ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 4139

Э.А.Тагиров

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1968

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук

Н.А.ЧЕРНИКОВ

Официальные оппоненты:

Ведущее научно-исследовательское учреждение

Автореферат разослан " " ________ 1968 г.

Защита диссертации состоится " " ________ 1968 г.

на заседании совета Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь совета

Р.А.АСАНОВ

2 - 4139

Э.А.Тагиров

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

В квантовой теории поля (КТП) пространственно-временное многообразие обычно предполагается псевдоевклидовым (пространством Минковского E_4). Соответственно, КТП развивается как теория, инвариантная относительно группы Пуанкаре P_4. Однако представляет большой интерес исследование КТП в более общем случае – в пространстве-времени постоянной ненулевой кривизны.

В диссертации рассматривается часть этой большой проблемы: каноническое квантование свободного скалярного поля в сферическом пространстве де Ситтера S_4 (пространство-время постоянной положительной кривизны) и введение таких фундаментальных объектов и понятий КТП как вакуум, частица, представление Фока. Возможность их введения оказывается весьма нетривиальной. Свидетельством этому может служить, в частности, отсутствие однозначной корпускулярной интерпретации квантованного поля в работах Тирринга и Нахтмана [1], [2], совпадающих по времени появления и по целям соответственно с работами [3] и [4], результаты которых и составляют основу диссертации.

Глава I носит вводный характер. В §I этой главы содержатся необходимые сведения о геометрии S_4. Как известно, она реализуется на гиперсфере

$$\eta_{AB} X^A X^B = -r^2 \ , \quad A, B = 0, 1, \dots, 4 \ ,$$

5-мерного псевдоевклидова пространства с метрическим тензором $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1)$; $r = \mathrm{const}$ – радиус S_4. Пространство постоянной кривизны допускает I0-параметрическую группу движений, которая для S_4 изоморфна $SO(1,4)$. Кроме того, S_4 допускает конформные преобразования, которые образуют вместе с движениями I5-параметрическую группу $SO(2,4)$. Известно, что при $r \to \infty$ $SO(1,4) \to P_4$, [5].

§§ 2,3 посвящены обзору современных точек зрения на роль гравитации в элементарных процессах, поскольку прежде всего в связи с этой проблемой и возник интерес к КТП в S_4. Свидетельством этого интереса являются независимое и одновременное с нашими появление упомянутых выше работ [1,2]. Работы Романа и Агасси [6] имеют ту же конечную цель. Роль гравитации в элементарных процессах обсуждается обычно в следующих трех аспектах.

I. Среди прочих взаимодействий элементарных частиц гравитационное взаимодействие, хотя и ультраслабое, может играть особую роль ввиду его универсальности, существенной нелинейности и, особенно, вследствие эквивалентности гравитационного поля и геометрии пространства-времени. В силу последнего обстоятельства может иметь место "размазывание" светового конуса, а, следовательно, и сосредоточенных на нем особенностей пропагаторов [7], которые, как известно, и приводят к расходимостям в лоренц-инвариантной КТП. Естественно, изучение гравитационного взаимодействия элементарных частиц требует создания квантовой теории гравитационного поля.

2. Начиная с известной работы Дирака[8] неоднократно обсуждалась возможность того, что может существовать связь между геометрией и, в частности, топологией Вселенной и свойствами элементарных частиц. С этой точки зрения особый интерес представляет тот факт, что ковариантное объединение внешних и внутренних симметрий, встречающее серьезные трудности в случае P_4, оказывается совершенно естественным и ведет к хорошим физическим предсказаниям, если внешние симметрии изоморфны $SO(1,4)$ [9].

3. В последнее время в связи с интересом к составным моделям элементарных частиц и развитием теории гравитационного коллапса Марков[10] и Станюкович [12] рассматривают возможность образования элементарных частиц в результате коллапса гипотетических частиц очень большой массы $m_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{\varkappa}} \sim 10^{-5}$ г ($\varkappa$ – постоянная тяготения). Ватагин, Вилье, Флато и другие [12] приходят к представлению о сильно искривленном внутреннем пространстве частицы, исходя из проблемы объединения внутренних и внешних симметрий. Хотя их подход, по-видимому, существенно отличен от [9], они также получают превосходное совпадение с экспериментальными данными, но лишь в предположении, что внешние симметрии изоморфны $SO(1,4)$.

В каком отношении к этим проблемам находится КТП в S_4 ? В главе II этому вопросу уделяется значительное место и ответ сводится, в основном, к следующему:

1. Концептуально наиболее ясным формализмом квантования гравитационного поля является интегрирование по метрике. Этот формализм предполагает, что сформулирована КТП во внешнем гравитационном поле, иначе говоря, в произвольном римановом пространстве-времени V_4. Одной из основных проблем КТП в V_4 является выбор неприводимого представления канонических коммутационных соотношений. Основываясь на результатах [13], можно ввести множество представлений Фока, но не ясно, можно ли в общем случае выбрать среди них такое, которое соответствует описанию в обычных для релятивистской КТП корпускулярных терминах. Такая возможность очевидна в случае статического V_4. В диссертации впервые показано существование такого представления в частном существенно нестатическом случае, каковым является S_4.

2. Если Вселенная замкнута и достаточно изотропна, на значительных отрезках мирового времени ее геометрия может быть аппроксимирована геометрией S_4 подходящего радиуса, и в этом смысле S_4 более точно отражает действительность. Нельзя априори исключить того, что даже локально пренебрежимые, но глобально существенные различия и прежде всего топологическая неэквивалентность S_4 и E_4 проявятся в КТП. Особенно сильно неевклидовость метрики и топологии могла влиять на элементарные процессы на ранних стадиях эволюции Вселенной.

3. Если связывать надежды на создание динамики элементарных частиц с квантовой теорией поля, то вопрос о ее формулировке в S_4 встает совершенно естественно ввиду упомянутой выше роли группы $SO(1,4)$ в проблеме объединения внешних и внутренних симметрий.

В §2 главы II обсуждаются общие вопросы канонического квантования поля в V_4: перестановочные соотношения, решение уравнений поля. Как иллюстрация к этому параграфу и ввиду полезности для модельных задач, в §3 определяются гейзенберговский оператор и перестановочная функция скалярного поля в произвольном двумерном римановом пространстве-времени [14]. В этом случае метрика фактически определяется одной произвольной функцией и зависимость оператора поля от метрики и от пространственно-подобной (п.-п.) гиперповерхности, на которой задаются канонические коммутационные соотношения, относительно простая.

В §4 дана, по сути дела, постановка основной задачи диссертации: выбор такого пространства Фока, в котором может быть введен базис из состояний с определенным числом частиц. Пользуясь терминологией Вайтмана[15], можно сказать, что главная цель диссертации состоит в выделении среди "странных" представлений канонических коммутационных соотношений "обычного" представления Фока.

В §5 рассматриваются перспективы методических приложений КТП в S_4. В частности, обсуждается возможность того, что анализ КТП в S_4 может пролить свет на некоторые проблемы "обычной" релятивистской квантовой теории поля. Отметим, что в этом аспекте ценность результатов диссертации мало зависит от реальности вклада гравитации в элементарные процессы.

В главе III рассматривается вопрос об инвариантности уравнения поля при $m = 0$ относительно конформного отображения*) $V_4 \longrightarrow \widetilde{V}_4 :\ \widetilde{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2(x)\, g_{\alpha\beta}$ ($\Omega(x)$ – произвольная функция) и следствий этого. Требование конформной инвариантности является следствием принципа соответствия: уравнение изотропных геодезических конформно-инвариантно.

Как известно, уравнения Максвелла удовлетворяют этому требованию, однако ему не удовлетворяет (при $m = 0$) уравнение скалярного поля в общепринятой форме:

$$\Box\varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \varphi = 0, \qquad (1)$$

где $\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$.

*) Инвариантность относительно конформного отображения обеспечивает инвариантность относительно конформных преобразований, если они в данном V_4 возможны.

Пенроуз[16] указал, что уравнение $\Box\varphi + \frac{1}{6}R\varphi = 0$, где R – скалярная кривизна, конформно-инвариантно. Однако указание Пенроуза, сделанное между прочим и без достаточной аргументации, осталось, по существу, незамеченным. В диссертации приводятся убедительные аргументы в пользу того, что правильным обобщением уравнения Фока-Клейна-Гордона на случай V_4 является уравнение

$$\Box\varphi + \frac{1}{6}R\varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi = 0 , \tag{2}$$

а не уравнение (I).

Одним из таких аргументов является следующее обстоятельство весьма общего характера. Вариация по $g_{\alpha\beta}$ соответствующего уравнению (2) интеграла действия определяет метрический тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ с нулевым следом при $m = 0$. Поэтому интеграл по п.-п. гиперповерхности Σ

$$M = \int_{\Sigma} \zeta^{\alpha}\, T_{\alpha\beta}\, d\sigma^{\beta} \tag{3}$$

не зависит от выбора Σ (сохраняется) не только, когда ζ^{α} – вектор Киллинга, но также когда $m = 0$ и ζ^{α} – конформный вектор Киллинга. В последнем случае в теории с уравнением (I) мы не получаем сохраняющуюся величину , поскольку в этой теории $T^{\alpha}_{\alpha} \neq 0$ при $m = 0$. Это не удивительно, т.к. уравнение (I) при $m = 0$ не конформно-инвариантно. Интересно то, что исходя из (I) нельзя получить сохраняющиеся величины вида (3) соответствующие конформным преобразованиям даже при переходе к E_4, когда оба уравнения (I) и (2) переходят в обычное уравнение Фока-Клейна-Гордона, инвариантное относительно специальной конформной группы. Таким образом, теория, основанная на уравнении (2) обеспечивает простую и последовательную точку зрения в вопросе о сохраняющихся величинах.

Глава IУ посвящена решению основных уравнений КТП в пространстве де Ситтера . В §I рассматривается гейзенберговская картина в S_4. Разделением переменных получена полная система решений уравнения (2), состоящая из функций вида

$$\mathcal{U}^{\pm}_{s+1}(\theta)\ \mathcal{S}^{s\sigma}\left[k(\xi)\right] , \quad s = 0, 1, 2, \dots ;\ \sigma = 1, \dots , (s+1)^2 , \tag{4}$$

где $\mathcal{S}^{s\sigma}[k(\xi)]$ – ортонормированные гармонические полиномы степени s от однородных координат k_α на трехмерной евклидовой сфере единичного радиуса, ξ – некоторые криволинейные координаты на ней, $\mathcal{U}^{+}_{s} = (\mathcal{U}^{-}_{s})^*$ – функции от временной координаты θ, выражающиеся через гипергеометрические функции. Поскольку в S_4 $R = \frac{12}{r^2}$, то решения уравнения (I) получаются из (4) заменой $\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$ на $\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 - \frac{2}{r^2}$.
Гейзенберговский оператор поля может быть представлен в виде ряда по системе решений (4) с операторными коэффициентами.

В §2 вычислена перестановочная функция (коммутатор полевых операторов, взятых в двух произвольных точках). Она обладает обычными свойствами функции Паули-Иордана: равна нулю вне светового конуса, сосредоточена на конусе, если $m = 0$. Последним свойством не обладает перестановочная функция в теории с уравнением (I), и это обстоятельство является важным аргументом в пользу уравнения (2).

Далее, в §3 приведены основные сведения об алгебрах групп $SO(1,4)$ (движения в S_4) и $SO(2,4)$ (движения + конформные преобразования) и вычислены соответствующие сохраняющиеся величины (3).

§4 посвящен КТП в шредингеровской картине, для простоты в двумерном пространстве де Ситтера. В результате решения уравнения Шредингера получено множество представлений Фока, каждое из которых характеризуется последовательностью комплексных чисел. Вообще говоря, различные представления Фока унитарно-неэквивалентны.

В главе У содержатся основные результаты, касающиеся выбора корпускулярно интерпретируемого представления канонических коммутационных соотношений. Здесь снова рассматривается КТП в S_4 в гейзенберговской картине.

Простым обобщением результатов работы[13] на случай бесконечного числа степеней свободы вводится множество представлений Фока, каждое из которых определяется выбором бесконечной матрицы Т . Матрица Т содержит весь произвол в выборе представления Фока, а представления, полученные в §4 гл.IУ, соответствуют частному случаю, когда Т диагональна.

Как известно, в E_4 существует единственное представление Фока, циклический вектор которого инвариантен относительно группы движений – P_4. Этот инвариантный вектор и есть вектор вакуумного состояния. В §2 гл.У получены ограничения на вид матрицы Т, которые вытекают из требования инвариантности циклического вектора относительно $SO(1,4)$ – группы движений в S_4. Это требование может быть сформулировано в виде равенств

$$\underset{(\nu)}{M}|0\rangle_T = 0 , \quad \nu = 1, \dots , 10 , \tag{5}$$

где $\underset{(\nu)}{M}$ – вычисленные в §3 гл.IУ операторы сохраняющихся величин, являющиеся генераторами унитарного представления группы $SO(1,4)$ в пространстве Фока с циклическим вектором $|0\rangle_T$. Из (5) следует, что имеется однопараметрическое семейство представлений Фока с $SO(1,4)$-инвариантным квазивакуумом. В §3 показано, что эти представления унитарно-неэквивалентны.

Если $m = 0$, должно существовать представление с $SO(2,4)$-инвариантным квазивакуумом. Такое представление оказывается единственным, и в соответствии с КТП в E_4

базисные векторы пространства Фока в этом случае описывают состояния с определенным числом частиц.

Таким образом, в общем случае $m \neq 0$ теоретико-групповые соображения, достаточные в случае E_4, не выделяют однозначно в S_4 корпускулярно-интерпретируемого представления Фока. Не может в этой проблеме помочь и переход к пределу $\tau \to \infty$ или $m \to 0$.

В §4 искомое представление однозначно определено на основе сравнения квантового и классического движения частицы при больших импульсах (по сравнению с $\frac{mc}{\hbar}$). Показано, что принцип соответствия в этом смысле выполняется лишь для уравнения (2). В §5 этот же результат получен, исходя из требования приближенной конформной инвариантности при больших импульсах.

В §6 исследуется возможность распространения полученных результатов на более общий случай закрытого изотропного пространства-времени и квазиевклидова изотропного пространства-времени, группы движений соответственно $O(4)$ и $O(3) \times T_3$. Показано, что требования инвариантности квазивакуума относительно этих групп и принцип соответствия (§4) выделяют единственный класс унитарно-эквивалентных представлений [17].

В заключительной главе УI дано резюме результатов, отмечены характерные различия КТП в S_4 и E_4 и в свете полученных результатов обсуждаются некоторые перспективы. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

I. Решены уравнения квантовой теории скалярного поля в S_4.

2. Получена корпускулярная интерпретация квантованного поля в случае, когда энергия поля не сохраняется. Таким образом, впервые понятия вакуум и частица введены без использования понятия энергия.

3. Для введения этих понятий впервые использовано сравнение квантового и классического движения при больших импульсах.

4. Показана необходимость конформной инвариантности уравнений при $m = 0$ для возможности их корпускулярной интерпретации. Следовательно, уравнением квантового движения частицы в V_4 является уравнение (2), но не (1), используемое обычно.

5. На основе уравнения (2) получено единое определение сохраняющихся величин, соответствующих как движениям, так и конформным преобразованиям (при $m = 0$) в (в том числе и в E_4).

Вычисление некоторых интегралов от произведений произвольных гармонических полиномов выделено в особое приложение.

Результаты диссертации были доложены на XIУ Международной конференции по физике высоких энергий (Вена, 1968) и на У Международной конференции по гравитации и теории относительности (Тбилиси, 1968) и опубликованы в работах [3, 4, 14, 17].

Литература

1. W.Thirring, статья в сб. Special problems in high energy physics, p.269, Springer, Wien-New York, 1967.
2. O.Nachtmann, Comm.Math.Phys. 6,1 (1967).
3. Э.А.Тагиров, Е.Д.Федюнькин, Н.А.Черников, Препринт ОИЯИ Р2- 3392, Дубна, 1967; статья в сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц",Атомиздат.
4. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov, Ann.Inst.Henri Poincaré 9, 109-141 (1968); Препринт ОИЯИ Р2- 3777, Дубна,1968.
5. E.Inonu, E.P.Wigner, Proc.Nat.Acad.Sci. USA 39, 510 (1953); ibid.40, 119(1954).
6. P.Roman, J.J.Agassi, Nuovo Cim. 38, 1092 (1965); Journ.Math.Phys. 7, 1273 (1966).
7. S.Deser, Rev.Mod.Phys. 29, 417 (1957).
8. P.A.M.Dirac, Proc.Roy.Soc. A165, 199 (1938).
9. P.Roman, J.J.Agassi, Nuovo Cim. 37, 354, (1965)(там же ссылки на предыдущие работы).
10. М.А.Марков, статья в сб. " Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", Наукова думка, Киев, 1967; Препринт ОИЯИ Е- 2644, Дубна, 1966.
11. К.П.Станюкович, статья в сб. " Гравитационное поле и элементарные частицы", Атомиздат, Москва, 1967.
12. D.Bohm, M.Flato, D.Sternheimer, Nuovo Cim. 38, 1941 (1965); M.Flato, Symmetries de type Lorentzien et interactions fortes, Gauthier-Villars, Paris, 1966; M.Flato, D.Sternheimer, J.P.Vigier, G.Wataghin, Nuovo Cim.42, 431 (1966); J.P.Vigier, статья в Трудах Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля, Препринт ОИЯИ Р2- 3590, Дубна, 1968.
13. Н.А.Черников, статья в "Трудах Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля", Препринт ОИЯИ Р2- 3590, Дубна, 1968.
14. Э.А.Тагиров, Н.А.Черников, ДАН СССР 160, 1049, (1965).
15. А.Вайтман, "Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей", "Наука",М., 1968.
16. Р.Пенроуз ,статья в сб." Гравитация и топология", Мир, Москва,1966.
17. К.А.Бронников, Э.А.Тагиров, Препринт ОИЯИ Р2-4151, Дубна 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 ноября 1968 года.