ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 4119

Р.М.Мир-Касимов

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Специальность 041 - теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной
степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1968

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник В.Г.Кадышевский

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник В.И.Огиевецкий,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Б.А.Арбузов.

Ведущее предприятие:

Физический институт им. Лебедева АН СССР

Автореферат разослан " " 1968 г.

Защита диссертации состоится " " 1968 г. на заседании Учёного совета Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЛТФ.

Учёный секретарь Совета

Р.А.Асанов

2 - 4119

Р.М.Мир-Касимов

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Специальность 041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

В диссертации рассмотрен круг вопросов, связанных с физическими применениями импульсного пространства постоянной кривизны в теории элементарных частиц.

Методы геометрии p -пространства постоянной кривизны используются нами в различных динамических схемах - квантовой теории поля, задаче о нерелятивистском атоме водорода и квазипотенциальном подходе А.А.Логунова и А.Н.Тавхелидзе.

Как известно, процессы взаимодействия элементарных частиц описываются в рамках формализма локальной релятивистской теории поля. Однако, хотя во многих случаях эта теория и дает правильные результаты, существование ультрафиолетовых расходимостей наводит на мысль, что известная ее форма должна быть подвергнута модификации.

На протяжении последних 40 лет предпринимались многочисленные попытки обобщить теорию поля таким образом, чтобы в ней не содержались бессмысленные расходящиеся выражения. Наиболее привлекательными из такого рода обобщений являются схемы, использующие в том или ином виде предположения об изменении геометрии пространства-времени на малых расстояниях. В таких теориях присутствует "фундаментальная длина" ℓ_0 -естественный масштаб, характеризующий размеры областей пространства-времени, в которых уже несправедливы обычные геометрические соотношения.

В экспериментах с элементарными частицами, по-видимому, не существует принципиальных ограничений на точность измерения энергии и импульса, тогда как измерения в пространстве-времени ограничены в силу релятивистского принципа неопределенности. Отсюда возникает одно из основных условий, налагаемых на геометрические обобщения теории, а именно, непрерывность геометрии импульсного пространства, соответствующего новому конфигурационному пространству. Выполнение данного условия обеспечивает возможность построения формализма непосредственно в терминах наблюдаемых величин. В этом аспекте особый интерес представляет подход, предложенный Снайдером/1/ и развивающийся затем в ряде работ (см., например,/2,3/). В теории Снайдера обычное псевдоевклидово p-пространство заменено p-пространством постоянной кривизны. Такое обобщение в известном смысле "минимально", поскольку из всех пространств Римана пространства постоянной кривизны обладают свойством однородности столь же полным, сколь и евклидово пространство. На теоретико-групповом языке последнее означает, что группа движений кривого пространства зависит от того же числа параметров, что и группа движений соответствующего евклидова пространства.

Наряду с определенными успехами в теории Снайдера имеется ряд неясных моментов, связанных, в основном, с отсутствием формулировки этой теории в конфигурационном представлении.

Интересно поэтому обратиться к простым физическим задачам, в математической формулировке которых естественным образом появляется импульсное пространство постоянной кривизны, причём одновременно допустимо рассмотрение и в конфигурационном представлении.

Одна из таких задач исследовалась В.А.Фоком/4/ при анализе скрытой симметрии атома водорода.

Несколько лет назад А.А.Логуновым и А.Н.Тавхелидзе был предложен квазипотенциальный подход к релятивистской

проблеме двух тел/5/. В основном уравнении этого метода в p-представлении естественным образом возникает интегрирование по массовой оболочке одной частицы

$$p^2 = m^2 \; , \qquad (1)$$

т.е. по трехмерному импульсному пространству постоянной отрицательной кривизны (пространству Лобачевского).

Другой вариант квазипотенциального подхода, также использующий геометрию Лобачевского, был развит В.Г.Кадышевским/6/.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и трех приложений.

В о в в е д е н и и разобраны различные задачи, приводящие к p-пространству постоянной кривизны, дан обзор литературы по рассматриваемому кругу вопросов и кратко изложено содержание диссертации.

Г л а в а I посвящается теории поля в эллиптическом p-пространстве. Все метрические соотношения между векторами p_μ ($\mu = 1,2,3,4$), принадлежащими эллиптическому пространству, индуцируются соответствующими соотношениями между координатами единичных 5-векторов P_a ($a = 1,2,3,4,5$) (проективными координатами), связанными с p_μ по формулам

$$p_\mu = \frac{P_\mu}{P_5} \; . \qquad (2)$$

Основную роль в обобщенной теории поля играет модифицированный закон сложения векторов $p(+)k$, представляющий собой операцию сдвига в p-пространстве.

Группа движений эллиптического пространства, состоящая из преобразований сдвига и четырехмерных вращений, изоморфна $SO(5)$.

В §4 вводятся операторы $\Psi(P)$ и $\Phi(L)$ фермионного и псевдоскалярного поля, выписывается лагранжиан псевдоскалярной мезонной теории и отвечающая ему S -матрица.

В §5 детально исследуется "особенность фокусировки" - специфическое свойство рассматриваемой схемы, связанное с существованием в пространстве постоянной кривизны точек, неподвижных относительно преобразований сдвига.

В о в т о р о й г л а в е геометрическая фоковская теория скрытой симметрии атома водорода берется за основу при толковании кулонова взаимодействия как нерелятивистского квантования пространства.

В §7 приводятся уравнения, описывающие кулоновский спектр в различных проекциях. Кроме того, выписывается инвариантная форма уравнения Липпмана-Швингера для кулонова потенциала.

В §8 изучаются операторы обобщенной координаты, связанные с бесконечно малыми сдвигами сферического p -пространства. Показано, что инвариант группы движений импульсного пространства

$$J = \frac{2e^4}{p_0^2} M_{ij} M_{ij} + M_{4i} M_{4i}, \quad (p_0 = \sqrt{\pm 2\mu E}) \qquad (3)$$

может рассматриваться как обобщение обычного оператора квадрата расстояния r^2. В пределе выключенного взаимодействия (3) переходит в обычный оператор квадрата расстояния

$$J \to r^2 = -\frac{\partial^2}{\partial p_k^2} \quad . \qquad (4)$$

В §9 перечисляются некоторые следствия предложенного выше толкования кулоновой симметрии. В частности, подчеркивается, что нарушение трансляционной инвариантности, приводившее к трудностям в схеме Снайдера, можно понять, если рассматривать искривление p -пространства как результат включения взаимодействия, поскольку последнее нарушает трансляционную инвариантность.

Г л а в ы III и IV посвящаются квазипотенциальному подходу в формулировке, развитой в /6/.

В §10 описываются свойства пространства Лобачевского, моделируемого верхней полой гиперболоида $p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$. Изучаются некоторые представления группы движений этого пространства.

В §11 приводятся необходимые для дальнейшего формулы, связанные с уравнением Липпмана-Швингера и нерелятивистским парциальным анализом.

В §12 для релятивистской амплитуды $A(\vec{p},\vec{q})$ двух частиц с равными массами строится квазипотенциальное уравнение Липпмана-Швингера, являющееся прямым геометрическим обобщением соответствующего нерелятивистского уравнения. Аппарат представлений группы Лоренца используется для введения релятивистского конфигурационного представления.

В §13 квазипотенциальное уравнение обобщается на случай взаимодействия частиц с неравными массами m_1 и m_2. В полученных уравнениях интегрирование производится по верхней поле гиперболоида

$$k^2 - m_1 m_2 = 0. \qquad (5)$$

Важное значение здесь приобретает понятие трехмерного относительного импульса $\vec{k}\,'$, величина которого в системе центра инерции определяется соотношением

$$\vec{k}'^{\,2} = -\left(\frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2}\right)^2. \tag{6}$$

В § 14 изучаются локальные свойства квазипотенциала. Показано, что при определенных предположениях квазипотенциальное уравнение для волновой функции в $\vec{r}$ -представлении имеет вид

$$\{H_0 - 2E + V(\vec{r}, E)\}\,\Psi(\vec{r}, E) = 0, \tag{7}$$

где H_0 -релятивистский конечно-разностный оператор энергии[x/]

$$H_0 = 2\,\mathrm{ch}\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{2i}{r}\,\mathrm{sh}\left(i\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\Delta_{\theta,\phi}}{r^2} \tag{8}$$

($\Delta_{\theta,\phi}$ - угловая часть оператора Лапласа).

В § 15 изучаются различные свободные решения уравнения (7), отвечающие релятивистским плоским и сферическим волнам.

Методу вариации постоянных применительно к исчислению конечных разностей посвящается § 16. Здесь показано, что радиальная часть уравнения (7) может быть сведена к интеграль-
~~диальная часть уравнения~~ (7) может быть сведена к интеграль-
ному уравнению вида

$$\Psi_\ell(r, E) = A(r)\,s_\ell(r,\chi) + B(r)\,c_\ell(r,\chi) - \tag{9}$$
$$- \int_0^\infty G_\ell(E; r, r')\,V(r', E)\,\Psi_\ell(r', E)\,dr';$$

x/ Во всех последующих параграфах полагается $m_1 = m_2 = 1$.

где $E = \mathrm{ch}\,\chi$, s_ℓ и c_ℓ - линейно независимые решения свободного радиального уравнения (7), соответствующие стоячим волнам, G_ℓ - функция Грина, $A(r)$ и $B(r)$ - периодические функции с периодом i , играющие роль констант интегрирования в конечно-разностном анализе.

В § 17 развивается теория рассеяния, в частности, строится аналог нерелятивистского сохраняющегося радиального тока и функции Йоста

$$f_\ell^{(\pm)}(E) = 1 - \int \frac{e_\ell^{(1,2)}(r', \chi)\,V(r', E)\,\Psi_\ell^{(0)}(r', E)}{W(s_\ell(r',\chi),\, c_\ell(r',\chi))}\,dr', \tag{10}$$

где $e_\ell^{(1,2)}$ - свободные решения, соответствующие расходящейся и сходящейся сферическим волнам, $\Psi_\ell^{(0)}(r, E)$ - решение уравнения (7), регулярное в нуле, $W(s_\ell, c_\ell)$ - обобщенный вронскиан. Матрица рассеяния имеет вид

$$S_\ell(E) = \frac{f_\ell^{(-)}(E)}{f_\ell^{(+)}(E)}. \tag{11}$$

В § 18 точно решается задача с кулоновским потенциалом для произвольных парциальных волн. Волновая функция дискретного спектра имеет вид

$$\Psi_\ell(r, \chi) = C(\ell, \chi)\,e^{-r\chi}\,\frac{\Gamma(ir + \ell + 1)}{\Gamma(ir)}\,{}_2F_1\left(\ell + 1 - \frac{e^2}{2\sin\chi}\right. \tag{12}$$
$$\left. - ir + \ell + 1;\; 2\ell + 2;\; 2i\sin\chi\, e^{-i\chi}\right),$$

где ${}_2F_1$ - гипергеометрическая функция, $C(\ell, \chi)i$ -периодическая функция от r. Из (27) следует правило квантования уровней энергии

$$E_n = \sqrt{1 - \frac{e^4}{4n^2}} . \qquad (13)$$

Для парциальной матрицы рассеяния получается выражение

$$S_\ell(E) = \frac{\Gamma(\ell + 1 - \frac{ie^2}{2\sqrt{E^2-1}})}{\Gamma(\ell + 1 + \frac{ie^2}{2\sqrt{E^2-1}})} . \qquad (14)$$

В приложении I приводится параметризация преобразований обобщенного сдвига в сферических координатах для пространства постоянной положительной кривизны.

В приложении II вычисляется поляризационный оператор второго порядка в псевдоскалярной мезонной теории, построенной в главе I. Установлено, что процедура перенормировки в g^2 – приближении приводит к размазыванию массы.

В приложении III вычисляется функция Грина уравнения (7).

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:

1. *ЖЭТФ, 49, 905 (1965).*
2. *ЖЭТФ, 49, 1161 (1965).*
3. *ЖЭТФ, 52, 533 (1967).*
4. *Nuovo Cimento, 55A, 233 (1968).* *(Совместно с В.Г.Кадышевским и Н.Б.Скачковым).*

5. *Препринт ОИЯИ, Е2-3949, Дубна, 1968. (Совместно с В.Г.Кадышевским и Н.Б.Скачковым).*
6. *Препринт ОИЯИ, Е2-3950, Дубна, 1968. (Совместно с В.Г.Кадышевским и Н.Б.Скачковым).*
7. *Препринт ОИЯИ, Е2-4030, Дубна, 1968. (Совместно с В.Г.Кадышевским и М.Д.Матеевым).*
8. *Препринт ОИЯИ Р2-4107, Дубна, 1968. (Совместно с М.Д.Матеевым и М.Фриманом).*

Литература

1. H. Snyder. Phys. Rev., 71, 38 (1947).
2. Ю.А. Гольфанд. ЖЭТФ, 37, 504 (1959).
3. В.Г.Кадышевский. ЖЭТФ, 41, 1885 (1961).
4. V. Fock. Zs. f. Phys., 98, 145 (1935).
5. A.A. Logunov and A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cimento, 29, 380 (1963).
6. V.G. Kadyshevsky. Nuclear Physics, B6, 125 (1968).
7. И.С.Шапиро. ДАН СССР, 106, 647 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 октября 1968 года.