ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-2005-189

На правах рукописи
УДК 539.12.01 + 514.764.214

САНТИЛЛАН
Освальдо Пабло

МНОГООБРАЗИЯ С РЕДУЦИРОВАННОЙ ГОЛОНОМИЕЙ В СУПЕРСТРУННЫХ ТЕОРИЯХ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2005

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А.П.Исаев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук С.О.Кривонос
ЛТФ, ОИЯИ

доктор физико-математических наук И.Л.Бухбиндер
Томский государственный университет, г. Томск

Ведущая организация:
ГНЦ ИФВЭ - Институт физики высоких энергий, г. Протвино.

Защита диссертации состоится "____" __________ 2006 г. в $15^{\underline{00}}$ на заседании диссертационного совета К 720.001.01 при Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "____" __________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета С.И. Федотов

Общая характеристика диссертации.

Актуальность темы. Модель Салама-Вайнберга - это квантовая теория поля, которая успешно объясняет два из четырех известных взаимодействий природы, а именно электромагнитные и слабые взаимодействия. Сильное взаимодействие в свою очередь описывается квантовой хромодинамикой, которая успешно согласуется с данными по неупругому рассеянию лептонов на нуклонах. Последнее, четвертое взаимодействие - гравитация - описывается на классическом уровне с помощью теории относительности Эйнштейна. Стандартная модель (модель Салама-Вайнберга плюс квантовая хромодинамика) с одной стороны, и гравитация Эйнштейна с другой, становятся несовместимыми на малых расстояниях или, что одно и то же, для высоких энергий, порядка массы Планка $M_{pl} \approx 10^{19}$ГэВ. Такие масштабы энергии пока являются неисследованной областью физики.

Теории суперструн пытаются объяснить физические явления в этом диапазоне энергий, и поскольку данные теории формулируются в пространствах с числом измерений > 4, существует большой интерес к вопросу редукции размерности за счет компактификаций лишних измерений. Многообразия с уменьшенной голономией играют существенную роль как компактифицированные многообразия суперструн и М-теории, сохраняющие определенное число суперсимметрий после компактификации, а также в качестве геометрического пространства модулей суперсимметричной сигма-модели, возникающего после компактификации. Настоящая диссертация связана с приложениями гиперкэлеровых и кватернионно-кэлеровых многообразий (которые являются $4n$-мерными пространствами с голономиями реализованными группами Ли $Sp(n) \times Sp(1)$ и $Sp(n)$ соответственно) в струнной теории. Кроме того в диссертации рассматриваются многообразия с G_2 и $Spin(7)$ голономиями. Данная диссертация также имеет дело с гиперкэлеровой геометрией с кручением и $SU(3)$ структурами в шести измерениях.

В течение последних двадцати лет стало ясно, что кватернионно-кэлерова и гиперкэлерова геометрия являются эффективным инструментом в квантовой теории поля независимо от наличия суперсимметрии. Например, пространство модулей магнитных монополей или пространство модулей инстантонов в теории Янга-Миллса в плоском пространстве являются гиперкэлеровыми [3]. Гиперкэлерова геометрия также возникает в сигма-моделях с N=4 суперсимметриями [10]. Если в действие сигма-модели включено слагаемое типа Весса-Зумино, то target- пространство (пространство модулей) будет гиперкэлеровым с кручениями (ГКК). Когда суперсимметрия является локальной, гипермультиплеты взаимодействуют с гравитонами и итоговое пространство модулей – это кватернионно-кэлерово пространство [4]. Эта геометрия также связана с построением фона (классических решений) одиннадцатимерной супергравитации в виде D-браны. Метрика бозонного target- пространства для $D = 4$ суперсимметричной сигма модели, полученной компактификацией суперструнной теории типа IIA на многообразие Калаби-Яу, также является гиперкэлеровой [13] (даже с учетом поправок за счет D-инстантонов). Таким образом, возникает интересная задача построить кватернионно-кэлерово и гиперкэлерово пространства, в том числе и с сингулярностями.

Одним из последних достижений в гиперкэлеровой геометрии является построение гиперкэлерова фактора (quotient) [5], простейший пример которого найден в рамках ADHM конструкции (это фактор гиперкэлерова многообразия более высокой размерности по определенной группе три-голоморфных изометрий). Важно напомнить, что идея этого построения имеет физическое и интуитивное основание, связанное с дуальностями суперсимметричной сигма-модели. Обратное построение было найдено Шваном [6]. Он показал как кватернионно-кэлерова метрика при D=4n может быть расширена до метрики кватернионных и гиперкэлеровых пространств в D=4$(n+1)$. Метод Швана использован для построения гиперкэлеровых пространств, применяемых в теориях с глобальными N=2 суперсимметриями. Это построение также важно для целей настоящей диссертации.

Задача классификации возможных групп голономий для римановых и псевдоримановых пространств достаточно стара. Она была поставлена Картаном и частично решена Бергером, который представил список возможных групп голономий для этих геометрий [1]. Математическая особенность уменьшения групп голономий n-мерного пространства от $SO(n)$ к подгруппе – это наличие глобально определенных тензоров α, которые являются инвариантными при параллельном переносе. Это свойство эквивалентно исчезновению их ковариантной производной, т.е. $D\alpha = 0$. Такой глобально определенный тензор является в некотором смысле аналогом инвариантного подпространства для группы Ли. Наличие инвариантного подпространства подразумевает редукцию $SO(n)$ к ее подгруппе Ли с более низкой размерностью. Общая особенность уменьшенной голономии – наличие ковариантной постоянной p-формы. Например, в $D = 4$ имеет место изоморфизм $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$ и пространство с голономией $SU(2)$ характеризуется ковариатно постоянным правосторонним (или левосторонним) спинором ϵ_R, определенным на всем многообразии. Присутствие ϵ_R подразумевает, что кривизна является самодуальной и что существует вращение системы отсчета, приводящее анти-самодуальную часть связности ω^a_b к нулю. Примеры – многообразия Егучи-Хансона и Тауба-Нута. Также для многообразия с голономией G_2 можно выбрать ортогональную систему отсчета e^i, в которой октонионная 3-форма

$$\Phi = e^1 \wedge e^2 \wedge e^7 + e^1 \wedge e^3 \wedge e^6 + e^1 \wedge e^4 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 + e^4 \wedge e^2 \wedge e^6$$

$$+ e^3 \wedge e^4 \wedge e^7 + e^5 \wedge e^6 \wedge e^7$$

и его дуальная 4-форма $*\Phi$ замкнуты. Эти формы являются действительно инвариантными относительно действия группы G_2, и их замкнутость эквивалентна присутствию коварянтно постоянного спинора η, такого что $D_i\eta = 0$. Напомним, что G_2 – это на самом деле подгруппа $SO(7)$, которая выделяется с помощью одномерного инвариантного подпространства. Существование этого подпространства - самая важная особенность с физической точки зрения, потому что число суперсимметрий, сохраняемое обычной процедурой Калуца-Клейна связано с числом таких спиноров на внутреннем многообразии.

Вообще говоря, если данная риманова метрика размерности n и допускает по крайней мере один ковариатно постоянный спинор η, удовлетворяющий $D_i\eta = 0$, то группа голономий будет $SU(\frac{n}{2})$, $Sp(\frac{n}{4})$, G_2 либо $Spin(7)$. Два последних случая соответствуют семи и восьми измерениям. Для метрики с голономией G_2 (и $Spin(7)$) существует только один η. После публикации работы Бергера вопрос о существовании метрики с голономией G_2 и $Spin(7)$ оставался открытым. Тридцать лет спустя после появления работы Бергера эта задача была решена Briантом и Саламоном [7], которые доказали ее существование, а также построили некоторые явные примеры [8]. Они нашли интересную связь между кватернионно-кэлеровой метрикой и пространством с уменьшенной голономией и показали, что большой класс метрик с уменьшенной голономией может быть построен как расширение четырехмерных кватернионно-кэлеровых пространств. Это называется расширением Бриант-Саламона, и имеет некоторую аналогию с построением Швана.

Пространства с G_2 голономией являются Ричи-плоскими. Их тензор кривизны R_{abcd} удовлетворяет обобщению условия самодуальности в пространстве $D = 7$, а именно,

$$R_{ab} = \pm\frac{c_{abcd}}{2}R_{cd}\,.$$

Структурные константы октонионов c_{abcd} в $D = 7$ играют роль, аналогичную символам Кронекера ε_{abcd} в $D = 4$. Самодуальность подразумевает G_2 голономию и то, что тензор кривизны является Ричи-плоским (то же самое утверждение имеет место в восьмимерном случае для голономии $Spin(7)$). Хотя условие самодуальности в итоге приводит к нелинейной системе уравнений, она, тем не менее, может быть решена в случаях с подходящей симметрией.

После работы Брианта были построены несколько явных примеров компактных и некомпактных G_2 метрик. В литературе есть примеры так называемых "слабых G_2 голономий" [12], которые снова являются фонами 11-мерной супергравитации, и которые также сохраняют N=1 суперсимметрию в $D = 4$. В этом случае существует нековариантно постоянный спинор η удовлетворяющий условию $D_i\eta \sim \lambda\gamma_i\eta$. Условие $R_{ij} = 0$ (Ричи-плоские многообразия) заменяется

в этом случае условием $R_{ij} \sim \lambda g_{ij}$. В пределе $\lambda \to 0$ получаем G_2 как ограниченную группу голономий. Хитчин показал, что при определенных условиях этот вид пространства можно описать с помощью конической метрики с голономией $Spin(7)$ [10]. Физическая интерпретация слабого G_2 пространства – это суперсимметричные фоны в теориях суперструн при наличии специальнных тензорных полей (fluxes).

Несмотря на большой прогресс в исследовании многообразий с уменьшенной голономией, все еще остаются открытые вопросы, в особенности связанные с теориями Калуца-Клейна. Реалистичная компактификация должна объяснить наличие киральной материи (киральных фермионов), а такая материя не может быть получена применением процедуры Калуца-Клейна на гладких G_2 многообразиях. В гладком случае гармоническое разложение Калуца-Клейна одиннадцатимерной супергравитации будет приводить к N=1 четырехмерной супергравитации, включающей абелевы векторные мультиплеты (без киральных фермионов). Отметим, что киральные фермионы могут появиться, как указано в [11], только если компактифицированное многообразие является сингулярным. Т.о., оказывается, что для построения реалистичной модели нужно исследовать динамику суперструн на орбифолдах.

Еще одно требование состоит в том, что внутреннее пространство должно быть компактным. Существование компактных пространств со специальной голономией и сингулярнями (орбифолдов) было строго доказано Джойсом в [9]. Но явная метрика для таких пространств до сих пор не известна. Тем не менее предполагается, что пространства (типа орбифолда) с G_2-голономией возникают как факторы (quotient) определенного конического гиперкэлерова многообразия в пространстве $D = 8$ по одной из его изометрий [11]. Это дает еще одну связь между "гипергеометрией" и пространствами с G_2 голономией.

Несмотря на то, что явная G_2 метрика для компактных многообразий не известна, в [12] были построены некоторые примеры со слабой G_2 голономией, которые являются компактными и допускают некоторые виды сингулярности. Кроме того Виттен показал, что физика вблизи сингулярности является по существу локальной, то есть не зависит от глобальных свойств (типа компактности) внутреннего пространства [11]. По этой причине все еще существует большой интерес к построению многообразий со специальной голономией и коническими сингулярностями без требования компактности.

Целью работы:

Настоящая диссертация представляет собой исследование многообразий с редуцированной голономией с упором на построение явных примеров, которые применимы для компактификаций в суперструнных и M- теориях, а также в суперсимметричных сигма моделях.

Научная новизна:

В работе впервые представлена полная классификация слабых гиперкэлеровых пространств с кручением посредством их идентификации с гиперкомплексными пространствами, а также с использованием результатов исследований самодуальных пространств в контексте комплексной геометрии.

Получены новые суперсимметричные фоны суперструнной теории с использованнем некоторых новых результатов в кватернионно-кэлеровой геометрии. Также построенно обобщение метрики target- пространства $D = 4$ сигма модели (метрики Оогури-Вафа), полученной при компактификации IIA-струн, при наличии нескольких идентичных гипермультиплетов (принимая во внимание также и D-инстантонные поправки).

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на научных семинарах Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, а также представлялись и докладывались на: Международном коллоквиуме "X International Colloquium Quantum Groups and Integrable Systems" (2001, Прага,

Чешская республика); Международном коллоквиуме "XIII International Colloquium Quantum Groups and Integrable Systems" (2004, Прага, Чешская республика) и Международной конференции "XI-th International Conference Symmetry Methods in Physics" (2004, Прага, Чешская республика).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 4 работы.

Обьем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения. Общий объем 104 станиц, включая список литературы.

На защиту выдвигаются следующие результаты:

1) Показано, что четырехмерные слабые гиперкэлеровы пространства с кручением (СГКК) - это то же самое, что гиперкомплексные пространства и то же самое, что некоторые пространства, рассмотренные Плебански и Финли. С помощью такого отождествления найдена наиболее общая локальная форма для метрики гиперкэлерова пространства с кручением в четырех измерениях. Для СГКК пространств предложена формулировка типа Аштекара-Якобсона-Смолина, в которой проблема построения СГКК метрики сводится к решению квадратичной системы дифференциальных уравнений. Показано, что существует более общее решение (нежели решение Калана-Харви-Строминжера), для которого не существует сохраняющаяся форма объема. Построены несколько явных примеров таких метрик с изометриями [18].

2) Найдена наиболее общая форма метрики target- пространства для $D = 4$ сигма модели (с несколькими идентичными гипермультиплетами), которая возникает в теории суперструн типа IIA, компактифицированной на некоторое многообразие Калаби-Яу (вместе с непертурбативными вкладами в метрику от D-инстантонов). Рассматриваемый метрический тензор является "торически гиперкэлеровым", если не принимать во внимание гравитационные поправки.

Этот результат обобщает решение Оогури-Вафа. Мы нашли, что квантовые поправки к классическим (логарифмическим) членам экспоненциально подавлены факторами, полученными от вкладов D-инстантона в квази-классическом описании [17].

3) Построено семейство метрик для пространств с голономией $Spin(7)$, G_2 а также для пространств со слабой G_2 голономией. Результат был также распространен на случай фонового решения для супергравитации, сохраняющего одну суперсимметрию. Наличие торических симметрий дает возможность редукций к фоновым решениям типа IIA путем обычной редукции по одному из векторов Киллинга [15].

4) С помощью математического приема, называемого расширением Швана, построено семейство торических гиперкэлеровых метрик для восьмимерного случая. Найдена система координат, для которой метрика имеет вид типа метрики Гиббонса-Хокинга. Решение было расширено до одиннадцатимерной супергравитации, сохраняющей определенное число суперсимметрий, независимо от присутствия потоков. Некоторые типы IIA и IIB решений были найдены с помощию редукций (вдоль изометрии), и при помощи правил T-дуальности [16].

Содержание диссертации. В главе "Предварительные материалы" представлено подробное описание основных особенностей гиперкэлеровой геометрии, гиперкомплексных структур, кватернионно-кэлеровых пространств и многообразий с G_2 и $Spin(7)$ голономиями. Результаты данной главы скорее математические и не новые. Надеемся, что данный обзор может быть использован в педагогических целях, поскольку в нем сделана попытка по новому представить формальные результаты с помощью простого языка, понятного физикам. В разделе 2.1.1 дан обзор о главных свойствах кватернионно-кэлеровой и гиперкэлеровой геометрии в размерностях $D > 4$. В разделе 2.1.2 мы показываем что в 4-измерениях любое кватернионно-кэлерово пространство является самодуальным пространством Эинштейна. В разделе 2.2 описаны гиперкомплексные структуры и их связь со структурами Плебански-Финли, которые играют существенную роль в нашей классификации СГКК пространств в четырехмерном случае. Этот контекст использован для описания формулировки Плебански и Аштекара-Якобсона-Смолина для 4-мерных самодуальных пространств в разделе 2.3. Эта часть важна для результата 1) упомянутого выше. В глабе 2.4 мы рассматриваем редукцию "небесного" уравнения Плебански при наличии одной изометрии, и мы возвращаемся к классификации Боера-Финли возможной локальной формы метрики для самодуальных пространств с одной изометрией. Мы представляем геометрическую интерпретацию интегрируемости аксиального $SU(\infty)$ уравнения Тода, показывая, что оно описывает некоторые метрики Гиббонса-Хокинга в специальной системе координат. Соотношение Джонса-Тода, которое устанавливает связь между самодуальными структурами и структурами Эйнштейна-Вейля рассмотрено в разделе 2.4.3. В разделе 2.4.4 мы расматриваем случай с двумя коммутирующими изометриями, который соотвествует пространствам Джойса. Мы рассматриваем подкласс пространств Джойса, которые являются эйнштейновскими и таким образом кватернионно-кэлеровыми. В этом контексте мы находим метрики Калдэрбанка-Педерсена, которые соотвествуют наиболее общим кватернионно-кэлеровыми многообразиями с $U(1) \times U(1)$ изометриями, и играют важную роль в этой диссертации, в особенности для получения результатов 3) и 4).

В разделе 2.5 мы обсуждаем некоторые важные особенности кватернионно-кэлеровой и гиперкэлеровой геометрии с размерностями $D > 4$. В разделе 2.5.1 представлены самые общие $4n$-мерные гиперкэлеровые пространства с n коммутирющими три-голоморфными изометриями, которые являются обобщениями метрики Гиббонса-Хокинга на более высокие размерности. Этот результат будет использоваться при обсуждении результатов 2) и 4). Мы в общих чертах даем описание расширения Швана в 2.5.3. Эта часть используется, главным образом, при получении результата 4).

В разделе 2.6 обсуждаются некоторые важные особенности групп G_2 и $Spin(7)$

и их связь с алгеброй октонионов. После этого мы обсуждаем классические особенности пространств с голономиями G_2 и $Spin(7)$, а именно самодуальность тензора кривизны, наличие ковариантно постоянных тензоров и их связь с алгеброй октонионов. Мы даем прямое доказательство построения Брианта-Саламона и объясняем роль пространств со специальными голономиями. Прослеживаются определенные аналогии между этим построением и построением Швана. Мы также показываем, что некоторые примеры метрики со слабой голономией G_2 могут быть построены с помощью редукции определенной метрики (конического типа) с голономиями $Spin(7)$. Так же строятся полуплоские 6-мерные метрики, исходя из определенных G_2 метрик конического типа. Мы подчеркиваем связь между G_2 пространствами и компактификацией 11-мерной супергравитации (сохраняющей определенное количество суперсимметрий). Эта часть важна для вывода результата 3).

Другие разделы посвящены подробному обсуждению результатов 1)-4) данной диссертации. Результат, сформулированный в пункте 1), представлен в двух эквивалентных утверждениях [18]:

Утверждение 1 *Пусть метрический тензор g определен на многообразии M вместе с три-комплексными структурами J^i, удовлетворяющими алгебре $J^i \cdot J^j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk}J^k$ и для которых метрика является кватернионно-эрмитовой, то есть $g(X,Y) = g(J^iX, J^iY)$. Определим конформный класс метрик $[g]$, состоящий из всех метрик g' связанных с метрикой g произвольным конформным преобразованием.*

a) Тогда имеет место эквивалентность

$$d\overline{J}^i + \alpha \wedge \overline{J}^i = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad N^i(X,Y) = 0, \tag{1.1}$$

где $\overline{J}^i$ – кэлерова 1-форма, а $N^i(X,Y)$ – тензор Ниенхойса, связанный с J^i; d - обычная внешняя производная и α - некоторая 1-форма. Если какое-либо из равенств (1.1) выполняется для g, то (1.1) также верно для любой метрики

g' конформного класса $[g]$.

b) Оба соотношения (1.1) выполняются для любой четырехмерной слабой гиперкэлеровой метрики с кручением, и существует локальная система координат (x,y,p,q) для которой метрический тензор принимает вид

$$g = (dx - \Phi_x dp + \Phi_x dq) \otimes dp + (dy + \Psi_y dp - \Psi_x dq) \otimes dq, \tag{1.2}$$

с точностью до конформного преобразования $g \to \omega^2 g$. Потенциалы Ψ и Φ удовлетворяют нелинейной системе дифференциальных уравнений

$$[\Phi_y\partial_x\partial_x + \Psi_x\partial_y\partial_y - (\Phi_x + \Psi_y)\partial_x\partial_y + \partial_x\partial_p + \partial_y\partial_q]\begin{pmatrix}\Phi\\ \Psi\end{pmatrix} = 0. \tag{1.3}$$

c) Обратное утверждение также имеет место, то есть любая метрика (1.2) определяет конформное семейство $[g]$, в котором все элементы g' являются слабой гиперкэлеровой метрикой с кручением. Кручение T, соответствующее (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} T = &-\Xi_x dq \wedge (dy \wedge dx + \Phi_y dp \wedge dx - \Psi_y dy \wedge dp) \\ &+\Xi_y dp \wedge (dy \wedge dx + \Phi_x dy \wedge dq - \Psi_x dq \wedge dx), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\Xi = \Phi_x - \Psi_y$. При конформном преобразовании $g \to \omega^2 g$ кручение преобразуется как $T \to T + *_g 2d\log(\omega)$.

Утверждение 2 *Пусть $g = \delta_{ab}e^a \otimes e^b$ один из представителей конформного семейства $[g]$ из утверждения 1.*

a) Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] + [e_3, e_4] &= -A_2 e_1 + A_1 e_2 - A_4 e_3 + A_3 e_4 \\ [e_1, e_3] + [e_4, e_2] &= -A_3 e_1 + A_4 e_2 + A_1 e_3 - A_2 e_4 \\ [e_1, e_4] + [e_2, e_3] &= -A_4 e_1 - A_3 e_2 + A_2 e_3 + A_1 e_4 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где e_a - векторные поля, дуальные к e^a, и A_i - произвольные функции на пространстве M, где определено семейство $[g]$.

b) Справедливо обратное утверждение. Любое решение (1.5) определяет конформное семейство $[g]$, которое описано в утверждении 1. Кручение T, соответствующее (1.2) определяется формулой

$$T = *_g(A_a - c^b_{ab})e^a, \tag{1.6}$$

где c^c_{ab} - структурные константы, задаваемые скобками Ли $[e_a, e_b] = c^c_{ab}e_c$. Преобразование кручения при $g \to \omega^2 g$ следует непосредственно из Утверждения 1.

Теперь более подробно представим результат 2). Оогурй и Вафа нашли метрику target- пространства для $D = 4$ сигма модели с одним гипермультиплетом, возникающей в теории суперструн IIA, компактифицированных на многообразии Калаби-Яу вблизи сингулярности типа конифолда. Результат учитывает непертурбативные вклады в метрику от D-инстантонов. Эта метрика является гиперкэлеровой с одним самодуальным вектором Килинга и имеет вид [14]

$$g = \frac{1}{V}(dt + A)^2 + V(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{1.7}$$

где функция V и 1-форма A удовлетворяют соотношениям

$$\Delta V = \vec{\nabla}^2 V \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V = 0\ , \tag{1.8}$$

$$\vec{\nabla} V + \vec{\nabla} \times A = 0. \tag{1.9}$$

Здесь Килинг вектором для метрики (1.7) является ∂_t. Предположения Оогури-Вафа для построенния явного вида метрики (1.7) следующее

- периодичность метрики по радиалной переменной $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ с периодом 1, как следствие квантованния заряда D-браны,
- классический потенциал V вблизи сингулярности Калаби-Яу (типа конифолд) должен обладать логарифмическим поведением $V \sim log(\rho)$, и независеть от координаты z и угловой координаты θ.

- метрика должна быть полной

Уравнение (1.8) описывает потенциал V электрических зарядов в евклидовой полуплоскости (ρ, η), $\rho > 0$, распределенных вдоль оси z, при $\rho = 0$, в каждой точке $\eta = n \in \mathbf{Z}$ [14]. Единственное решение (1.8) удовлетворяющее этим предположениям следующее [14]

$$V_{\mathrm{OV}}(\rho, \eta) = \frac{1}{4\pi}\log(\frac{\mu^2}{\rho^2}) + \sum_{m=1}^{\infty} exp(-2\pi m\rho)\cos(2\pi m\eta)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} n! \Gamma(-n+\frac{1}{2})}(\frac{1}{4\pi m\rho})^{n+\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

Константа связи струны g может быть восстановлена в формулуе (1.10) с помощью масштабного преобразования $\rho \to \rho/g$. Тогда возникающая экспонента $\exp(-2\pi m\rho/g)$ интерпретируется как вклад в метрику от D-инстантонов [14].

Обобщение метрик (1.7) на случай $4n$-измерений является метрикой Педерсена-Пуна и имеет вид

$$g = U_{ij}dx^i \cdot dx^j + U^{ij}(dt_i + A_i)(dt_j + A_j) \tag{1.11}$$

где $U^{ij} = (U_{ij})^{-1}$, $U_i = (U_{i1}, \ldots, U_{in})$ и A_i - решения уравнений

$$\begin{aligned} F_{x^i_\mu x^j_\nu} &= \epsilon_{\mu\nu\lambda}\nabla_{x^i_\lambda} U_j, \\ \nabla_{x^i_\lambda} U_j &= \nabla_{x^j_\lambda} U_i, \\ U_i &= (U_{i1}, .., U_{in}), \end{aligned} \tag{1.12}$$

и F - тензор напряжености для потенциала A. С помощью (1.11) и предположений Оогури и Вафа мы построили метрики пространства модулей для нескольких идентичных гипермультиплетов для суперструн типа IIA, компактифицированных на многообразии Калаби-Яу вблизи сингулярности типа конифолда, вместе с непертурбативними вкладами в метрику от D-инстантонов.

Фоновое решение супергравитации, которое упоминается в пункте 3), имеет вид

$$g_{11} = g_M^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + \frac{r^2}{2}[U_{\phi\phi}d\phi^2 + U_{\phi\psi}d\phi d\psi + U_{\psi\psi}d\psi^2 + Q_\phi d\phi + Q_\psi d\psi + g_{\rho\rho}(d\eta^2 + d\rho^2) + H]. \tag{1.13}$$

где g^2_M-плоская метрика Минковского, а остальная часть является метрикой с голономией G_2. Тензор U_{ij}, 1-форма Q_i и функция H определяются функцией F, которая является решением следующего линейного уравнения

$$F_{\rho\rho} + F_{\eta\eta} = \frac{3F}{4\rho^2}. \tag{1.14}$$

Метрика может быть записана как

$$g_{11} = e^{-\frac{2}{3}\varphi_D} G_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu + e^{\frac{4}{3}\varphi_D}(d\phi + dx^\mu C_\mu(x))^2 \tag{1.15}$$

где дилатон φ_D и рамон-рамоновская 1-форма C имеют вид

$$\varphi_D = \frac{3}{4}\log(\frac{r^2 U_{11}}{2}),$$

$$C = \frac{U_{12}d\psi + Q_\phi}{U_{11}}.$$

Редукция (1.15) вдоль изометрии ϕ_1 дает следующую метрику типа IIA

$$g_A = (\frac{r^2 U_{11}}{2})^{1/2}\{ds^2_{M^4} + \frac{dr^2}{h(r)} + \frac{r^2}{2U_{11}}[\det U d\psi^2 + 2(U_{11}Q_\psi - U_{12}Q_\phi)d\psi - Q^2_\phi + U_{11}H]\}. \tag{1.16}$$

Компоненты метрики также определены через решения F уравнения (1.14).

Что касается результата 4), то мы построили решение 11-мерной супергравитации с фермионными полями и $F_{\mu\nu\alpha\beta}$, равным нулю. Решение имеет общий вид

$$g = g(E^{2,1}) + U_{ij}dx^i \cdot dx^j + U^{ij}(dt_i + A_i)(dt_j + A_j), \tag{1.17}$$

то есть, представимо в виде прямого произведение плоского пространства R^3 и торического гиперкэлерова внутреннего многообразия. Мы нашли с помощью T и U дуальностей решения в теории суперструн типа IIA и IIB.

<u>**В заключении**</u> кратко сформулированы полученные в диссертации результаты, которые выносятся на защиту.

<u>**В приложении**</u> описывается связь между СГКК пространствами и суперсимметрическими сигма-моделями в двух измерениях.

<u>По теме диссертации опубликованы следующие работы:</u>

1. **M.Berger** Bull.Soc.Math.France. 83 (1955) 279
2. **D.Joyce** J.Diff.Geom. 43 (1996) 2; J.Diff.Geom. 43 (1996) 329.
3. **M. Atiyah, N.J.Hitchin** *The geometry and dynamic of magnetic monopoles.* Princeton University Press 1988.
4. **E.Witten, J.Bagger** Nucl.Phys.B 222 (1983) 1.
5. **P.B.Kronheimer** J.Diff.Geometry 29 (1989) 665; P.B.Kronheimer J.Diff.Geometry 29 (1989) 685; **N.J.Hitchin, A.Karlhede, U.Lindstrom and M.Rocek** Comm.Math.Phys.108 (1987) 535.
6. **A.Swann** Math.Ann.289 (1991) 421.
7. **R.Bryant** Ann.Math.126 (1987) 525.
8. **R. Bryant and S.Salamon** Duke Math. Journal 58 (1989) 829.
9. **D.Joyce** *Compact manifolds with special holonomy* First edition (Oxford University Press 2000).
10. **N. Hitchin** *Stable forms and special metrics* math.DG/0107101.
11. **B.Acharya, E.Witten** *Chiral Fermions from Manifolds of G_2 Holonomy* hep-th/0109152.
12. **A.Bilal, S.Metzger** Nucl.Phys. B 663 (2003) 343.
13. **B.de Wit, M. Rocek, S.Vandoren** JHEP 0102 (2001) 039.
14. **H. Ooguri, C. Vafa** Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 3298.

<u>По теме диссертации опубликованы следующие работы:</u>

15. **O.P. Santillan** Nucl.Phys.B 660 (2003) 169.

16. **O.P. Santillan, A.Z. Zorin** Commun.Math.Phys 255 (2005) 33.

17. **S.Ketov, O.P. Santillan, A.Z. Zorin** Mod.Phys.Lett. A19 (2004) 2645.

18. **A.P.Isaev, O.P. Santillan** JHEP 0510 (2005) 061.

Получено 2 декабря 2005 г.