ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-2006-138

На правах рукописи
УДК 51-7:530.145

ПАКУЛЯК
Станислав Здиславович

СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ В КВАНТОВЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЯХ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико–математических наук А.А. Белавин

доктор физико–математических наук А.В. Маршаков

доктор физико–математических наук А.В. Разумов

Ведущая организация: Математический институт РАН им. В.А. Стеклова, г. Москва

Защита диссертации состоится «27» декабря 2006 года в 15⁰⁰ часов на заседании специализированного совета Д 720.001.01 в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, по адресу: г. Дубна Московской области, ОИЯИ, ЛТФ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан «20» ноября 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук С.В. Голоскоков

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию квантовых систем, обладающих скрытой симметрией высокой степени. Типичными примерами таких систем являются интегрируемые квантовые одномерные магнетики и двумерные интегрируемые теории поля.

Основная цель диссертации – исследование пространства собственных векторов коммутирующих интегралов движения (состояний) интегрируемой модели. Как правило, это пространство состояний реализуется как пространство представления некоторой бесконечномерной алгебры, которая отождествляется с алгеброй симметрий исследуемой модели. В моделях, которые исследуются в диссертации, эти алгебры симметрий реализованы как алгебры токов. Под алгеброй токов понимается такая алгебра симметрий, что ее бесконечный набор образующих можно собрать в конечный набор производящих функций, занумерованных корнями простой алгебры Ли. Бесконечномерные алгебры, позволяющие описывать пространства состояний квантовых интегрируемых моделей, называются алгебрами динамических симметрий.

В первой части диссертации исследован класс двумерных интегрируемых массивных теорий поля, обладающих следующими свойствами:

- наличие бесконечного набора независимых интегралов движения;
- отсутствие множественного рождения частиц;
- рассеяние приводит только к перераспределению импульсов между частицами;
- факторизация многочастичной S-матрицы.

Основополагающим в этом списке является первое свойство, из которого, в принципе, можно получить остальные свойства. В таких моделях можно реализовать форм-факторную программу вычисления корреляционных функций локальных операторов, в которой двухточечный коммутатор представляется в виде ряда

$$
{}_{\rm ph}\langle {\rm vac}|O_1(x)O_2(y)|{\rm vac}\rangle_{\rm ph} = \sum_{N=0}^{\infty}\int\cdots\int \frac{d\theta_1\cdots d\theta_N}{N!(2\pi)^N} e^{-i(x_\mu-y_\mu)\sum_{j=1}^N p^\mu(\theta_j)} \times
$$
$$
\sum_{\epsilon}\ {}_{\rm ph}\langle {\rm vac}|O_1(0)|\theta_1,\ldots,\theta_N\rangle_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N}\cdot {}^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N}\langle\theta_1,\ldots,\theta_N|O_2(0)|{\rm vac}\rangle_{\rm ph}\ ,
$$

где матричные элементы ${}_{\rm ph}\langle {\rm vac}|O_i(0)|\theta_1,\ldots,\theta_N\rangle_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N}$ между вакуумным и N-частичным состоянием, называются форм-факторами оператора O_i и содержат информацию, как о локальном операторе, так и о состоянии на котором вычисляется этот матричный элемент. Асимптотическое N-частичное состояние параметризуется быстротами θ_j и 'цветами' ϵ_j квазичастиц. Требование зануления корреляционной функции на пространственно-подобном интервале приводит к системе согласованных аксиом на форм-факторы локальных операторов, решение которых может быть получено в виде многомерных интегралов гипергеометрического типа. Затравочными данными для системы форм-факторных аксиом являются точные формулы для унитарной и кроссинг-симметричной S-матрицы рассеяния асимптотических состояний.

В диссертации S-матрица для солитон-антисолитонного рассеяния в модели Sine-Gordon была использована для формулировки алгебры токов, такой, что ее теория представлений давала решение форм-факторных аксиом в этой модели. Эта алгебра токов оказалась существенно отличной от таковых, возникающих из теории групп и алгебр Ли. В частности, в рамках бесконечномерной теории представлений этой алгебры токов было объяснено появление двух дуальных квантовых симметрий в модели Sine-Gordon. Форм-факторы локальных операторов получаются в виде многомерных интегралов, в структуре которых содержится информация как о локальном операторе, так и о состояниях, на которых вычисляются матричные элементы. Было замечено, что векторнозначная часть подынтегрального выражения в представлении матричного элемента несет информацию о состоянии, на котором этот матричный элемент вычисляется. Эта векторнозначная функция может быть отождествлена с обобщенным вектором Бете и также может быть получена из анализа соответствующей алгебры токов.

Во второй части диссертации это наблюдение было развито до универсальной конструкции построения обобщенных векторов Бете в интегрируемой модели, обладающей алгеброй динамических симметрий произвольного ранга. В случае моделей с симметриями старших рангов метод нахождения векторов Бете называется иерархическим анзацем Бете. Содержанием этого метода, созданного усилиями ленинградской школы академика Л.Д.Фаддеева и возникшего как синтез классического метода обратной задачи (В.Е.Захаров, С.П.Новиков и др.) с методами Р.Бакстера расчета квантовых систем на решетках, является неявная процедура, позволяющая свести задачу об описании вектора состояния к аналогичной задаче для алгебры меньшего ранга. В предположении, что для минимального ранга задача решена, иерархический анзац Бете неявно решает задачу об описании обобщенных векторов Бете. В диссертации был сформулирован новый метод, позволивший эффективно решить иерархические соотношения анзаца Бете, и получить явные формулы для описания обобщенных векторов Бете в квантовых интегрируемых моделях с симметриями старших рангов.

Следует отметить, что построение векторов Бете является актуальной задачей в теории квантовых или разностных уравнений Книжника-Замолодчикова, которые описывают зависимость обобщенных форм-факторов от быстрот частиц. Обобщенные вектора Бете в этой теории называются весовыми функциями. Найденная в диссертации связь между алгебрами токов и весовыми функциями позволяет находить решения квантовых уравнений Книжника-Замолодчикова для систем с произвольной алгеброй скрытых динамических симметрий.

Актуальность проблемы. Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что развитие альтернативных подходов к изучению квантовых интегрируемых систем с бесконечным числом степеней свободы является важной задачей, и помимо самостоятельного математического интереса, занимает важное место в современной теоретической физике.

Поэтому тема диссертации является актуальной, а решение поставленных в ней задач представляет безусловный интерес как для специалистов по теории интегрируемых систем, так и для широкого круга физиков-теоретиков, которые, так или иначе, используют изложенные результаты в приложениях к квантовой теории поля, физики элементарных частиц и теории струн.

Цель работы. Целью диссертации является изучение пространства состояний

квантовых интегрируемых систем в двух аспектах. Во-первых, как пространства представления некоторой центрально-расширенной алгебры токов, учитывающей и объясняющей наличие двух квантово-групповых симметрий в модели Sine-Gordon с дуальными параметрами деформации. Во-вторых, как пространства векторнозначных функций, которые могут быть использованы для построения обобщенных форм-факторов в интегрируемой двумерной теории с произвольной алгеброй динамических симметрий. В диссертации решаются следующие задачи.

1. Проанализировано угловое квантование свободных массивных двумерных фермионов, и построена бозонизация неабелевой алгебры экранирующих токов, связывающей различные компоненты фермионных полей при угловом квантовании.

2. Алгебра экранирующих токов обобщена для произвольного допустимого значения константы взаимодействия в модели Sine-Gordon. Симметрии пространства состояний в этой модели реализованы как присоединенное действие алгебры экранирующих токов.

3. Форм-факторы локальных операторов в теории Sine-Gordon построены как следы от произведений сплетающих операторов представлений уровня 1 алгебры экранирующих токов и проведена проверка того, что эти следы удовлетворяют всем аксиомам форм-факторов в этой модели.

4. В $SU(2)$-инвариантной модели Тирринга проведено вычисление следов от произведений сплетающих операторов для соответствующей алгебры экранирующих токов, и получены форм-факторы тока и тензора энергии-импульса. Из анализа этих форм-факторов доказано совпадение обобщенных векторов Бете и проекций от произведений экранирующих токов.

5. Построена общая теория проекций на пересечения токовых подалгебр с поляризациями разных типов. Классическая (L-операторная) и токовая конструкции обобщенных векторов Бете отождествлены на примере алгебры токов $U_q(\widehat{gl}_N)$. Доказано, что вычисление проекций от произведений токов эквивалентно эффективному решению соотношений рекурсии в иерархическом анзаце Бете.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Найдено новое семейство алгебр токов, теория представлений которых дает теоретико-групповое описание пространства состояний в точно-решаемых двумерных массивных квантовых теориях поля типа Sine-Gordon и модель Тирринга. Это семейство отождествлено с новой деформацией алгебры токов из класса динамических квантовых групп.

2. Вектора состояний в этих теориях реализованы как операторы в пространстве Фока. Вычислены матричные элементы (форм-факторы) некоторых локальных операторов на этих состояниях, и проведена проверка того, что они удовлетворяют всем аксиомам на форм-факторы, следующим из базового постулата причинности в теории поля.

3. Изучены свойства разностных уравнений, которым удовлетворяют форм-факторы, и отождествлены три независимые конструкции построения решений этих уравнений.

4. Развита общая теория построения обобщенных векторов Бете для произвольной квантовой интегрируемой модели с любой токовой алгеброй симметрии.

5. Показано, что предложенный в диссертации метод проекций позволяет эффективно решать соотношения рекурсии в иерархическом анзаце Бете и строить обобщенные вектора Бете, используя токовую реализацию алгебры симметрий пространства состояний.

Научная новизна и практическая значимость результатов. Все представленные на защиту результаты являются оригинальными разработками автора диссертации и новыми на момент их публикации. Результаты опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, докладывались на международных конференциях и представлены в их публикациях, они широко известны в научном сообществе и цитируются в работах других авторов в близких областях теоретической и математической физики. Результаты, лежащие в основе диссертации, были опубликованы в 1993-2006 годах в работах [1]–[15].

Впервые была предложена теоретико-групповая интерпретация двух квантово-групповых симметрий в модели Sine-Gordon и модели Тирринга в рамках новой алгебры токов из класса динамических квантовых алгебр [7, 11].

Впервые были сопоставлены три различные конструкции построения обобщенных форм-факторов в интегрируемых двумерных моделях теории поля, обладающих янгианной симметрией, и доказано их совпадение на примере форм-факторов тока и тензора энергии-импульса [9].

Впервые обобщенный бетевский вектор был выражен в токовых образующих алгебры динамических симметрий и отождествлен с проекцией от произведения токов на пересечения борелевских подалгебр разного типа [14, 15].

Эти же проекции были впервые применены для получения универсальных R-матриц для квантовых аффинных алгебр в интегральной форме, выраженных через токовые образующие [12, 13].

Автору принадлежит постановка теоретических задач, определение методов решений и получение конкретных результатов. В диссертации представлена лишь принадлежащая автору часть результатов работ, выполненных в соавторстве.

Научная и практическая ценность диссертации обусловлена возможностью применения полученных в ней результатов в дальнейших исследованиях.

Апробация диссертации. Результаты, полученные в диссертации, неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах в Лаборатории теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ и на теоретических семинарах ИТЭФ и ИТФ им. Л.Д. Ландау. Результаты диссертации были также представлены автором на научных семинарах в Университетах Бонна (Германия), Мадрида, Сарагосы (Испания), Киото, Токио, Фукуоки (Япония), Рима, Падуи (Италия), Политехнической школе в Париже, Институте высших научных исследований (Бюр-сюр-Иветт, Франция), Математических институтах им. М.Планка (Бонн) и Киотского Университета,

Корнельском Университете (США), Центре математических исследований Университета Монреаля (Канада), Лаборатории теоретической физики (Анси, Франция). Результаты были представлены на международных конференциях по различным областям теоретической и математической физики в Монреале (2000), Бонне (2004), Анси (2005), Протвино (2003, 2006).

Некоторые результаты диссертации впоследствии были подтверждены и развиты в работах японской школы. Так, М.Джимбо, Т.Мива и Х.Конно обобщили результаты, полученные в первой части диссертации, на модели с эллиптическими токовыми алгебрами симметрий.

Публикации. По материалам исследований, представленных в диссертации, опубликовано 15 работ в ведущих журналах.

Структура и объем диссертации. Объем работы составляет 218 страниц текста с 4 рисунками, включая библиографический список литературы из 98 наименований.

Содержание диссертации

Во введении дан обзор современного состояния теории квантовых интегрируемых двумерных моделей теории поля, очерчены основные понятия и методы, используемые в диссертации, приведена общая характеристика работы, а также описана ее структура по главам.

Во второй главе рассматривается каноническое квантование свободных двумерных массивных фермионов или массивной модели Тирринга в отсутствие четырех-фермионного взаимодействия, определяется и изучается алгебра экранирующих токов, дается теоретико-групповая интерпретация пространства состояний в модели Sine-Gordon в рамках теории представлений алгебры экранирующих токов, и проверяется утверждение о том, что теория представлений этой алгебры доставляет решение форм-факторной программы для этой модели.

Хорошо известно, что массивная модель Тирринга, задаваемая лагранжианом

$$S_{\rm Th} = \int dx^0 dx^1 \left[\frac{1}{2}\left(\overline{\Psi}(x) i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) - \partial_\mu\overline{\Psi}(x) i\gamma^\mu\Psi(x)\right) - m\overline{\Psi}(x)\Psi(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{g}{2}\left(\overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\right)^2\right], \qquad (1)$$

эквивалентна на квантовом уровне модели Sine-Gordon

$$G_{\rm SG} = \int dx^0 dx^1 \left[\frac{1}{2}\,\partial_\mu\Phi(x)\partial^\mu\Phi(x) + \frac{m^2}{4\pi\beta^2}(\cos(2\sqrt{\beta}\Phi(x)) - 1)\right], \qquad (2)$$

если константы взаимодействий в двух моделях связаны соотношением

$$g = \pi\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\,.$$

В § **2.1** модель Тирринга рассматривается в точке свободных фермионов $g = 0$, когда четырех-фермионное взаимодействие в модели отсутствует, и каноническое квантование этой модели в правом конусе $(x^0)^2 - (x^1)^2 < 0$, $x^1 > 0 : x^0 = r \operatorname{sh} \alpha$, $x^1 = r \operatorname{ch} \alpha$, $r \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ двумерного пространства Минковского

$$\{\psi_+(r,\alpha), \psi_-(r',\alpha)\} = -e^{-\alpha}\delta(r-r'), \quad \{\overline{\psi}_+(r,\alpha), \overline{\psi}_-(r',\alpha)\} = -e^{\alpha}\delta(r-r'), \tag{3}$$

где

$$\Psi_\pm(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_\pm(r,\alpha) \\ \psi_\pm(r,\alpha) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\ b_\pm(\nu)\Psi_\nu(r,\alpha) \tag{4}$$

и

$$\Psi_\nu(r,\alpha) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}\Gamma(i\nu+1/2)} \begin{pmatrix} e^{(2i\nu+1/2)\alpha}K_{i\nu+1/2}(mr) \\ e^{(2i\nu-1/2)\alpha}K_{i\nu-1/2}(mr) \end{pmatrix}, \quad \nu \in \mathbb{R} \tag{5}$$

позволяет построить данные 'рассеяния' $\mathcal{X}_\pm(\theta,\alpha)$

$$\Psi(r,\alpha) \to \mathcal{X}_\pm(\theta,\alpha) = \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dr\ e^{-mr\operatorname{ch}\theta} \left(\overline{\psi}_\pm(r,\alpha)e^{(\theta-\alpha)/2} + \psi_\pm(r,\alpha)e^{(\alpha-\theta)/2}\right), \tag{6}$$

эволюция которых по угловому времени α сводится к сдвигу спектрального параметра $\mathcal{X}_\pm(\theta,\alpha) = \mathcal{X}_\pm(\theta+\alpha)$. Обратная задача 'рассеяния' для фермионных полей

$$\Psi_\pm(r,\alpha) = \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\ \mathcal{Z}_\pm(\theta+\alpha)e^{-mr\operatorname{ch}\theta} \begin{pmatrix} e^{(\theta+\alpha)/2} \\ e^{-(\theta+\alpha)/2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

решается в терминах операторов $\mathcal{Z}_\pm(\theta) = \mathcal{X}_\pm(\theta+\pi i) + \mathcal{X}_\pm(\theta-\pi i)$, связанных с данными 'рассеяния' интегральным преобразованием.

$$\mathcal{X}_\pm(\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta'\ \frac{\mathcal{Z}_\pm(\theta')}{\operatorname{ch}((\theta-\theta')/2)}. \tag{8}$$

Операторы $\mathcal{X}_\pm(\theta)$ и $\mathcal{Z}_\pm(\theta)$ могут быть выражены через непрерывные фермионные моды $b_\pm(\nu)$ формулами

$$\mathcal{X}_\pm(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\ b_\pm(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\nu\right)e^{i\nu\theta}, \quad \mathcal{Z}_\pm(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\ \frac{b_\pm(\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\nu\right)}e^{i\nu\theta},$$

которые позволяют исследовать коммутационные соотношения и аналитические свойства матричных элементов произведений операторов 'рассеяния'.

Следующим шагом является построение бозонизации операторов 'рассеяния'. Для этого рассматриваются нейтральные заряды, которые получаются из нейтральных сохраняющихся токов и имеющие следующий вид

$$a_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\ e^{i\lambda\theta}{:}\mathcal{Z}_-(\theta)\Lambda_+(\theta){:}, \quad \tilde{a}_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\ e^{i\lambda\theta}{:}\Lambda_-(\theta)\mathcal{Z}_+(\theta){:},$$

где нормальное упорядочение определено относительно фермионного вакуума. Используя канонические антикоммутационные соотношения для фермионных мод

$$\{b_\pm(\nu), b_\pm(\nu')\} = 0, \quad \{b_+(\nu), b_-(\nu')\} = \delta(\nu+\nu')$$

можно показать, что нейтральные заряды образуют две алгебры Гейзенберга

$$[a_\lambda, a_\mu] = [\tilde{a}_\lambda, \tilde{a}_\mu] = \lambda\delta(\lambda+\mu)$$

и, следовательно, в силу коммутационных соотношений,

$$\begin{aligned} [a_\lambda, \mathcal{Z}_-(\theta)] &= e^{-i\lambda\theta}\mathcal{Z}_-(\theta), \quad [a_\lambda, \mathcal{X}_+(\theta)] = -e^{-i\lambda\theta}\mathcal{X}_+(\theta), \qquad (9) \\ [\tilde{a}_\lambda, \mathcal{X}_-(\theta)] &= e^{-i\lambda\theta}\mathcal{X}_-(\theta), \quad [\tilde{a}_\lambda, \mathcal{Z}_+(\theta)] = -e^{-i\lambda\theta}\mathcal{Z}_+(\theta) \qquad (10) \end{aligned}$$

могут быть использованы для бозонизации операторов 'рассеяния'. Эти формулы позволяют бозонизовать операторы $\mathcal{X}_+(\theta)$ и $\mathcal{Z}_-(\theta)$ в терминах свободного бозонного поля, построенного из непрерывных бозонов a_λ, а операторы $\mathcal{X}_-(\theta)$ и $\mathcal{Z}_+(\theta)$ в терминах аналогичного свободного поля, построенного из бозонов $\tilde{a}_\lambda$. Однако в силу соотношений (8) все операторы рассеяния должны выражаться либо через бозоны a_λ, либо через $\tilde{a}_\lambda$. Легко проверить, что эти операторы не образуют между собой замкнутой алгебры. Поэтому, чтобы обеспечить соотношения (8) на уровне бозонизации, вводятся экранирующие токи $\mathcal{E}(u)$ и $\tilde{\mathcal{F}}(u)$ такие, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_+(\theta) &= 2\pi^2 i\int_{C_1} du\ e^{\theta-u}\mathcal{Z}_-(\theta)\mathcal{E}(u) - 2\pi^2 i\int_{C_2} du\ e^{\theta-u}\mathcal{E}(u)\mathcal{Z}_-(\theta) \\ &= \mathcal{X}_+(\theta+\pi i) + \mathcal{X}_+(\theta-\pi i), \qquad (11) \\ \mathcal{Z}_-(\theta) &= 2\pi^2 i\int_{C_1} du\ e^{\theta-u}\mathcal{Z}_+(\theta)\tilde{\mathcal{F}}(u) - 2\pi^2 i\int_{C_2} du\ e^{\theta-u}\tilde{\mathcal{F}}(u)\mathcal{Z}_+(\theta) \\ &= \mathcal{X}_-(\theta+\pi i) + \mathcal{X}_-(\theta-\pi i). \qquad (12) \end{aligned}$$

Далее рассматривается квантовая матрица монодромии в модели Sine-Gordon при угловом квантовании, ассоциированная с лучом $\alpha = \text{const}$. С.Лукьянов доказал, что матричные элементы этой матрицы монодромии являются квантовыми аналогами классических функций Йоста, связанных с интегралами движения в рассматриваемой модели. Интерпретация операторов $\mathcal{Z}_\pm(\theta)$ как операторов описывающих состояния, приводит к естественному физическому требованию коммутативности этих операторов и матричных элементов $Z'_\pm(\alpha)$ угловой матрицы монодромии с точностью до некоторой скалярной фазовой функции. Это требование позволяет построить бозонизацию оператора $Z'_-(\alpha)$ через a_λ, а $Z'_+(\alpha)$ через $\tilde{a}_\lambda$. Требование бозонизации операторов $Z'_\pm(\alpha)$ в одном и том же фоковском пространстве позволяет ввести вторую пару экранирующих токов $\tilde{\mathcal{E}}(u)$ и $\mathcal{F}(u)$ такую, что либо пара $\mathcal{E}(u)$ и $\mathcal{F}(u)$, либо пара $\tilde{\mathcal{E}}(u)$ и $\tilde{\mathcal{F}}(u)$ образуют замкнутую алгебру на уровне бозонизации. Как будет показано в следующем параграфе, эта алгебра совпадает с алгеброй динамических симметрий для модели Sine-Gordon в точке свободных фермионов ($\beta^2 = 1$) и при значении центрального заряда равного 1.

В § **2.2** эта алгебра токов формулируется при произвольном допустимом значении перенормированной константы взаимодействия в модели Sine-Gordon $\xi = \frac{\beta^2}{2-\beta^2}$ и обозначается $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$. Образующие алгебры экранирующих токов собраны в производящие функции, из которых можно составить L-оператор

$$L(u,\xi) = \begin{pmatrix} L_{++}(u,\xi) & L_{+-}(u,\xi) \\ L_{-+}(u,\xi) & L_{--}(u,\xi) \end{pmatrix}$$

так, что коммутационные соотношения в алгебре задаются соотношениями

$$[c, L(u,\xi)] = 0\ , \qquad e^{aK}L(u,\xi) = L(u+a,\xi)e^{aK}\ ,$$

$$R^+(u_1-u_2,\xi+c)L_1(u_1,\xi)L_2(u_2,\xi) = L_2(u_2,\xi)L_1(u_1,\xi)R^+(u_1-u_2,\xi)\ , \quad (13)$$

$$\mathrm{qdet}L(u,\xi) = L_{++}(u-i\pi,\xi)L_{--}(u,\xi) - L_{+-}(u-i\pi,\xi)L_{-+}(u,\xi) = 1\ , \quad (14)$$

где c есть центральный элемент в этой алгебре, оператор K имеет физический смысл оператора буста, а R-матрица практически совпадает с S-матрицей солитон-антисолитонного рассеяния в модели Sine-Gordon

$$\mathcal{R}^+(u,\xi) = \tau^+(u)\mathcal{R}(u,\xi), \quad \mathcal{R}(u,\xi) = r(u,\xi)\overline{\mathcal{R}}(u,\xi)\ , \quad (15)$$

$$\overline{\mathcal{R}}(u,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u,\xi) & c(u,\xi) & 0 \\ 0 & \tilde{c}(u,\xi) & b(u,\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b(u,\xi) = \frac{\mathrm{sh}\,\frac{u}{\xi}}{\mathrm{sh}\,\frac{u-\pi i}{\xi}}\ , \quad c(u,\xi) = -\frac{\mathrm{sh}\,\frac{i\pi}{\xi}}{\mathrm{sh}\,\frac{u-\pi i}{\xi}}\ , \quad \tau^+(u) = i\,\mathrm{cth}\left(\frac{u}{2}\right)\ ,$$

$$r(u,\xi) = \exp\left(2i\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\mathrm{sh}\,\lambda/2}{\mathrm{sh}\,\lambda}\frac{\mathrm{sh}\,(\xi-1)\lambda/2}{\mathrm{sh}\,\xi\lambda/2}\sin\left(\frac{\lambda u}{\pi}\right)\right)\ . \quad (16)$$

Учитывая условие квантового детерминанта (14) L-оператор можно представить в виде разложения Гаусса

$$L(u,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & f(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k(u+i\pi)^{-1} & 0 \\ 0 & k(u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e(u) & 1 \end{pmatrix},$$

а экранирующие токи $E(u)$ и $F(u)$ связать с гауссовыми координатами формулами задачи Римана

$$e\left(u-\frac{ic\pi}{4}\right) + e\left(u-i\pi\xi-\frac{ic\pi}{4}\right) = \xi\sin(\pi/\xi)E(u)\ , \quad (17)$$

$$f\left(u+\frac{ic\pi}{4}\right) + f\left(u-i\pi\xi'+\frac{ic\pi}{4}\right) = \xi'\sin(\pi/\xi')F(u)\ , \quad (18)$$

где $\xi' = \xi + c$. Далее в диссертации рассматривается бозонизация алгебры $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$ экранирующих токов на уровне $c = 1$ непрерывными бозонами, удовлетворяющим коммутационным соотношениям,

$$[a_\lambda, a_\mu] = \lambda\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi\lambda}{2}}{\mathrm{sh}\,\pi\lambda}\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi\lambda(\xi+1)}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi\lambda\xi}{2}}\delta(\lambda+\mu) = c(\lambda)\delta(\lambda+\mu)$$

и доказывается совпадение этой бозонизации при $\xi = 1$ с полученной из анализа углового квантования массивных фермионов. У алгебры $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$ кроме бесконечномерных представлений на уровне $c = 1$ есть конечно-мерные представления при $c = 0$. Следуя идеологии углового квантования на бесконечных решетках, вводятся

два типа сплетающих операторов между представлениями уровня 1 и тензорными произведениями представлений уровней 1 и 0. Бозонизация алгебры экранирующих токов и нестандартное коумножение в алгебре экранирующих токов

$$\Delta L_{ij}(u,\xi) = \sum_{k=\pm} L_{kj}(u-i\pi c^{(2)}/4, \xi+c^{(2)}) \otimes L_{ik}(u+i\pi c^{(1)}/4,\xi)$$

позволяют получить бозонизацию компонент сплетающих операторов и вычислить их коммутационные соотношения. Доказывается, что операторы первого типа коммутируют на R-матрицу из ксммутационных соотношений элементов матрицы монодромии в модели Sine-Grdon с параметром деформации $q' = \exp\left(\pi i\frac{\xi}{\xi+1}\right)$, а операторы второго типа на S-матрицу рассеяния асимптотических состояний в этой модели, которая отражает квантово-групповую природу пространства состояний этой модели с дуальным параметром деформации $q = \exp\left(\pi i\frac{\xi+1}{\xi}\right)$. Таким образом, представления уровня 1 алгебры $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$ дают естественное объяснение двух квантово-групповых симметрий в модели Sine-Gordon с дуальными параметрами деформации q и q'. В пределе к точке свободных фермионов $\xi \to 1$ компоненты сплетающих операторов первого и второго типа переходят в компоненты квантовых функций Йоста $\mathcal{Z}'_\pm(\alpha)$ и в компоненты данных рассеяния для свободных массивных фермионных полей $\mathcal{Z}_\pm(\theta)$ соответственно.

В **§ 2.3** проводится подробное исследование пространства асимптотических состояний в модели Sine-Gordon с использованием свойств и структур алгебры экранирующих токов $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$. Полное гильбертово пространство состояний в этой модели отождествляется с тензорным произведением $\mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_R$ двух взаимно дуальных бесконечномерных модулей уровней 1 и -1 над алгеброй $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$. Состояниям сопоставляются операторы, действующие в одном из модулей, в частности, асимптотические состояния $|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$ отождествляются с произведениями операторов

$$|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = Z^*_{\epsilon_1}(\theta_1)\ldots Z^*_{\epsilon_n}(\theta_n)e^{\pi K}\ , \quad (19)$$

продолженными аналитически на вещественную ось, где $Z^*_\pm(\theta)$ сплетающие операторы второго типа, а физический вакуум отождествляется с оператором буста $|\mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{ph}} = e^{\pi K}$. Число n в (19) означает число элементарных возбуждений или 'квазичастиц', участвующих в образовании этого состояния.

Сопряженные состояния задаются произведениями дуальных операторов $Z_\pm(\theta) = Z^*_\mp(\theta+\pi i)$:

$${}_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}\langle\theta_1,\ldots,\theta_n| = e^{\pi K}Z_{\epsilon_1}(\theta_1)\ldots Z_{\epsilon_n}(\theta_n)\ .$$

Форм-факторы оператора O могут быть представлены в виде следовой формулы

$${}_{\mathrm{ph}}\langle\mathrm{vac}|O|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_R}\left(e^{2\pi K}\tilde{O}Z^*_{\epsilon_1}(\theta_1)\ldots Z^*_{\epsilon_n}(\theta_n)\right)\ , \quad (20)$$

где $\tilde{O}$ является некоторым оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}_R$ и соответствующим исходному локальному оператору O. Действие матрицы монодромии в полном гильбертовом пространстве модели, которое является прямой суммой подпространств $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ с четным $\mathcal{H}_0$ и нечетным $\mathcal{H}_1$ числом квазичастиц задается формулой

$$\mathcal{T}_{\epsilon\epsilon'}(\alpha)\cdot X_k = (g'(\xi))^{-1}\ \epsilon^k Z'_\epsilon(\alpha)\cdot X_k \cdot Z'_{-\epsilon'}(\alpha), \quad k = 0,1 \quad (21)$$

и стабильность физического вакуумного вектора является следствием свойств сплетающих операторов $Z'_{\pm}(\alpha)$ первого типа. Показано как квантовые симметрии пространства состояний в модели Sine-Gordon превращаются в классические в точке свободных фермионов при $\xi \to 1$.

В § **2.4** сформулированы аксиомы форм-факторов в модели SG. По конструкции, форм-факторы, представленные следами (20), автоматически удовлетворяют всем аксиомам за исключением одной:

$$2\pi\iota \operatorname*{res}_{\theta_n=\theta_{n-1}-\pi i} F(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = F(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2})_{\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_{n-2}}\delta_{\epsilon_n,-\epsilon_{n-1}}$$
$$\times\left(\delta_{\epsilon_1}^{\epsilon'_1}\cdots\delta_{\epsilon_{n-2}}^{\epsilon'_{n-2}} - S_{\epsilon_1,\tau_1}^{\epsilon'_1,\epsilon'_{n-1}}(\theta_1-\theta_{n-1})\ldots S_{\epsilon_{n-2},\epsilon_{n-1}}^{\epsilon'_{n-2},\tau_{n-3}}(\theta_{n-2}-\theta_{n-1})\right), \tag{22}$$

которая описывает аналитические свойства форм-факторов как функций быстрот и позволяет реконструировать все форм-факторы для данного локального оператора зная точный ответ для минимального форм-фактора того же оператора. В этом параграфе непосредственным вычислением проверяется, что след (20) удовлетворяет аксиоме (22), и, следовательно, теория представлений алгебры экранирующих токов $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$ дает решение форм-факторной программы в модели Sine-Gordon.

<u>Глава 3</u>. В третьей главе изучаются обобщенные форм-факторы в $SU(2)$-инвариантной модели Тирринга. Алгебра динамических симметрий в этой модели получается из алгебры $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$ в пределе $\xi \to +\infty$ и в данной главе проверяется, что теория представлений этой алгебры, необходимая для алгебраического анализа данной модели, имеет хорошо определенный предел при $\xi \to +\infty$. Также в этой главе явно вычисляются следы от произведений сплетающих операторов и проводится отождествление полученных интегральных формул с форм-факторами операторов тока и тензора энергии-импульса. Векторнозначная часть интегрального представления для форм-фактора отождествляется с обобщенным вектором Бете, построенным в терминах токовых образующих алгебры экранирующих токов в $SU(2)$-инвариантной модели Тирринга.

В § **3.1** формулируется алгебра экранирующих токов $\mathcal{A}_0(\widehat{sl}_2)$ для этой модели как предел при $\xi \to +\infty$ алгебры $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$. Проверяется, что коммутационные соотношения в этой алгебре, записанные в терминах производящих L-операторов, совпадают с коммутационными соотношениями в центрально-расширенном дубле янгиана. Было давно известно, что эта алгебра является алгеброй динамических симметрий в некоторых массивных интегрируемых моделях теории поля, однако, ее стандартная реализация не позволяла применить методы алгебраического анализа в этих моделях. Хотя коммутационные соотношения для алгебры $\mathcal{A}_0(\widehat{sl}_2)$ и дубля янгиана совпадают, как топологические алгебры они существенно различаются. В отличие от алгебры $\mathcal{A}_0(\widehat{sl}_2)$, центрально-расширенный дубль янгиана является фильтрованной бесконечномерной алгеброй и его теория представлений плохо согласована с приложениями в теории поля. Далее, бозонизация алгебры $\mathcal{A}_0(\widehat{sl}_2)$ на уровне 1 и сплетающих операторов двух типов между бесконечномерными представлениями построены как пределы аналогичных конструкций в алгебре $\mathcal{A}_{1/\xi}(\widehat{sl}_2)$.

В § **3.2** вычисляются следы от произведений сплетающих операторов, используя технику, предложенную Л.Клавели и Дж.Шапиро в дуальных моделях. Результатом этого вычисления является интегральное представление для следов типа интегралов

Барнса. В этом же параграфе разрабатываются методы вычисления этих интегралов и исследуется вопрос, когда эти интегралы могут быть вычислены точно.

В § **3.3** подробно изучается след от произведения двух операторов первого типа и произвольного четного числа сплетающих операторов второго типа, и выясняются условия, при которых этот след совпадает с форм-фактором нейтральной компоненты тока в $SU(2)$-инвариантной модели Тирринга, полученного в рамках стандартного S-матричного подхода:

$$\prod_{i<j}^{2n}\zeta^-(\beta_i-\beta_j)\ F(\beta_1,\cdots,\beta_{2n})_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{2n}}w^{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{2n}}(\beta_1,\cdots,\beta_{2n}), \tag{23}$$

где компоненты форм-фактора $F(\beta_1,\cdots,\beta_{2n})_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{2n}}$ в специальном базисе $w^{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{2n}} \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2n}$, заданы детерминантными формулами:

$$\frac{\left(\sum\limits_{j\in B^+}\beta_j - \sum\limits_{j\in B^-}\beta_j - n\pi i\right)}{\prod\limits_{i\in B^+,\ j\in B^-}(\beta_i-\beta_j-\pi i)} \cdot \det_{j,\ell=1,2,\cdots,n-1}\left\| \int_{-\infty}^{\infty} dv\,\Omega_j(v|\beta_{B^-},\beta_{B^+})e^{(n-2\ell+1)v}\right\|. \tag{24}$$

Множество быстрот $\{\beta_1,\cdots,\beta_{2n}\}$ поделено на два подмножества β_{B^+} и β_{B^-} согласно правила $B^+ = \{j : \epsilon_j = +\}$, $B^- = \{j : \epsilon_j = -\}$. Формула (24) содержит деформированные 'дифференциалы'

$$\Omega_j(v|\beta_{B^-},\beta_{B^+}) = \prod_{j=1}^{2n}\varphi(v-\beta_j)Q_j(v), \quad j = 1,\ldots,n-1,$$

определяемые фазовой функцией $\varphi(v)$

$$\varphi(v) = \Gamma\left(\frac{v}{2\pi i}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{v}{2\pi i}\right)$$

и полиномами

$$Q_j(v|\beta_{B^-},\beta_{B^+}) = \prod_{j\in B^+}(v-\beta_j)\left[T_{\pi i}\left(v^{j-n}\prod_{j\in B^-}(v-\beta_j)\right)\right]_+ +$$
$$+ \prod_{j\in B^-}(v-\beta_j-\pi i)\left[T_{\pi i}\left((v-\pi i)^{n-j}\prod_{j\in B^+}(v-\beta_j)\right)\right]_+ .$$

Для произвольной рациональной функции $f(v)$ символ T_a означает разностную производную

$$T_a(f(v)) = f(v) - f(v-a),$$

а обозначение $[f(v)]_+$ означает полиномиальную часть рациональной функции $f(v)$. Как векторнозначная функция быстрот β_j, форм-фактор (23) удовлетворяет разностному или деформированному уравнению Книжника-Замолодчикова, интегральные решения которого используются в S-матричном подходе для восстановления форм-факторов локальных операторов.

Кроме стандартного S-матричного подхода, общая теория построения интегральных решений разностных уравнений Книжника-Замолодчикова была развита в работах А.Варченко и В.Тарасова. Однако, для одних и тех же форм-факторов обе эти теории, также как и алгебраический подход, предложенный в настоящей диссертации, давал различные интегральные представления, которые отличались как количеством интегралов, так и структурой подынтегральных выражений и формой контуров интегрирования. Так, $2n$-частичный форм-фактор (24), вычисленный в S-матричном подходе, задается $n-1$-кратным интегралом, теория уравнений Книжника-Замолодчикова дает для этой величины n-кратное интегральное представление, а алгебраический подход

$$\prod_{j<j'}^{2n}\zeta(\beta_j-\beta_{j'})\prod_{j=1}^{2n}\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{\alpha-\beta_j}{2}\right)\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{n}\int_C\frac{dv_k}{2\pi i}\prod_{j=1}^{2n}\frac{\varphi(v_k-\beta_j)}{(v_k-\beta_j+\pi i)}P_\epsilon(v;\beta)\prod_{k<k'}^{n}(v_k-v_{k'}+\pi i)\times$$
$$\times\prod_{k<k'}^{n}\mathrm{sh}(v_k-v_{k'})\prod_{k=1}^{n}\mathrm{sh}\,(v_k-\alpha)\int_{C'}\frac{du}{2\pi i}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2n}\mathrm{sh}\left(\frac{u-\beta_j}{2}\right)}{\mathrm{sh}(u-\alpha)\prod\limits_{k=1}^{n}\mathrm{sh}\,(u-v_k)}\,, \tag{25}$$

$n+1$-кратное интегральное представление. В (25) интегрирование по переменной u появляется из бозонизации операторов первого типа, а остальные n интегрирований по переменным v_k, $k=1,\ldots,n$ – из бозонизации операторов второго типа. В формуле (25) полином $P_\epsilon(v;\beta)$

$$P_\epsilon(v;\beta)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j>b_k}(v_k-\beta_j)\prod_{j<b_k}(v_k-\beta_j+\pi i),\quad b_k\in B^+ \tag{26}$$

определяет зависимость компоненты форм-фактора от векторного индекса $\epsilon=\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{2n}\}$ при разложении последнего по базису $w^{\epsilon_1}\otimes\cdots\otimes w^{\epsilon_{2n}}$ в тензорном произведении двумерных пространств $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2n}$, где $w^\pm$ вектора стандартного базиса в $\mathbb{C}^2$. Контур C' в интегрировании по переменной u идет параллельно вещественной прямой от $-\infty$ до ∞, так что точки $\alpha-i\pi(r+1)$, $v_k-i\pi(r+1)$ находятся под контуром C', а точки $\alpha+i\pi r$, $v_k+i\pi r$ находятся над контуром C', для $r=0,1,2,\ldots$ и $k=1,\ldots,n$. Контур интегрирования C в формуле (25) существенно отличается от контура интегрирования в формуле (24) и проходит от $-\infty$ до ∞ ниже точек $\beta_j+i\pi(2r-1)$ и выше точек $\beta_j-2i\pi r$ для $r=0,1,2,\ldots$.

В диссертации было показано, что структура подынтегрального выражения, возникающая при вычислении следов от произведений двух и $2n$ сплетающих операторов первого и второго типа, позволяет провести интегрирование по переменной u явно. В результате получается n-кратный интеграл того же типа, что и в теории уравнений КЗ. Далее было показано, что структура подынтегрального выражения в этом интеграле такова, что одно из интегрирований можно опять выполнить явно

и получить в результате интегральную формулу для форм-фактора (23). Тем самым было окончательно установлено совпадение всех трех теорий в приложении к рассматриваемой двумерной квантовой интегрируемой теории поля.

В последнем параграфе **§ 3.4** третьей главы изучается векторная часть формулы (25)[1]

$$\mathrm{Sym}_v\left(\prod_{i<j}\frac{v_i-v_j+\hbar}{v_i-v_j}\;\frac{\sum_{\{\epsilon\}}P_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{2n}}(v;\beta)w^{\epsilon_1}\otimes\cdots\otimes w^{\epsilon_{2n}}}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{2n}(v_i-\beta_j+\hbar)}\right),$$

где симметризация функции $F(v_1,\ldots,v_n)$ означает

$$\mathrm{Sym}_v\left(F(v_1,\ldots,v_n)\right)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}F(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(n)})\,.$$

Точнее, доказывается соотношение для обобщенных векторов Бете

$$\mathrm{Sym}_v\left(\prod_{i<j}\frac{v_i-v_j+\hbar}{v_i-v_j}\;\frac{\sum_{\{\epsilon\}}P_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{2n}}(v;\beta)w^{\epsilon_1}\otimes\cdots\otimes w^{\epsilon_{2n}}}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{2n}(v_i-\beta_j+\hbar)}\right)=$$
$$=\Delta^{(2n)}\left(B^\pm(v_1)\cdots B^\pm(v_n)D^\pm(v_1)^{-1}\cdots D^\pm(v_n)^{-1}\right)\Omega(\beta)\,, \tag{27}$$

где операторы $B^\pm(v)$ и $D^\pm(v)$ используются при R-матричной формулировке алгебры $\mathcal{A}_0(\widehat{sl}_2)$

$$L^\pm(v)=\begin{pmatrix}A^\pm(v) & B^\pm(v)\\ C^\pm(v) & D^\pm(v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^\pm(v+\hbar)^{-1}+f^\pm(v)k^\pm(v)e^\pm(v) & f^\pm(v)k^\pm(v)\\ k^\pm(v)e^\pm(v) & k^\pm(v)\end{pmatrix}$$

и действуют в конечномерном представлении $\mathbb{C}^2(\beta)$ этой алгебры по формулам

$$\pi_\beta\left(e^\pm(v)\right)w^-=0,\quad \pi_\beta\left(f^\pm(u)\right)w^+=0,$$
$$\pi_\beta\left(e^\pm(v)\right)w^+=\frac{\hbar}{v-\beta+\hbar}\,w^-,\quad \pi_\beta\left(f^\pm(u)\right)w^-=\frac{\hbar}{v-\beta+\hbar}\,w^+,$$
$$\pi_\beta\left(h^\pm(v)\right)w^-=\frac{v-\beta}{v-\beta+\hbar}\,w^-,\quad \pi_\beta\left(h^\pm(v)\right)w^+=\frac{v-\beta+2\hbar}{v-\beta+\hbar}\,w^+,$$

где $h^\pm(v)=k^\pm(v+\hbar)^{-1}k^\pm(v)^{-1}$. Действие этих операторов в тензорном произведении $\mathbb{C}^2(\beta_1)\cdots\mathbb{C}^2(\beta_{2n})$ задается $2n$-кратной итерацией отображения коумножения, заданного на элементах L-операторов формулами

$$\Delta L^\pm_{ij}(u)=\sum_{k=1}^{2}L^\pm_{kj}(u)\otimes L^\pm_{ik}(u)\,, \tag{28}$$

а вектор $\Omega(\beta)=w^-\otimes\cdots\otimes w^-\in\mathbb{C}^2(\beta_1)\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^2(\beta_{2n})$ удовлетворяет соотношениям

$$\Delta^{(2n)}\left(C^\pm(v)\right)\Omega(\beta)=0,\quad \Delta^{(2n)}\left(D^\pm(v)\right)\Omega(\beta)=\prod_{j=1}^{2n}\rho^\pm(v-\beta_j)\Omega(\beta)\,,$$

[1] $\hbar=\pi i$.

для некоторых скалярных функций $\rho^{\pm}(v)$. Используя коумножение (28) можно доказать тождество (27) прямым вычислением, однако в диссертации приводится другой способ его доказательства, который позволяет обобщение на случай алгебр старшего ранга, где вычисления с помощью формулы (28) весьма затруднительны. Соотношение (27) доказывается в три этапа. Во-первых, произведение матричных элементов L-операторов, стоящих под степенью коумножения в правой части равенства (27) сводится к некоторой комбинации мономов, содержащих только гауссовы координаты $f^+(v_k)$. Во-вторых, доказывается, что эта комбинация гауссовых координат совпадает с проекцией произведения полных токов $f(v_1)\cdots f(v_n)$ на подалгебру, образованную полутоками $f^+(v_k)$, $k=1,\ldots,n$. И, наконец, в-третьих, показывается, что стандартное правило коумножения (28) переставляется с этой проекцией, меняя само коумножение на более простое правило коумножения полных токов, введенное ранее в работе В.Дринфельда по новой или токовой реализации янгианов и квантовых аффинных алгебр. Это простое правило коумножения делает равенство (27) очевидным.

Соотношение (27) оказалось очень важным, так как позволило связать векторнозначные функции, участвующие в построении форм-факторов в интегрируемых моделях с алгебрами токов. Это наблюдение было развито в следующих двух главах диссертации для алгебр токов старшего ранга, что позволило переформулировать иерархический анзац Бете на универсальном уровне в терминах алгебр токов и построить метод проекций, который дает эффективное решение нетривиальных иерархических соотношений, возникающих в этом методе.

Глава 4. В четвертой главе была построена общая теория проекций на пересечения борелевских подалгебр в алгебрах токов, отвечающих разным поляризациям. В диссертации метод проекций был развит для квантовых аффинных алгебр. Результаты, полученные в этой и следующей главах, могут быть применены также для других бесконечномерных алгебр, отличающихся от квантовых аффинных алгебр свойствами автоморфности токов. В четвертой главе метод проекций для построения универсальных векторов Бете применялся в случае квантовой аффинной алгебры ранга 2 – $U_q(\widehat{sl}_3)$.

В § **4.1** алгебра $U_q(\widehat{sl}_3)$ сформулирована в двух реализациях, как образованная генераторами Шевалье и токовыми образующими Дринфельда, которые являются модами токов $e_i(z)$, $f_i(z)$, $\psi_i^{\pm}(z)$, где индекс $i=(\alpha,\beta)$ принадлежит множеству простых положительных корней алгебры Ли sl_3. С каждой из этих реализаций была ассоциирована естественная поляризация – разложение всей алгебры на две дуальные хопфовы подалгебры или разложение на борелевские подалгебры разных типов. Далее были описаны пересечения между борелевскими подалгебрами разных типов, и корректно определены проекционные операторы на эти пересечения. Основная техническая сложность в этом разделе состояла в получении эффективных формул для проекций произведений токов, отвечающих разным простым корням. Эта задача была решена путем введения в рассмотрения сложных или составных токов, являющихся, в некотором смысле, производящими функциями генераторов Картана-Вейля в квантовой аффинной алгебре $U_q(\widehat{sl}_3)$.

В § **4.2** вводится универсальная весовая функция $W(t_{i_1},\ldots,t_{i_n})$ как элемент из

$U\{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}\}$, где

$$U\{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}\} \;=\; U_q(\widehat{sl}_3)[t_{i_1},t_{i_1}^{-1},\ldots,t_{i_n},t_{i_n}^{-1}]\left[\left[\frac{t_{i_2}}{t_{i_1}},\frac{t_{i_3}}{t_{i_2}},\ldots,\frac{t_{i_n}}{t_{i_{n-1}}},\frac{1}{t_{i_n}}\right]\right].$$

Тем самым, $W(t_{i_1},\ldots,t_{i_n})$ является формальным степенным рядом по переменным t_{i_2}/t_{i_1}, $t_{i_3}/t_{i_2},\ldots,t_{i_n}/t_{i_{n-1}}$, $1/t_{i_n}$ с коэффициентами в полиномах $U_q(\widehat{sl}_3)[t_{i_1},t_{i_1}^{-1},\ldots,t_{i_n},t_{i_n}^{-1}]$. Обозначим через Π набор $\{\alpha,\beta\}$. Назовем упорядоченный набор $I=a_1,\ldots,a_{|I|}$ вместе с отображением $\iota: I\to\Pi$ упорядоченным Π-мультимножеством. Пусть V – представление алгебры $U_q(\widehat{sl}_3)$ и v – вектор в V. Назовем v сингулярным весовым вектором относительно токовой борелевской подалгебры $U_E=\{e_i(z),\psi^-(z)\}$, если

$$e_i(z)v=0\,,\quad \psi_i^{\pm}(z)v=\lambda_i(z)v\,,\quad i=\alpha,\beta\,, \tag{29}$$

где $\lambda_i(z)$ является мероморфной функцией, разлагаемой в ряд по степеням z^{-1} для $\psi_i^+(z)$ и в ряд по степеням z для $\psi_i^-(z)$. Представление V порождено сингулярным относительно U_E весовым вектором $v\in V$, если оно порождено действием алгебры $U_q(\widehat{sl}_3)$ на вектор v. Универсальная весовая функция определяется следующими свойствами:

- для любого представления V, порожденного сингулярным относительно U_E весовым вектором v, функция
$$w_V(t_{i_1},\ldots,t_{i_n})=W(t_{i_1},\ldots,t_{i_n})v$$
сходится в области $|t_{i_1}|\gg\cdots\gg|t_{i_n}|$ к мероморфной V-значной функции и является обобщенным вектором Бете;
- если $I=\emptyset$, то $W=1$ и $w_V=v$;
- если $V=V_1\otimes V_2$ – тензорное произведение представлений старшего веса со старшими векторами v_1, v_2 и соответствующими рядами $\{\lambda_i^{(1)}(z)\}$ и $\{\lambda_i^{(2)}(z)\}$, $i=\alpha,\beta$, то для любого упорядоченного Π-мультимножества I справедливы соотношения
$$w_V(\{t_a|_{a\in\, I}\})=\sum_{I=I_1\coprod I_2} w_{V_1}(\{t_a|_{a\in\, I_1}\})\otimes w_{V_2}(\{t_a|_{a\in\, I_2}\})\times$$
$$\prod_{a\in I_1}\lambda^{(2)}_{\iota(a)}(t_a)\times\prod_{a<b,\ a\in I_1,\ b\in I_2}\tfrac{q^{-(\iota(a),\iota(b))}t_a-t_b}{t_a-q^{-(\iota(a),\iota(b))}t_b}\,.$$

Если в весовой функции в качестве параметров выбрать решения соответствующей системы уравнений Бете, то получится набор векторов Бете. Весовая функция при свободных параметрах систематически использовалась при исследовании решений q-разностного уравнения Книжника-Замолодчикова. Далее формулируется основное утверждение четвертой главы о том, что элемент

$$W(t_{i_1},\ldots,t_{i_n})=P\left(f_{\iota(i_1)}(t_{i_1})\cdots f_{\iota(i_n)}(t_{i_n})\right),$$

заданный проекцией от произведения токов является универсальной весовой функцией. Вычисление универсальной весовой функции

$$W(t_1,\ldots,t_a,s_1,\ldots,s_b) \;=\; P(f_\alpha(t_1)\cdots f_\alpha(t_a)f_\beta(s_1)\cdots f_\beta(s_b))$$

сводится к вычислению проекций от произведений токов, называемых струнами,

$$f_\alpha(u_1)\cdots f_\alpha(u_a)f_{\alpha+\beta}(u_{a+1})\cdots f_{\alpha+\beta}(u_{a+b}),\quad f_{\alpha+\beta}(u_1)\cdots f_{\alpha+\beta}(u_a)f_\beta(u_{a+1})\cdots f_\beta(u_{a+b})$$

которые содержат составной или сложный ток

$$f_{\alpha+\beta}(z)=\oint f_\alpha(z)f_\beta(w)\,\frac{dw}{2\pi iw}-\oint\frac{q^{-1}-z/w}{1-q^{-1}z/w}f_\beta(w)f_\alpha(z)\,\frac{dw}{2\pi iw}\,.$$

В **§ 4.3** и **§ 4.4** изучаются аналитические свойства струн и разрабатываются методы вычислений проекций от них с использованием присоединенного действия токов $f_\beta(s)$ на $f_\alpha(z)$. Это присоединенное действие обладает свойством

$$\mathrm{ad}_{f_\beta(s_1)f_\beta(s_2)}\left(f_\alpha(t)\right)=0\ ,$$

которое эквивалентно соотношениям Серра для токовых образующих.

<u>**Глава 5**</u> посвящена проверке основного утверждения предыдущей главы о совпадении универсальных весовых функций или обобщенных векторов Бете с проекциями от произведения токов, для случая алгебры $U_q(\widehat{gl}_N)$, где альтернативная конструкция построения этих объектов в терминах $U_q(\widehat{gl}_N)$ L-операторов известна из серии работ А.Варченко и В.Тарасова.

В **§ 5.1** формулируется L-операторная и токовая реализации алгебры $U_q(\widehat{gl}_N)$. Далее формулируются основные свойства весовых функций, ассоциированных с алгеброй $U_q(\widehat{gl}_N)$.

В **§ 5.2** весовые функции определяются по аналогии с результатами предыдущей главы в терминах проекций от произведений токов для алгебры $U_q(\widehat{sl}_N)$ и весовые функции для алгебры $U_q(\widehat{gl}_N)$ определяются с помощью стандартного вложения $\vartheta: U_q(\widehat{sl}_N)\hookrightarrow U_q(\widehat{gl}_N)$.

В **§ 5.3** для определенного мультимножества вида

$$\bar t_{\bar n}\ =\ \left\{t^1_1,\ldots,t^1_{n_1},\quad t^2_1,\ldots,t^2_{n_2},\quad\ldots\quad,t^{N-1}_1,\ldots,t^{N-1}_{n_{N-1}}\right\}$$

$U_q(\widehat{gl}_N)$ весовые функции определяются в терминах $U_q(\widehat{gl}_N)$ L-операторов. Эта конструкция весовых функций взята из работ А.Варченко и В.Тарасова.

В последнем параграфе **§ 5.4** пятой главы проводится отождествление двух разных конструкций для весовых функций путем сравнения иерархических соотношений, которым они удовлетворяют. Тем самым доказывается, что метод вычисления проекций, развитый в четвертой и пятой главах диссертации, позволяют эффективно решать соотношения рекурсии, возникающие в иерархическом анзаце Бете для интегрируемых моделей с произвольной алгеброй симметрий пространства состояний.

<u>**В Заключении**</u> сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

[1] S. Pakuliak. *Annihilation Poles for Form Factors in XXZ Model.* Internat. J. of Modern Phys. A **9** (1994), no. 12, 2087–2102.

[2] S. Pakuliak, A. Perelomov. *Relations Between Hyperelliptic Integrals.* Modern Phys. Lett. A **9** (1994), no. 19, 1791–1797.

[3] С. Пакуляк. *Бозонизация L-операторов для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$.* Теоретическая и Математическая Физика **104** (1995), no. 1, 810-822.

[4] S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak. *Intertwining Operators for the Central Extension of the Yangian Double.* Phys. Lett. A **222** (1996), no. 6, 381-392.

[5] Д. Лебедев, С. Пакуляк, С. Хорошкин. *Алгебра Замолодчикова–Фаддеева для дубля янгиана на уровне 1.* Теоретическая и Математическая Физика **110** (1997), no. 1, 25-45.

[6] S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak. *Traces of Intertwining Operators for the Yangian Double.* Lett. Math. Phys. **41** (1997), no. 1, 31-47.

[7] S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak. *Elliptic algebra in the scaling limit.* Comm. Math. Phys. **190** (1998), no. 3, 597-627.

[8] S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak, A. Stolin, V. Tolstoy. *Classical limit of the scaled eliptic algebra.* Compositio Mathematica **115** (1999), no. 2, 205–230.

[9] A. Nakayashiki, S. Pakuliak, V. Tarasov. *On solutions of KZ and qKZ equations at level zero.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique, **71** (1999), no. 4, 459–496.

[10] S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak. *Yangian algebras and classical Riemann problem.* "Moscow Seminar in Mathematical Physics 163–198, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **191**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[11] A. LeClair, S. Khoroshkin, S. Pakuliak. *Angular quantization of the Sine-Gordon model at the free fermion point.* Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999), no. 5, 1227-1287.

[12] J. Ding, S. Khoroshkin, S. Pakuliak. *Integral presentations for the universal $\mathcal{R}$-matrix.* Lett. Math. Phys. (2000) **53**, no. 2, 121–141.

[13] Дж. Динг, С. Пакуляк, С. Хорошкин. *Факторизация универсальной $\mathcal{R}$-матрицы для алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$.* Теоретическая и Математическая Физика (2000) **124**, no. 2, 180–214.

[14] С. Пакуляк, С. Хорошкин. *Весовая функция для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_3)$.* Теоретическая и Математическая Физика **145**(1) (2005), 3–34.

[15] S. Pakuliak. *Weight function and nested Bethe ansatz.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Mathematics and Statistics, **7** (2006), no. 7-8.

Получено 10 октября 2006 г.