (p_{\pi 0}^2 - \mu^2) \cos^2 \Theta_\pi^L]} \{ (m + p_{\pi 0})(\mu^2 + 2mT) \pm \sqrt{p_{\pi 0}^2 - \mu^2} \cos \Theta_\pi^L \sqrt{(\mu^2 + 2mT)^2 - 4\mu^2 [(m + p_{\pi 0})^2 - (p_{\pi 0}^2 - \mu^2) \cos^2 \Theta_\pi^L]} \} \quad (3.3)$$

где

$$p_{\pi 0} = \mu + T, \quad p_{\pi 0}^2 - \mu^2 = T(T + 2\mu); \quad (3.4)$$

$$\cos \Theta_{\pi \max}^L (T) = \frac{1}{2\mu} \left| \sqrt{\frac{4\mu^2 (m + p_{\pi 0})^2 - (\mu^2 + 2mT)^2}{(p_{\pi 0}^2 - \mu^2)}} \right| \quad (3.5)$$

при

$$T_{\text{пор}}(0^\circ) \leq T \leq T_{\text{пор}}(90^\circ)$$

$$T_{\text{пор}}(\Theta_\pi^L) =$$

$$= \mu \left\{ \frac{\mu [m + 2\mu(1 - \cos^2 \Theta_\pi^L)] + \sqrt{\mu^2 (m + 2\mu)^2 + [4(m + \mu)^2 - \mu^2] (m^2 - \mu^2) + \mu^2 \cos^2 \Theta_\pi^L [4m(m - \mu) - 5\mu^2 + 4\mu^2 \cos^2 \Theta_\pi^L]}}{2[m^2 - \mu^2(1 - \cos^2 \Theta_\pi^L)]} \right\} \quad (3.6)$$

$$T_{\text{пор}}(0^\circ) = \frac{\mu(2m + 3\mu)}{2m} \approx 171 \text{ МэВ}, \quad (3.7)$$

$$T_{\text{пор}}(90^\circ) = \frac{\mu(2m + \mu)}{2(m - \mu)} \approx 177 \text{ МэВ}, \quad (3.8)$$

Несмотря на то, что области энергий налетающей частицы, для которых существует граничный угол вылета образовавшегося пиона в реакциях (1.0) и (3.1), невелики, существование такого эффекта приводит к следующим достаточно важным следствиям.

1. Каждому углу вылета Θ_{π}^L соответствует своя величина пороговой энергии $T_{\text{пор}}(\Theta_{\pi}^L)$.

2) Решение со знаком (-) в (1.5), (1.6) и (3.3) не может быть всегда отброшено, поскольку в области энергий $T_{\text{пор}}(0^{\circ}) \leq T \leq T_{\text{пор}}(90^{\circ}) = T^*$ оно определяет величины минимальных кинетических энергий пионов

$$T_{\pi \text{ min}}^L(\Theta_{\pi}^L, T)$$

3) Величина кинетической энергии пиона, равная нулю, $T_{\pi}^L = 0$, становится возможной при $T = T_{\text{пор}}(90^{\circ}) = T^*$ и затем при всех $T > (T_{\text{пор}}(90^{\circ}) = T^*)$ является минимальной величиной кинетической энергии. Максимальные величины определяются при всех $T \geq T_{\text{пор}}(0^{\circ})$ решением со знаком (+) в (1.5) и (1.6).

4) Существует непрерывный переход кривых $\tau^{(-)}(\Theta_{\pi}^L, T)$, из области $T_{\text{пор}}(0^{\circ}) \leq T \leq T_{\text{пор}}(90^{\circ})$ в область $T > T_{\text{пор}}(90^{\circ})$ (все они проходят точку $T_{\pi}^L = 0$ при $T = T_{\text{пор}}(90^{\circ})$), причем в этой области не имеют прежнего смысла и должны интерпретироваться как кривые максимальных энергий для углов $\pi - \Theta_{\pi}^L$. Это обстоятельство является основанием того, что в области энергий $T \geq T_{\text{пор}}(90^{\circ})$ действительно можно не обращаться к (-) решению, поскольку оно уже содержится в (+) решении. Схематически ход указанных кривых изображен на рис.3.

Следует отметить, что общее решение кинетической задачи для реакций с любым числом частиц в конечном канале ранее было рассмотрено в образах пространства Лобачевского [8,7], являющегося, в частности, пространством скоростей релятивистской частицы. Нетрудно убедиться, что и результаты настоящей работы могут быть выражены в образах пространства Лобачевского. К сожалению, несмотря на общность, этот подход к решению задач кинематики пока, по-видимому, не нашел широкого употребления.

Автор выражает глубокую благодарность профессорам С.В.Измайлову и Р.М.Рындиному, Л.Г.Заставенко, Г.И.Копылову и М.Маевски за пол-

ные дискуссии и обсуждение результатов работы, профессорам Л.И.Липидусу, В.П. Джелепову и Н.А.Перфилову за предоставленную возможность выполнить данную работу, проф. Н.А.Черникову за разъяснения глубокой связи кинематики релятивистской частицы с пространством Лобачевского.

Л и т е р а т у р а

1. F.Ferrari, F.Selleri. Suppl. Nuovo Cim.,22, 453 (1962).
2. V.C.Suslenko, V.I.Kochkin. Nucl.Phys., B5, 657 (1968).
3. J.Blaton, Det. Kgl. Vid. Selskab. Mat.-Fys. Medd.24, N20 (1950).
русский перевод в препринте ОИЯИ Р-193 (1958).
4. R.Hagedorn. Relativistic Kinematics, Benjamin, N.Y. (1963).
5. А.М. Балдин, В.И. Гольданский, И.Л.Розенталь. Кинематика ядерных реакций, М., 1959. А.М. Балдин, В.И.Гольданский, В.М. Максименко, И.Л. Розенталь. Кинематика ядерных реакций, М., 1968.
7. Н.А. Черников. НДВШ, физ-мат. науки, 2, 158 (1958).
8. Е.В. Майков, Н.А. Черников. НДВШ, физ-мат. науки, 4, 129 (1958);
Препринт ОИЯИ Р-415 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
1 апреля 1969 года.