ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 4150

Л.Ш.Ходжаев

ВОПРОСЫ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКИ S-МАТРИЧНОГО ПОДХОДА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1968

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

член-корреспондент АН СССР Д.В. Ширков,

профессор, доктор физико-математических наук

Я.А. Смородинский,

профессор, доктор физико-математических наук.

Ведущее предприятие:

Институт математики АН СССР им. Стеклова.

Автореферат разослан " " 1968 г.

Защита диссертации состоится " " 1968 г. на заседании Ученого совета Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

Р.А. Асанов

2 - 4150

Л.Ш.Ходжаев

ВОПРОСЫ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКИ S-МАТРИЧНОГО ПОДХОДА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

I.

Блестящие успехи квантовой электродинамики показали, что развитие квантовой теории поля находится на правильном пути. Однако в математическом отношении эта теория является неполной, так, например, процедура перенормировки включает в себя обращение с бесконечными выражениями и остается открытым вопрос о существовании представления взаимодействия, которое интенсивно использовалось в вычислениях. Что касается квантовой мезодинамики сильновзаимодействующих частиц, то аппарат теории возмущений в принципе не может быть применен здесь из-за большой величины константы связи между полями.

Все это явилось поводом в последние годы к аксиоматическому построению квантовой теории поля. В настоящее время развитие квантовой теории поля идет по пути ее аксиоматизации. В теорию вводится непротиворечивая или нетривиальная полная и независимая система аксиом, заимствованная из хорошо известной квантовой теории поля (так как не существует никакого критерия, позволяющего сформулировать эти аксиомы) и обсуждаются их следствия. При этом не делается особого предположения относительно приближения и вида взаимодействия.

Существуют различные аксиоматические формулировки квантовой теории поля. Сюда относятся прежде всего формулировки, связанные с именами Вайтмана, Йоста, Руэля, Хеппа и др.; алгебраический подход Хаага-Араки; S -матричные подходы Лемана, Симанзика, Циммермана (ЛСУ) и Боголюбова, Медведева, Поливанова (БМП).

Все наиболее строгие результаты, полученные в квантовой теории поля в настоящее время, принадлежат именно указанным аксиоматическим подходам. Отметим, что алгебраический подход Хаага-Араки оказался плодотворным также в статфизике.

Важная аксиоматическая формулировка квантовой теории поля принадлежит Н.Н. Боголюбову и положена в основу доказательств дисперсионных соотношений Н.Н. Боголюбовым, Б.М. Медведевым, М.К. Поливановым.

В основу БМП подхода положена идея Гейзенберга о том, что только S – матрица является наблюдаемой величиной в экспериментах по рассеянию. Это означает, что из аппарата теории должны быть исключены все ненаблюдаемые величины.

Во всех исследованиях по аксиоматическому S – матричному подходу БМП в квантовой теории поля за основные величины, определяющие теорию, принимается класс так называемых хронологических операторов, предложенный Медведевым, т.е.

$$\begin{aligned} T^c_n(x_1,\ldots,x_n) &= T'(J(x_1)\ldots J(x_n)) + \\ &+ \sum_{\substack{2\le m\le n-1 \\ \sum_{j=1}^{n}\nu_j=n,\ \nu_j\ge 1}} \frac{(-i)^{m-n}}{m!} P(x_1\ldots,x_{\nu_1}|x_{\nu_1+1},\ldots,x_{\nu_1+\nu_2}|\ldots x_n)\times \\ &\times T(\Lambda_{\nu_1}(x_1,\ldots,x_{\nu_1})\Lambda_{\nu_2}(x_{\nu_1+1},\ldots,x_{\nu_1+\nu_2})\ldots\Lambda_{\nu_m}(\ldots x_n)) + \\ &+ (i)^{n-1}\Lambda_n(x_1,\ldots,x_n), \quad n=1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Lambda_1(x_1)=J(x_1)$, $\Lambda_\nu(x_1,\ldots,x_\nu)$, $\nu=2,3,\ldots$ – произвольные токоподобные операторы, удовлетворяющие определенным условиям, $P(|\ldots|)$ – оператор симметризации.

Однако с математической точки зрения наиболее удобными величинами для исследования является бесконечное множество вакуумных средних от хронологических операторов, т.е. величины

$$B_n(x_1,\ldots,x_n) = \langle 0|T^c_n(x_1,\ldots,x_n)|0\rangle, \quad n=1,2,\ldots, \tag{2}$$

которые служат в качестве коэффициентных функций в функциональном разложении причинной S – матрицы по асимптотическим полям, т.е.

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int\ldots\int\Big(\prod_{j=1}^{n}d^4x_j\Big)B_n(x_1,\ldots,x_n):\phi_{out}(x_1)\ldots\phi_{out}(x_n): \tag{3}$$

Мы стремились полностью сформулировать содержание аксиом БМП на языке свойств обобщенных B-функций, выражаемых при помощи линейных и нелинейных соотношений. Эти соотношения для вакуумных средних от хронологических операторов должны служить основными математическими условиями, определяющими аксиоматический S – матричный подход БМП, свободный от первоначального формализма.

Реферируемая диссертация посвящена математической формулировке аксиоматического S – матричного подхода БМП в квантовой теории поля, позволяющей широко использовать методы теории обобщенных функций и теории представлений групп как для математического толкования самих аксиом, так и для тщательного математического исследования следствий сформулированных аксиом для свойств основных величин, определяющих теорию.

II

Ниже мы приведем содержание и основные результаты, полученные в шести главах диссертации.

1. Следуя Гельфанду и Тодорову, мы построили два класса оснащенных гильбертовых пространств $D^{out}\subset H^{out}\subset D^{out}$ и развили теорию вещественных и $2(2s+1)$ – компонентных

спинорных полей, характеризуемых при помощи операторнозначных обобщенных функций.

2. Построенные оснащенные гильбертовы пространства и аппарат теории свободных квантованных полей использованы для функциональной формулировки аксиом БМП, а именно, для описания асимптотических состояний, для исследования функциональных структур величин и области их определения, для формулировки условий спектральности, полноты и причинности, а также для определения трансформационных свойств радиационных операторов

$$H_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{\delta^n S}{\delta\phi_{out}(x_1)\dots\delta\phi_{out}(x_n)} S^+, \quad n=1,2,\dots$$

При этом каждой аксиоме дан строгий математический смысл. На этом пути удалось выяснить и уточнить заново функциональные структуры радиационных операторов и редукционных формул.

Аксиома, постулирующая функциональные структуры радиационных операторов, должна потребовать, помимо существования радиационных операторов в смысле операторнозначных обобщенных функций пространства $S'(R^{4n})$, еще продолжимости (доопределяемости) этих операторов на массовую поверхность. Эти дополнительные требования существенны для математической строгости всего дальнейшего исследования и получения результатов.

В случае произвольного спина в систему аксиом БМП включены радиационные операторнозначные обобщенные функции, преобразующиеся по тензорному произведению неунитарных конечных представлений спинорной группы Пуанкаре $\tilde{\tilde{P}}{}_+^{\uparrow}$.

Кроме того, постулированы существования коммутаторов для расширенных асимптотических полей и для S-матриц с оператором рождения и уничтожения частиц.

3. а) Основными физическими величинами, определяющими S-матричный подход БМП, являются так называемые

хронологические операторы $T_n^c(x_1,\dots,x_n)$, $n=1,2,\dots$ в простейших случаях имеющие вид

$$T_n^c(x_1,\dots,x_n) = T(J(x_1)\dots J(x_n)), \quad n=1,2,\dots$$

при

$$x_1 \neq \dots \neq x_n\,.$$

Путем тщательного математического исследования следствий сформулированных аксиом установлены все важнейшие свойства этих операторов. В частности, как следствия аксиом стабильности вакуума и одночастичного состояния, а также условия спектральности, доказано, что с помощью метода параметризации Хеппа и исследования Хаага-Руэля, принятого в асимптотической квантовой теории поля ЛСЦ, нельзя построить одночастичных состояний и, следовательно, векторов асимптотического состояния из гейзенбергова оператора тока $J(x) = iH_1(x)$.

Строго математически доказано соотношение

$$H_n(x_1,\dots,x_n) = (-i)^n T_n^c(x_1,\dots,x_n)$$

при

$$x_1 \neq \dots \neq x_n\,.$$

Расширение хронологических операторнозначных обобщенных функций из подпространства $S_0'(R^{4n})$ пространства функций, обращающихся в нуль со своими производными достаточно высокого порядка при $x_1 = \dots = x_n$, на все пространство $S'(R^{4n})$ совершается путем сохранения всех свойств хронологических операторов с несовпадающим аргументом. Общим хронологическим операторам приписываются все основные свойства хронологических операторов с несовпадающими аргументами. Таким образом, как следствие аксиом, установлено, что хронологические операторы $T_n^c(x_1,\dots,x_n)$, $n=1,2,\dots$ в общем случае являются: операторнозначными обобщенными функциями пространства $S'(R^{4n})$, продолжимыми на пространство $S'_{+}(R^{4n})$, пуанкаре-инвариантными, симметричными, удовлетворяющими условиям причинности и унитарности.

б) Введены запаздывающие операторнозначные обобщенные функции:

$$R^{c}_{n}(x_0; x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta^{n} J(x)}{\delta\phi(x_1)\ldots\delta\phi(x_n)}, \quad n=1,2,\ldots$$

и на основе свойств оператора тока $J(x_0)$ выведены все важнейшие свойства этих операторов. В частности, доказано, что запаздывающие операторы удовлетворяют условию разрешимости, совпадающему с условием разрешимости для операторов тока $J(x_0)$ при $n=1$. Кроме того, доказано, что запаздывающие операторнозначные обобщенные функции нелинейным образом связаны через радиационные операторнозначные обобщенные функции. Последнее обстоятельство позволило нам сформулировать условие причинности для общих хронологических операторов.

В спинорный базис аналогичным образом введены общие хронологические операторы Медведева, преобразующиеся по тензорному произведению неунитарных конечных представлений спинорных групп Пуанкаре $\tilde{\tilde{P}}^{\uparrow}_{+}$.

4. Настоящая глава посвящена изучению свойств вакуумных средних от хронологических и запаздывающих операторов, которые служат в качестве коэффициентных функций функционального разложения соответственно причинной S -матрицы и оператора тока $J(x)$ по асимптотическим полям.

Введен класс вакуумных средних от хронологических операторов

$$B_n(x_1, \ldots, x_n) = \langle 0 \,|\, T^{c}_{n}(x_1, \ldots, x_n) \,|\, 0 \rangle, \quad n=1,2,\ldots$$

Вакуумные средние $\langle 0 \,|\, T^{c}_{n}(x_1, \ldots, x_n) \,|\, 0\rangle$, $n=1,2,\ldots$ являются обобщенными функциями, принадлежащими пространству $S'(R^{4n})$, продолжимыми на пространство $S'^{\,\text{КГ}}_{+}(R^{4n})$; симметричными; пуанкаре-инвариантными; удовлетворяющими обобщенным соотношениям унитарности и обобщенным соотношениям причинности. Кроме того, доказано, что вакуумные средние $B_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n=1,2,\ldots$ удовлетворяют пространственным свойствам асимптотической факторизуемости.

Можно показать, что это последнее свойство вытекает как следствие из обобщенных соотношений унитарности и причинности. С помощью вакуумных средних $B_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n=1,2,\ldots$, и их свойств, характеризуемых линейными и нелинейными соотношениями, целиком и полностью сформулировано все содержание аксиом БМП. Таким образом, эти свойства могут быть приняты впредь в качестве основных математических условий, определяющих причинный S -матричный подход БМП в квантовой теории поля, свободный от первоначального формализма БМП. Именно в этом заключается математическая формулировка аксиоматического подхода БМП.

Доказана следующая теорема восстановления в рамках S -матричного подхода БМП.

Пусть задано бесконечное множество С-числовых обобщенных функций $\{B_n(x_1, \ldots, x_n)\}$, $n=1,2,\ldots$, удовлетворяющих следующим условиям: функции $B_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n=1,2,\ldots$ являются обобщенными функциями умеренного роста, продолжимыми на массовую поверхность; пуанкаре-инвариантными; симметричными; удовлетворяющими обобщенным соотношениям унитарности и причинности. Тогда S -матрица, представленная в виде бесконечного полинома Вика по асимптотическим "out"-полям с коэффициентными функциями $B_n(x_1, \ldots, x_n)$ $n=1,2,\ldots$, будет удовлетворять всем требованиям аксиом БМП, налагаемым на S -матрицу, т.е. S -матрица будет 1) унитарной, 2) коммутировать с унитарным представлением $U(a, \Lambda)$ собственной группы Пуанкаре $P^{\uparrow}_{+}$, 3) удовлетворять условиям причинности в форме Боголюбова; и 4) вакуумные средние от соответствующих радиационных операторов будут совпадать с заданными обобщенными B-функциями.

Определены обобщенные B-функции в спинорном базисе и установлены их трансформационные свойства относительно спинорной группы Пуанкаре.

Введен в рассмотрение класс вакуумных средних от запаздывающих операторов $R_n^c(x_0; x_1, \ldots, x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, т.е.

$$r_n^c(x_0; x_1, \ldots, x_n) = \langle 0 \mid R_n^c(x_0; x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \rangle,$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

и установлено, что они являются обобщенными функциями, принадлежащими пространству $S'(R^{4n})$; продолжимыми на пространство $S_+^{КГ}(R^{4n})$; симметричными по невыделенным аргументам; пуанкаре-инвариантными; обладающими свойствами а) запаздывания и б) вещественности; удовлетворяющими условию разрешимости. Установлено также, что обобщенные r^c-функции связаны с обобщенными B-функциями нелинейными соотношениями.

5. Матричные элементы S-матрицы на массовой поверхности являются основными определяющими величинами во всех наблюдаемых физических процессах.

Наиболее важным и красивым аспектом аксиоматического S-матричного подхода БМП в квантовой теории поля является то, что матричные элементы S-матрицы и их свойства, такие как функциональные структуры, свойства разложения по пучкам, трансформационные свойства, аналитические свойства и т.д., могут быть определены непосредственно через соответствующие свойства B-функций, установленных в главе 4.

Дано представление элементов причинной S-матрицы через вакуумные средние от хронологических операторов или через обобщенные B-функции.

На основании функциональных структур, свойства асимптотической факторизации и трансформационных свойств в спинорном базисе вакуумных средних хронологических операторов определены следующие свойства элементов причинной S-матрицы: а) элементы причинной S-матрицы являются обобщенными функциями умеренного роста на массовой поверхности, б) удовлетворяют свойствам разложения по пучкам, в) преобразуются по тензорному произведению унитарных представлений спинорной группы Пуанкаре $\tilde{\tilde{P}}_+^\uparrow$. В рамках аксиоматики ВМП дано новое доказательство трансформационных свойств обобщенных M-функций для произвольного спина.

Матричные элементы S-матрицы в каноническом базисе (т.е. обобщенные S-функции) и матричные элементы S-матрицы в спинорном базисе (т.е. обобщенные M-функции) связаны между собой преобразованием группы Лоренца в системе покоя.

Обобщенные S-функции преобразуются согласно тензорному произведению унитарных представлений спинорной группы Пуанкаре, зависящих от импульсов частицы. В то же время обобщенные M-функции преобразуются согласно тензорному произведению неунитарных представлений группы $\tilde{\tilde{P}}_+^\uparrow$. В последнем представлении остались только спинорные преобразования спинорных индексов и исключены орбитальные преобразования импульсов. Поэтому ковариантные свойства спинорной обобщенной M-функции должны лежать в основе построения S-матричной теории, инвариантной относительно более широкой группы, чем группы Пуанкаре, а именно группы, связывающей спин с группой внутренней симметрии. Кроме того, так как обобщенные M-функции свободны от кинематических особенностей, то они должны играть важную роль в вопросах аналитической теории S-матрицы.

Эти важнейшие трансформационные свойства обобщенных S- и M-функций получены как следствия трансформационных свойств радиационных операторов

$$H^{(sm;\, j\mu)_{n,\ell}}_{(a;b)_{ne}}(x;y) = \frac{\delta^{n+\ell} S}{(\delta \bar{\psi}_a^{sm}(x))_n \, (\delta \psi_b^{j\mu}(y))_\ell} \overset{+}{S},$$

где

$$a_j = \overline{-s_j, s_j}; \qquad s_j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots; \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$b_r = \overline{-j_r, j_r}; \qquad j_r = 0, \frac{1}{2}, r, \ldots; \quad r = 1, 2, \ldots, e$$

в спинорном базисе. Трансформационные свойства этих радиационных операторов, в свою очередь, определяются через трансформационные свойства спинорных асимптотических полей $\psi_a^{sm}(x), \bar{\psi}_a^{sm}(x)$. В связи с этим в первой главе развита теория $2(2s+1)$ – компонентных спинорных полей $\psi_a^{sm}(x)$, рассматриваемых как операторнозначные обобщенные функции. Установлены их трансформационные свойства относительно спинорной группы Пуанкаре $\tilde{P}_+^{\uparrow}$.

Выписаны коммутаторы в случае произвольного спина, позволяющие преобразовать матричные элементы S – матрицы к вакуумным средним от радиационных операторов.

6. Дана новая формулировка БМП подхода в квантовой теории поля. Новая формулировка основывается на так называемых аксиомах теории тока, которые состоят из аксиом типа Вайтмана для токов, аксиом асимптотической полноты и существования запаздывающих операторов в смысле операторнозначных обобщенных функций, аксиом боголюбовской причинности, условия разрешимости и существования коммутаторов для расширенных асимптотических полей и токов с операторами рождения и уничтожения частиц.

Содержание аксиом теории тока формулируется на языке свойств обобщенных функций типа Вайтмана

$$W_n^c(x_1, \ldots, x_n) = \langle 0 \mid J(x_1) \ldots J(x_n) \mid 0 \rangle, \quad n = 1, 2, \ldots$$

и запаздывающих обобщенных функций

$$r_n^c(x_0; x_1, \ldots, x_n) = \langle 0 \mid R_n^c(x_0; x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \rangle \quad n = 1, 2, \ldots$$

для токов $J(x_0)$.

Обобщенные функции типа Вайтмана $W_n^c(x_1, \ldots, x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ принадлежат классу обобщенных функций умеренного роста, продолжимых на массовую поверхность, пуанкаре-инвариантных, обладающих свойствами эрмитовости, локальной коммутативности, асимптотической факторизуемости, а также удовлетворяющих условиям спектральности и положительной определенности.

Спектральное представление двухточечной функции типа Вайтмана $W_2^c(x_1, x_2) = \langle 0 \mid J(x_1) J(x_2) \mid 0 \rangle$ не содержит одночастичной особенности вида $P(p^2 - \mu^2)^{-1}$ из-за обращения в нуль матричных элементов оператора тока $J(x)$ между вакуумом и одночастичным состоянием.

Дано хронологическое представление для коэффициентных функций S – матрицы, т.е. для обобщенных В-функций, через обобщенные функции типа Вайтмана и цепочки произвольных квазилокальных функций $U_\nu(x_1, \ldots, x_\nu)$, $\nu = 2, 3$, принадлежащих пространству обобщенных функций умеренного роста с точечными носителями, обращающимися в нуль на массовой поверхности, симметричными и локально-коммутативными.

Указаны основные свойства произвольных обобщенных функций типа

$$U_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}(x_1, \ldots, x_{\nu_1} \mid x_{\nu_1+1}, \ldots, x_{\nu_1+\nu_2} \mid \ldots x_n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

из пространства $S'(R^{4n})$, где $2 \le m \le n-1$,

$$\nu_1 + \ldots + \nu_m = n, \quad \nu_j \ge 1, \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

Разработана процедура для определения свойств произвольных обобщенных $U_\nu(x_1, \ldots, x_\nu)$, $\nu = 2, 3, \ldots$ функций через свойства обобщенных W^c, r^c и ${}^1r^c$ – функций. Таким образом, получен следующий важный результат: для полного определения S -матрицы недостаточно задания бесконечного множества с-числовых обобщенных функций типа Вайтмана и необходимо еще задание бесконечного множества с-числовых обобщенных функций

$U_2(x_1, x_2),\ U_3(x_1, x_2, x_3), \ldots, U_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots,$

обладающих вышеуказанными свойствами.

Отметим, что проблема определения произвольных обобщенных функций через заданные обобщенные функции типа Вайтмана на основании полученного представления для обобщенных B-функций при соблюдении всех требований, налагаемых на эти обобщенные функции, является актуальной проблемой в вайтмановской формулировке аксиоматического S -матричного подхода БМП в квантовой теории поля.

Таким образом, проблема построения коэффициентных функций причинной S -матрицы сведена к проблеме построения квазилокальных обобщенных функций через заданные обобщенные функции типа Вайтмана.

Решение этой последней проблемы, в свою очередь, может быть осуществлена только путем разработки универсального вычислительного аппарата Боголюбова-Парасюка-Хеппа для целей аксиоматики.

Таким образом, мы видим, что выведены все необходимые условия для разработки практически применимого динамического аппарата аксиоматики, основанного на идеях и методах теории пуанкаре-инвариантных обобщенных функций.

Отметим, что аналогичным методом проводится доказательство теоремы восстановления в рамках аксиоматической теории тока, а также дается запаздывающее представление коэффициентных функций оператора тока $J(x)$ через обобщенные функции типа Вайтмана.

III

Основные результаты диссертации представлены в статьях:

Л. Ш. Ходжаев. ДАН СССР, 170, №1 (1966).

Л. Ш. Ходжаев. О свойствах разложения по пучкам S -матрицы. Препринт ОИЯИ, Р-1760, Дубна, 1966.

Л. Ш. Ходжаев. ДАН СССР, 173, №4 (1967).

Л. Ш. Ходжаев. К теории $2(2s+1)$- компонентных спинорных полей. Препринт ОИЯИ, Р2-3010, Дубна, 1966.

Л. Ш. Ходжаев. ДАН СССР, 180, §4 (1968).

Л. Ш. Ходжаев. Ковариантная структура элементов причинной S -матрицы для произвольного спина. Препринт ОИЯИ, Р2-3045, Дубна, 1966.

Л. Ш. Ходжаев. Функциональная формулировка аксиом Боголюбова, определяющих причинную S -матричную теорию. Препринт ОИЯИ, Р5-3179, Дубна, 1967; ДАН СССР, 182, №5 (1968).

Л. Ш. Ходжаев. Обобщенные функции Боголюбова и элементы S -матрицы. Препринт ОИЯИ, Р5-3180, Дубна, 1967; ДАН СССР, 182, №6 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 ноября 1968 года.