ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-2003-77

На правах рукописи
УДК 539.12.01; 530.145

ПОГОСЯН
Георгий Самвелович

СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 2003

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор Н.А.Громов

доктор физико-математических наук
профессор И.В. Комаров

доктор физико-математических наук
профессор В.П. Павлов

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт физики высоких энергий, г. Протвино

Защита состоится "_____" ____________________ 2003 г. в ________ час. на заседании диссертационного Совета Д 720.001.01 при Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований по адресу: 141980, Московская обл., г.Дубна, ЛТФ ОИЯИ

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "_____" ____________________ 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук

С.В. Голоскоков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Истоком для исследований суперинтегрирумых систем на пространствах постоянной кривизны послужила теория квантовых систем со скрытой симметрией, идеи и методы которой родились при изучении поведения частиц в кулоновом и осцилляторном полях, а затем получили свое развитие в квантовой теории поля (Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков) и теории поля с фундаментальной длиной (В.Г.Кадышевский), физике элементарных частиц (И.Т.Тодоров), теории лазеров (Р.Дикке), модели оболочек (Дж.Эллиот), коллективной модели ядер (В.Баргман, М.Мошинский) и суперсимметричной квантовой механике (Е.Виттен).

Суперинтегрируемые системы представляют собой подкласс интегрируемых систем, когда число D функционально независимых интегралов движения равно $D = 2N-1$ (или $D = 2N-2$ для минимально суперинтегрирумых систем), где N - число степеней свободы системы. В трехмерном евклидовом пространстве к наиболее известным и хорошо изученным системам такого типа относятся: движение частицы в кеплеровском поле и гармоничесий осциллятор. Наличие максимального числа интегралов движения для этих двух систем приводит ко многим интересным свойствам как замкнутость траекторий для финитного движения (теорема Бертрана), полное разделение переменных в нескольких системах координат в уравнения Гамильтона-Якоби и Шредингера, "случайное вырождение" энергетического спектра, и наконец, существование так называемой группы динамической симметрии.

Первый систематический поиск суперинтегрируемых систем в двух и трехмерном плоском пространстве был предпринят в работах Смородинского и Винтерница с соавторами (1965) и затем продолжен Евансом (1990). Схема классификации суперинтегрируемых систем основана на известной теореме Бертрана-Дарбу, согласно которой, в двумерном евклидовом пространстве дополнительный к энергии квадратичный интеграл движения существует, тогда и только тогда, когда потенциал допускает разделение переменных в эллиптической системе координат или в одной из ее вырожденных форм. Как оказалось, многие суперинтегрируемые системы (исключая чисто кулоновский и осциляторный потенциалы в плоском пространстве), обладающие квадратичными интегралами движения, не описываются динамической группой симметрии, а генерируют алгебраическую структуру, которую можно рассматривать как нелинейное расширение алгебры Ли (в классической механике алгебры Пуассона), а именно квадратичную алгебру (впервые такие алгебры были введены в работах Склянина). В настоящее время стало понятным, что концепция суперинтегрируемости является более общим понятием чем наличие максимальной группы симметрии или разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и Шредингера. Отсюда сразу возникают несколько вопросов: всегда ли суперинтегрируемость ассоцируется с мульти-разделением то есть разделением переменных во многих системах координат? Всегда ли суперинтегрируемые системы генерируют квадратичную алгебру симметрии? Существует ли единая процедура поиска суперинтегрируемых потенциалов в пространствах постоянной кривизны, которая обеспечивает их полную классификацию? В этом контексте необходимо исследовать связь между ортогональными системами координат, определенных на пространствах постоянной кривизны и в плоском пространстве и связанных при помощи контракций их групп изометрии.

Исследования суперинтегрируемых систем является актуальным по следующим причинам. Во-первых, полная классификация суперинтегрируемых систем на пространствах как положительной, так и отрицательной постоянной кривизны, существенно расширяет класс интегрирумых систем, которые образуют базис для построения современных физических теорий и моделей: квантовой теории поля с фундаментальной массой и электромагнитной длиной, космологии и квантовой гравитации, теории (супер)струн, уравнений Янга-Милса-Хиггса в (2+1) - мерном пространсве де-Ситтера и анти-де-Ситтера, в теории кваркониев и квантовых точек и квантовой оптики. Во-вторых, большинство специальных функций математической физики, которые так часто применяются, что даже затабулированы, возникают именно при изучении суперинтегрируемых систем.

Цель и задачи работы

формулируются следующим образом:

1. Исследование поведения ортогональных систем координат (допускающих полное разделение переменных в уравнении Гельмгольца), определенных на однородных пространствах, полного набора коммутирующих операторов, соответствующих собственных значений и собственных функций, а также межбазисных разложений при контракциях их групп изометрии.

2. Классификация и поиск новых суперинтегрируемых систем на двумерной комплексной сфере S_{2C}, включающей реальную сферу и двухполосый гиперболоид, и в двумерном комплексном евклидовом пространстве E_{2C}, включающем реальное евклидово пространство и пространство Минковского.

3. Развитие методов квантования суперинтегрируемых систем на пространствах постоянной кривизны во всех системах координат допускающих разделение переменных. Исследование межбазисных переходов в многомерных суперинтегрируемых системах.

4. Обобщение на случай пространств постоянной кривизны известных из евклидовой геометрии преобразований дуальности Леви-Чивиты и Кустанхеймо-Штифеля.

Научная новизна и практическая ценность работы

В диссертации представлен новый аспект теории контракций групп и алгебр Ли: а именно связь между ортогональными системами координат (допускающих полное разделение переменных в уравнении Гельмгольца), определенных на пространствах постоянной кривизны и в плоском пространстве и связанных при помощи контракций их групп изометрии. В рамках метода Иноню-Вигнера введена концепция аналитических контракций, когда параметр контракции - радиус сферы R - встраивается в инфинитиземальные операторы и полный набор коммутирующих операторов, а не только в структурные константы. Используя данный метод удается проследить контракции при $R \to \infty$ на всех уровнях: алгебры Ли, представленной векторными полями, оператора Лапласа-Бельтрами, операторов второго порядка в обертывающей алгебре, характеризующих системы координат, в самих системах координат допускающих разделение переменных, в обычных дифференциальных уравнениях, в собственных значениях инвариантных операторов, а также в коэффициентах перекрытия и межбазисных разложениях.

Впервые введены "кластерные диаграммы" определяющие правило записи подгрупповых систем координат, полного набора коммутирующих операторов, их собственных значений и решений уравнения Гельмгольца на E_N . Развит графический метод перехода от формализма "деревьев" Виленкина-Кузнецова-Смородинского на S_N к "кластерам" на E_N при контракции группы $SO(N+1)$ к группе $E(N)$. Получены новые асимптотические формулы для D-функций Вигнера, коэффициентов Клебша-Гордана и Рака.

Для уравнения Гельмгольца на трехмерной сфере впервые исследованы переходы между эллиптическими и более простыми - гиперсферическим и цилиндрическим базисами, которые устанавливают дополнительные, ранее неизвестные, связи между специальными функциями; построен эллипсоидальный базис и определено условие квантования эллипсоидальных констант разделения.

Предложен новый метод классификации невырожденных суперинтегрирумых систем второго рода на двухмерной комплексной плоскости E_{2C}. Требование, что система допускает два интеграла движения второго порядка приводит к необходимости разрешения пары многопараметрических уравнений в частных производных второго порядка, что представляет объективно трудную математическую задачу. Вместо этого предлагается сначала найти все решения так называемых условий интегрируемости, которые носят линейный характер и, далее пользуясь этой подсказкой, уже преступить к разрешению самой системы уравнений в частных производных. В рамках предложенной схемы удается наиболее полным образом проклассифицировать невырожденные суперинтегрируемые потенциалы, допускающие наряду с энергией пару независимых интегралов движения второго порядка.

При классификации суперинтегрированных систем второго рода на двумерной комплексной сфере S_{2C} в диссертации приводится немного видоизмененный метод существенно опирающийся на факте разделения перменных в одной из систем координат и в идейном плане перекликающийся с известным подходом Бертрана-Дарбу. В таком подходе требование наличия дополнительного интеграла движения приводит к некоему функциональному уравнению, решение которого определяет явный вид суперинтегрируемого потенциала.

Впервые проведен полный анализ всех известных суперинтегрируемых систем в двухмерном и трехмерном плоском пространстве, на двухмерной сфере и двухмерном гиперболоиде. В качестве единого подхода к квантованию таких потенциалов выбран метод Нивена, адаптированный как на многие точно решаемые случаи, когда в качестве собственных функций выступают классические полиномы, так и для случаев, когда решение не может быть записано в замкнутой форме. Показано, что все специальные функции возникающие в результате разделения переменных обладают определенными свойствами, которые описываются нулями самих функций. Сформулирован диаграммный метод построения матрицы перехода от гиперсферического базиса многомерного сингулярного осциллятора к декартовому.

Впервые представлена серия небиективных преобразований, обобщающих в случае пространства постоянной кривизны хорошо известные для евклидового пространства преобразования дуальности типа Леви-Чивиты и Кустанхеймо-Штифеля.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались на семинарах в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (Дубна), в Институте физики высоких энергий (Протвино), в Ереванском университете (Ереван), в Центре физических исследований (Куэрнавака) и Институте прикладной математики Национального университета Мексики (Мехико), в Центре математических исследований Монреальского университета, в Институте ядерной физики (Лион, Франция), в Люблинском университете им. Марии Складовской-Кюри (Люблин, Польша), в Университете г. Гамильтона (Новая Зеландия), а также на Международных коллоквиумах по теоретико-групповым методам в физике (Гозлар 1996, Дубна 2000, Париж 2002), на симпозиуме

по квантовым теориям и симметриям (Гозлар 1999, Краков 2001), на международных конференциях по методам симметрии в физике (Дубна 1993, 1995, 1997, Ереван 2001), на международных совещаниях по классическим и квантовым интегрируемым системам (Дубна 1994, 1996, Ереван 1998, Куэрнавака 2002), международное совещание по физике (Монтеродуни, 1995), Барутовская мемориальная конференция "Теория групп в физики" (Эдерне, 1995), Симпозиум по приложению теории Ли в физике, (Клаусталь, 1997), Международная конференция по квантовым группам, деформациям и контракциям (Стамбул, 1997), Вигнеровский симпозиум (Стамбул 1999), Всероссийский семинар "Классические и квантовые интегрируемые системы" (Протвино, 2001), конференция по математическим результатам в квантовой механике (Таско, 2001), рабочее совещание по суперинтегрируемости в классических и квантовых системых (Монреаль, 2002).

Публикации. По материалам исследований, представленных в диссертации, опубликовано 25 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения, приложения и списка литературы. Она содержит 240 страниц текста, 17 таблиц, 9 рисунков и список литературы из 220 наименований.

На защиту выдвигаются следующие результаты

1. В рамках метода контракций Иноню-Вигнера разработана концепсия аналитических контракций. Установлена связь между различными ортогональными системами координат определенными на двухмерных пространствах постоянной кривизны (сфере $S_2 \sim O(3)/O(2)$ и гиперболоиде $H_2 \sim O(2,1)/O(2)$) и в евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях, и связанных при помощи контракций их групп изометрии. Получены различные асимптотические формулы для (псевдо)сферических функций и полиномов Ламе.

2. Вычислена матрица перехода между эллиптическими базисами и более простыми - гиперсферическим и цилиндрическим для уравнения Гельмгольца на S_3. Получено полиномиальные решение обобщенного уравнения Ламэ и найдено условие квантования эллипсоидальных констант разделения.

3. Проанализированы всевозможные переходы для подгрупповых типов координат и базисов на S_N в подгрупповые типы координат в E_N при контракции группы $SO(N+1)$ к группе $E(N)$. Развит графический метод иллюстрирующий эти переходы. Найдены асимптотические формулы для D-функций Вигнера от аргумента

$\pi/2$, коэффициентов Клебша-Гордана и Рака, реализующих взаимные разложения подгрупповых базисов. Прослежены предельные переходы в самих межбазисных разложениях.

4. Проклассифицированы все невырожденные суперинтегрируемые системы второго рода на комплексной плоскости E_{2C}, включающей в себя как реальное евклидово пространство так и пространство Минковского. Построена алгебра симметрии и показано, что суперинтегрируемость второго рода приводит к мульти-разделяемости, то есть разделению переменных в более чем одной системе координат.

5. Построены полиномиальные базисы как для всех суперинтегрируемых систем на двухмерных сфере и гиперболоиде, так и в трехмерном евклидовом пространстве. Вычислена матрица перехода между декартовым и гиперсферическим базисами для многомерного сингулярного осциллятора и сформулирована диаграмная техника вычисления этих матриц.

6. На двумерной комплексной сфере S_{2C} найдены все суперинтегрируемые системы, допускающие три функционально независимых интеграла движения второго порядка и генерирующих квадратичную алгебру симметрии.

7. Построена серия комплексных преобразований $S_{2C} \to S_2$, $S_{4C} \to S_3$, обобщающая в случае сферической геометрии хорошо известные в евклидовом пространстве преобразования Леви-Чивиты и Кустанхеймо-Штифеля.

Содержание работы

Во введении дан обзор современного состояния теории суперинтегрируемых систем на пространствах постоянной кривизны.

В первой главе на примере двух однородных пространств: двумерной сферы и двумерного гиперболоида изложена концепция аналитических контракций.

В первом параграфе дан полный обзор систем координат допускающих разделение переменных в уравнении Гельмгольца (свободное уравнение Шредингера) на сфере S_2, на двухполосом гиперболоиде H_2, в евклидовой плоскости E_2 и псевдоевклидовой плоскости $E_{1,1}$.

Сам метод аналитических контракций описан во втором параграфе. Показано, что переход к соответствующим образом выбранным неоднородным координатам на сфере и гиперболоидах (одно- и двухполосом) позволяет в явном виде ввести параметр контракции $\epsilon = R^{-1}$ в генераторы групп $O(3)$ и $O(2,1)$ и легко проследить

предельный переход при $R \to \infty$ как в самих операторах, так и в коммутационных соотношениях.

В третьем параграфе в рамках метода аналитических контракций алгебры $o(3)$ к алгебре $e(2)$ и алгебры $o(2,1)$ к алгебрам $e(2)$ и $e(1,1)$ установлена связь между ортогональными системами координат и инвариантными операторами второго порядка, характеризующими эти координаты. Показано, что в пределе $R \to \infty$ сферическая система координат на S_2 контрактирует в полярную или декартовую системы координат на E_2, а из эллиптической системы координат с помощью контракций получаются декартовая, параболическая и эллиптическая системы координат. Аналогично, найдены переходы от всех девяти систем координат на H_2 к четырем системам координат на E_2 и к девяти системам координат на $E_{1,1}$.

В четвертом параграфе получены различные асимптотические формулы для собственных функций оператора Лапласа-Бельтрами на S_2 и H_2. Прослежены предельные переходы в межбазисных разложениях для сферических функций при вращениях из группы $SO(3)$. В пункте 4.1 показано, что при контракции сферической системы координат ($R \to \infty, \theta \sim r/R$) в полярную сферические функции $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ преобразуются в произведение функций Бесселя и экспоненту, а при контракции к декартовой системе координат ведут себя как ($\theta \sim x/R$, $\varphi \sim y/R$, $\ell \sim kR$, $m \sim k_1 R$, ${k_1}^2 + {k_2}^2 = k^2$)

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \theta\to 0 \\ \varphi\to 0}} (-1)^{-\frac{l+m}{2}} Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{k}{k_1}} \frac{e^{ik_2 y}}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} \cos k_1 x & l+m - \text{четно} \\ -i \sin k_1 x & l+m - \text{нечетно} \end{cases}$$

Найдено асимптотическое представление для d- функции Вигнера от аргумента $\pi/2$, когда два параметра одновременно принимают большие значения $l \sim kR$, $m_1 \sim k_1 R$

$$\lim_{R\to\infty} (-1)^{-\frac{l-m_1-m_2}{2}} \sqrt{R}\, d^{l}_{m_2,m_1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_2}} \begin{cases} \cos m_2\varphi, & l+m - \text{четно} \\ i \sin m_2\varphi, & l+m - \text{нечетно} \end{cases}$$

где $\cos\varphi = k_1/k$. Замечено, что теорема сложения для функций Бесселя типа Графа может быть также доказана с помощью контракций из разложения сферических функций при произвольном вращении системы координат.

В пункте 4.2 найдены предельные соотношения для полиномов Ламэ при контракциях алгебры $o(3)$ к алгебре $e(2)$. Показано, что полиномы Ламэ $\psi_{l\lambda}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(\rho)$, где $\alpha_i(\alpha_i - 1) = 0$, в пределе $R^2 \sim a_3 \to \infty$, $\ell \sim kR$ и $\mu \sim \lambda/a_3$ (λ - эллиптическая константа разделения) преобразуются в функции Матье в виде разложений по тригонометрическим (переодические решения уравнения Матье) и гиперболическим функциям (решения модифицированного уравнения Матье)

$$\psi_{l\lambda}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(\rho_1) \cong (\cos\eta)^{\alpha_1}(\sin\eta)^{\alpha_2} \sum_{t=0}^{\infty} C_t (\cos\eta)^{2t},$$

$$\psi_{l\lambda}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(\rho_2) \;\cong\; (\cosh\xi)^{\alpha_1}(\sinh\xi)^{\alpha_2}\sum_{t=0}^{\infty} C_t(\cosh\xi)^{2t},$$

где коэффициенты C_t удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям

$$4(t+1)(t+1/2+\alpha_1)C_{t+1} + \{\mu - (2t+\alpha_1+\alpha_2)^2\}C_t - k^2D^2C_{t-1} = 0$$

(μ - новая константа разделения, D-параметр входящий в определение эллиптической системы координат на плоскости). Доказано, что при контракции эллиптической системы координат в декартову полиномы Ламэ преобразуются в тригонометрические функции согласно формуле

$$\lim_{R\to\infty}(R)^{\alpha_1+\alpha_2}\,\Psi_{l\lambda}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(\rho_1,\rho_2) = \frac{1}{k_1^{\alpha_1}k_2^{\alpha_2}}\cos(k_1x+\alpha_1\pi/2)\,\cos(k_2y+\alpha_2\pi/2).$$

В пункте 4.3 изучены контракции подгрупповых базисов уравнения Гельмгольца на H_2. Показано, что ортонормированный псевдо-сферический базис $\Psi_{\rho m}(\tau,\varphi)$, в пределе $R\to\infty$ контрактирует к полярному базису на E_2 ($\rho\sim kR$, $\tau\sim r/R$):

$$\lim_{R\to\infty}\Psi_{\rho m}(\tau,\varphi) = \sqrt{k}\cdot J_{|m|}(kr)\cdot\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}},$$

или к декартовому на $E_{1,1}$ ($\rho\sim kR, m\sim k_1R, \coth\tau\sim t/R, \cot\varphi\sim x/R$):

$$\lim_{R\to\infty}\sqrt{R}|\Gamma(i\rho)|\Psi_{\rho m}(\tau,\varphi) = \sqrt{\frac{2}{k_0}}e^{ik_0t-ik_1x}, \qquad k_0^2+k_1^2=k^2.$$

Аналогично, переход от эквидистантного базиса $\Psi_{\rho\lambda}(\tau_1,\tau_2)$ к декартовому на E_2 осуществляется в пределе $R\to\infty$, и при выполнении условий $\rho\sim kR$, $\lambda\sim k_1R$, $\tau_1\sim y/R$ и $\tau_2\sim x/R$

$$\lim_{R\to\infty}\Psi_{\rho\lambda}(\tau_1,\tau_2) = \sqrt{\frac{k}{\pi k_2}}\exp(ik_1x+ik_2y), \quad k_1^2+k_2^2=k^2.$$

а к полярному базису на $E_{1,1}$ при $\rho\sim kR$ и $\tau_1\sim r/R$:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{R}}\Psi_{\rho\lambda}(\tau_1,\tau_2) = \sqrt{\frac{k}{2}}H_{i\lambda}^{(1)}(kr)e^{i\lambda(\tau_2+i\frac{\pi}{2})},$$

где $H_\nu^{(1)}(z)$ - это функции Ганкеля первого рода.

Во второй главе подробно исследуется трехмерное уравнение Гельмгольца. В первом параграфе с точки зрения внутренних контракций детально проанализированы наиболее сложные одна- (вытянутая и сплюснутая эллиптическая) и двухпараметрические (эллипсоидальная) системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении Гельмгольца на S_3 и E_3.

Во втором параграфе в рамках метода аналитических контракций от алгебры $o(4)$ к алгебре $e(3)$ представлена связь между различными ортогональными системами координат на S_3 и E_3, инвариантными операторами, подгрупповыми волновыми функциями и межбазисными разложениями. Показано как девять систем координат (без смещения центра симметрии), допукающих разделение переменных в уравнении Гельмгольца на E_3 получаются путем контракций из шести ортогональных систем координат на S_3. Доказано, что в качестве "параболической" системы координат выступает симметричным образом определенная (то есть с равными модулями $k=k'=\frac{1}{\sqrt{2}}$) вытянутая эллиптическая система координат, один из фокусов которой совмещен с северным полюсом сферы. Найдены предельные переходы между подгрупповыми базисами на S_3 и E_3. Получены асимптотические формулы коэффициентов Клебша-Гордана $C_{a,\alpha;b,\beta}^{\ell,\gamma}$, группы $SU(2)$, реализующих разложение между подгрупповыми базисами. В частности доказано, что при $R\to\infty$ и $L\sim kR$, $n\sim k_1R$ коэффициенты Клебша-Гордана контрактируют в нормированные полиномы Лежандра

$$\lim_{R\to\infty}\sqrt{R}(-1)^{\frac{L-|m|-n}{2}}C_{\frac{L}{2},\frac{|m|+|n|}{2};\frac{L}{2},\frac{|m|-|n|}{2}}^{l,|m|} = \sqrt{\frac{2}{k}}\mathcal{P}_l^{|m|}(\cos\phi), \quad \cos\phi=\sqrt{k^2-k_1^2}/k,$$

а в пределе $L\sim kR$, $\ell\sim pR$, $m\sim k_3R$ и $k^2=p^2+k_3^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$ имеет место формула (для четных и нечетных значений $L-\ell$)

$$\lim_{R\to\infty}(-1)^{-\frac{L+l}{2}}\sqrt{R}\,C_{\frac{L}{2},\frac{|m|-n}{2};\frac{L}{2},\frac{|m|+n}{2}}^{l,|m|} = \sqrt{\frac{8p}{(k^2-k_1^2)\pi}}(\sin2\phi)^{-\frac{1}{2}}\begin{cases}\cos n\phi,\\ -i\sin n\phi,\end{cases}$$

где $\cos\phi=\frac{(p^2-k_1^2)}{(k^2-k_1^2)}$. Найденные предельные соотношения для волновых функций и коэффициентов перекрытия позволяют проследить контракции при $R\to\infty$ в самих межбазисных разложениях.

В третьем параграфе реализован алгебраический метод построения эллиптических базисов уравнения Гельмгольца. Показано, что коэффициенты перекрытия генерирующие разложение эллиптических базисов по более простым - цилиндрическому и гиперсферическому подчиняются трехчленным рекуррентным соотношениям. Отмечено, что эллиптический базис распадается на четыре подбазиса, каждый из которых характеризуется определенной четностью относительно преобразований $u_3=-u_3$ и $u_4=-u_4$. Установлено, что при внутренних контракциях эллиптической системы координат (то есть в пределе $k\to0$ и $k\to\infty$) коэффициенты перекрытия трансформируются в рекуррентные соотношения для коэффициентов Клебша-Гордана.

Четвертый параграф посвящен исследованию уравнения Гедьмгольца в общей эллипсоидальной системе координат

$$u_i^2 = \prod_{j=1}^{3}(\rho_j - a_i)/\prod_{j\neq i}(a_j - a_i), \qquad i = 1,2,3,4$$

где $a_1 \le \rho_1 \le a_2 \le \rho_2 \le a_3 \le \rho_3 \le a_4$. Метод разделения переменных в эллипсоидальной системы координат приводит к трем идентичным уравнениям типа Фукса с пятью особыми точками (обобщенным уравнениям Ламэ), каждое из которых содержит кроме гипермомента L также две константы разделения (λ, μ), зависящие, в общем случае, от всех четырех параметров a_i. Установлено, что эллипсоидальный базис расщепляется на шестнадцать подбазисов: $\Psi^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}$, где $\alpha_i(\alpha_i - 1) = 0$, с фиксированной четностью относительно отражений во всех координатных плоскостях. Найдены формулы, выражающие обобщенные полиномы Ламэ через коэффициенты b_t, подчиняющиеся четырехчленным рекуррентным соотношениям

$$\beta_t b_{t+1} + \{\mu - \gamma_t\}b_t + \{\lambda - \delta_t\}b_{t-1} + 4[N - t + 2][N + t - 1 + \sum_i \alpha_i]b_{t-2} = 0 \qquad (1)$$

в которых $L = 2N + \sum \alpha_i$,

$$\begin{aligned}
\gamma_t &= [4t^2 + (4t+1)(\alpha_2 + \alpha_4) + 2\alpha_2\alpha_4]k_1^2k_2^2 + [4t^2 + (4t+1)(\alpha_2 + \alpha_3) \\
&+ 2\alpha_2\alpha_3]k_1^2(k_2^2 + k_3^2) - [4t^2 + (4t+1)(\alpha_2 + \alpha_1) + 2\alpha_2\alpha_1]k_2^2(k_2^2 + k_3^2) \\
\delta_t = &- 2[\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 + (t+1)(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + (t+1)(t-1)]k_1^2 \\
&+ 2[\alpha_2\alpha_1 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_4 + (t+1)(\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_4) + (t+1)(t-1)]k_2^2 \\
&+ 2[\alpha_2\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + (t+1)(\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_3) + (t+1)(t-1)](k_2^2 + k_3^2) \\
\omega_t &= L(L+2) - [4(t-1)(t-2) + \{4(t-2) + 3\}\sum_i \alpha_i + \sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j\} \\
\beta_t &= [4(t+1)(t + \alpha_2 + 1/2)]k_1^2k_2^2(k_2^2 + k_3^2), \quad k_i^2 = \frac{a_{i+1} - a_i}{a_4 - a_1}.
\end{aligned}$$

а каждому подбазису соответствует свой набор коэффициентов α_i. Однородная система уравнений (1) является переопределенной, поскольку число уравнений $N+2$ превосходит число неизвестных $N+1$, и соответствующая матрица является прямоугольной. В приложении доказано, что для существования нетривиального решения системы уравнений типа (1) достаточно потребовать равенства нулю двух определителей, которые следуют из системы (1) при вычеркивании последней и предпоследней строки. Полученная таким образом система двух алгебраических уравнений $N+1$ степени определяет спектр эллипсоидальных констант разделения (λ, μ).

В третьей главе метод аналитических контракций от группы $SO(N+1)$ к Евклидовой группе $E(N)$ используется для установления связи между подгрупповыми

системами координат, собственными функциями и различными межбазисными разложениями для уравнения Гельмгольца на N-мерной сфере и Евклидовом пространстве.

В первом параграфе представлены все подгрупповые типы координат соответствующие различным цепочкам подгрупп $SO(N+1)$ и $E(N)$. По аналогии с подгрупповыми диаграммами и диаграммами типа "деревьев", Виленкина, Кузнецова и Смородинского, введены "кластерные диаграммы", определяющие правило записи подгрупповых систем координат, полного набора коммутирующих операторов и собственных функций оператора Лапласа на E_N.

Во втором параграфе найдены правила соответствия между гиперсферическими системами координат на S_N и подгрупповыми системами координат на E_N, собственными значениями инвариантных операторов и базисными функциями. Сформулирован графический метод перехода от формализма деревьев на сферах к кластерам для Евклидовых пространств.

Третий параграф посвящен контракциям в межбазисных разложениях и коэффициентах перекрытия. Коэффициенты перекрытия для различных базисов, соответствующих изоморфной подгруппой цепочке, включают в себя матрицу вращений, а в случае неизоморфной подгрупповой цепочки выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана и Рака. Для всех них найдены асимптотические формулы.

Четвертая глава посвящена классификации и анализу двумерных суперинтегрируемых систем в комплексном Евклидовом пространстве E_{2C}, включающем в себя как реальное Евклидово пространство E_2 так и псевдоевклидово пространство $E_{1,1}$.

В первом параграфе излагается метод классификации потенциалов, обладающих парой функционально независимых интегралов движения второго порядка по импульсам (они названы как суперинтегрируемые системы второго рода) и генерирующих квадратичную алгебру симметрии. Пусть в дополнение к классическому гамильтониану $\mathcal{H} = p_x^2 + p_y^2 + V(x,y)$ в E_{2C} существуют два функционально независимых квадратичных интеграла движения

$$\mathcal{L}_h = \sum_{k,j=1}^{2} a_{(h)}^{kj}(x,y)p_kp_j + W_{(h)}(x,y), \qquad h = 1,2$$

удовлетворяющих условию $\{\mathcal{H}, \mathcal{L}_h\} = 0$. Требование равенства нулю скобки Пуассона $\{\mathcal{H}, \mathcal{L}_1\} = 0$ приводит к уравнению второго порядка в частных производных для потенциала $V(x,y)$

$$\frac{1}{2}(2\alpha_1 xy + \alpha_2 x + \alpha_4 y - \alpha_5)(V_{xx} - V_{yy}) + [\alpha_1(y^2 - x^2) + \alpha_2 y - \alpha_4 x + \alpha_3]V_{xy}$$
$$= (3\alpha_1 x + \frac{3}{2}\alpha_4)V_y - (3\alpha_1 y + \frac{3}{2}\alpha_2)V_x, \qquad (2)$$

где константы $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$ - формируют пространство решений уравнения (2). Существование дополнительного интеграла движения $\mathcal{L}_2$ приводит ко второму уравнению типа (2) с коэффициентами - $[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5]$. Следовательно суперинтегрируемый потенциал V должен одновременно удовлетворять двум уравнениям типа (2), что в свою очередь равносильно системе уравнений

$$V_{xx} - V_{yy} = AV_x + BV_y, \qquad V_{xy} = CV_x + DV_y \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
A\mathcal{E} &= \frac{3}{2}H_{12}(x^2+y^2) - 3H_{14}xy + 3H_{13}y - \frac{3}{2}H_{24}x + \frac{3}{2}H_{23}\\
B\mathcal{E} &= \frac{3}{2}H_{14}(x^2+y^2) - 3H_{12}xy - 3H_{13}x + \frac{3}{2}H_{24}y + \frac{3}{2}H_{34}\\
2C\mathcal{E} &= -3H_{14}y^2 - (\frac{3}{2}H_{24} - 3H_{15})y + \frac{3}{2}H_{25}\\
2D\mathcal{E} &= 3H_{12}x^2 - (\frac{3}{2}H_{24} + 3H_{15})x - \frac{3}{2}H_{45}\\
2\mathcal{E} &= -H_{12}xy^2 + H_{14}x^2y - H_{12}x^3 + H_{14}y^3 - 2H_{13}xy + H_{24}(x^2+y^2)\\
&+ H_{15}(x^2-y^2) + (H_{34} - H_{25})y + (H_{45} - H_{23})x - H_{35},
\end{aligned}$$

и $H_{k\ell} = -H_{\ell k} = \alpha_k\beta_\ell - \alpha_\ell\beta_k$. Показано, что если потенциал удовлетворяет фундаментальной системе уравнений (3) то есть принадлежит пространству решений с коэффициентами α_i и β_i $(i = 1, 2 \ldots 5)$, то он может зависить не более чем от трех параметров (не считая тривиальной аддитивной постоянной). Такие потенциалы образуют класс невырожденных суперинтегрируемых потенциалов. На основе системы уравнений (3) сформулированы условиям интегрируемости

$$\begin{aligned}
C_{xx} - C_{yy} - A_{xy} &= 2CC_y - DA_y - 2CD_x + AA_y - AC_x + CB_y + BC_y\\
D_{xx} - D_{yy} - B_{xy} &= -2DD_x - CB_x + 2DC_y - BB_x - BD_y + DA_x + AD_x,
\end{aligned}$$

которые позволяют проклассифицировать невырожденные потенциалы $V(x,y)$ и одновременно построить соответствующие интегралы движения $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Доказано, что существуют всего 12 невырожденных суперинтегрирумых потенциалов второго рода:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{\beta}{\sqrt{x^2+y^2+x}} + \frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2-x}}\right].\\
V_2 &= \frac{\alpha z}{\sqrt{c^2-z^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{(c-z)(c+\bar z)}} + \frac{\gamma}{\sqrt{(c+z)(c+\bar z)}}, \qquad z = x+iy.\\
V_3 &= \frac{\alpha}{z^2} + \frac{\beta}{\sqrt{z^3(\bar z+2)}} + \frac{\gamma}{\sqrt{z(\bar z+2)}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_4 &= \alpha(x^2+y^2) + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{y^2}.\\
V_5 &= \alpha\frac{x^2+y^2}{(x+iy)^4} + \frac{\beta}{(x+iy)^2} + \gamma(x^2+y^2).\\
V_6 &= \frac{\alpha z}{\sqrt{z^2-c^2}} + \frac{\beta\bar z}{\sqrt{z^2-c^2}(z+\sqrt{z^2-c^2})^2} + \gamma z\bar z\\
V_7 &= \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} + \beta\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \gamma\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}}{\sqrt{x^2+y^2}}.\\
V_8 &= \alpha(x-iy) + \beta(x+iy-\frac{3}{2}(x-iy)^2) + \gamma(x^2+y^2-\frac{1}{2}(x-iy)^3).\\
V_9 &= \alpha(4x^2+y^2) + \beta x + \frac{\gamma}{y^2}.\\
V_{10} &= \frac{\alpha}{\sqrt{x+iy}} + \beta x + \gamma\frac{2x+iy}{\sqrt{x+iy}}.\\
V_{11} &= \alpha z + \frac{\beta z}{\sqrt{\bar z}} + \frac{\gamma}{\sqrt{\bar z}}.\\
V_{12} &= \frac{\alpha\bar z}{\sqrt{\bar z^2-4}} + \frac{\beta}{\sqrt{z(\bar z+2)}} + \frac{\gamma}{\sqrt{z(\bar z-2)}}
\end{aligned}$$

каждый из которых разделяется как минимум в двух ортогональных системах координат (или разного типа или одинаковых но сдвинутых или повернутых друг относительно друга). Только четыре из приведенных потенциалов - V_1, V_4, V_7 и V_9 допускают реализацию в реальном Евклидовом пространтве и хорошо известны в литературе. Семь потенциалов $V_1, V_4, V_6, V_7, V_9, V_{10}$ и V_{12} встречаются в так называемом списке потенциалов Драха двумерных комплексных систем, обладающих интегралом движения третьего порядка.

В пункте 2.2 приведены соотношения определяющие квадратичную алгебру симметрии (как в классическом случае так и квантовом) для первых десяти потенциалов найденных в пункте 2.1.

Во втором параграфе подробно исследуется уравнению Шредингера для четырех суперинтегрирумых потенциалов на E_2 во всех системах координат где возможно разделение переменных. В качестве единого подхода к проблеме квантования таких потенциалов выбран метод Нивена, адаптированный как на точно-решаемые случаи, когда в качестве собственных функций выступают классические полиномы, так и для случаев, когда решение не может быть выписано в замкнутом виде.

Последний третий параграф посвящен межбазисным разложениям. На примере двумерного обобщенного осциллятора продемонстрирован как прямой так и теоретико-групповой метод вычисления межбазисных разложений. Показано, что матрицы перехода между полярным и декартовым базисами выражаются через гипергеометрические функции ${}_3F_2$ от единичного аргумента или коэффициента Клебша-Гордана группы $SU(1,1)$.

Пятая глава посвящена суперинтегрируемым системам на двумерной комплексной сфере S_{2C} включающей реальную сферу S_2 и гиперболоид H_2.

В первом параграфе на S_{2C} построены как вырожденные так и все невырожденные суперинтегрируемые потенциалы, допускающие разделение переменных в более чем одной ортогональной системе координат, и обладающие парой функционально независимых интегралов движения. В отличии от метода классификации, предложенного в четвертой главе, здесь существенно используется факт разделение переменных. Доказано, что существует только шесть невырожденных потенциалов

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\alpha}{\bar{w}^2} + \frac{\beta z}{\bar{w}^3} + \frac{\gamma(1-4z^2)}{\bar{w}^4}, \quad w = x + iy,\\
V_2 &= \frac{\alpha}{z^2} + \frac{\beta}{\bar{w}^2} + \frac{\gamma w}{\bar{w}^3},\\
V_3 &= \frac{\alpha}{\bar{w}^2} + \frac{\beta z}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\gamma}{\bar{w}\sqrt{x^2+y^2}},\\
V_4 &= \frac{\alpha x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{\beta y}{z^2\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{\gamma}{z^2},\\
V_5 &= \frac{\alpha x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{\beta(w-z)}{\sqrt{w(z-iy)}} + \frac{\gamma(w+z)}{\sqrt{w(z+iy)}},\\
V_6 &= \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{y^2} + \frac{\gamma}{z^2},
\end{aligned}$$

и три вырожденных потенциала: (частные случаи потенциалов V_2 и V_3), осциллятор Хиггса, аналог двумерного атома водорода и обратный квадратичный потенциал. Потенциалы V_4 и V_6 допускают вещественную форму на S_2 и подробно изучены в третьем параграфе. Показано, что все приведенные выше потенциалы генерируют квадратичную алгебру симметрии.

Во втором параграфе построена серия двумерных небиективных преобразований (в случае сферической геометрии преобразование $S_{2C} \to S_2$ является комплексным), обобщающих хорошо известное в плоском евклидовом пространстве преобразование Леви-Чивиты. На S_2 это преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}{2u_3} \begin{pmatrix} iu_1 & -iu_2 & 0 \\ iu_2 & iu_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 2u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Показано, что преобразование (4) позволяет свести уравнение Шредингера для кулоновского потенциала на S_2 к уравнению Шредингера для потенциала Хиггса на комплексной сфере S_{2C} и последующей редукцией восстановить спектр энергии и корректно нормированные сферические волновые функции.

В третьем параграфе найдено решение уравнения Шредингера на S_2 для двух сингулярных потенциалов кулоновского и осцилляторного типа в сферической и эллиптической системах координат.

В четвертом параграфе подробно исследуются четыре суперинтегрируемых системы на гиперболоиде H_2. Во всех случаях, где разделение переменных не позволяет свести задачу к точно решаемому типу (то есть к гипергеометрическим функциям), применяется метод Нивена.

В шестой главе исследованы многомерные суперинтегрируемые систем. Первый параграф посвящен трехмерным Евклидовым системам. В рамках метода Нивена детально изучены три из пяти (оставшиеся два не обладают дискретным спектром) известных максимально суперинтегрируемых потенциалов: сингулярный осциллятор, анизотропный осциллятор и сунгулярный кулоновский потенциал. Для двух первых потенциалов построено расширение двумерных квадратичных алгебр симметрии на более высокие размерности. Все перечисленные суперинтегрируемые потенциалы допускают обобщение на N - мерное пространство.

Во втором параграфе подробно разобран N - мерный сингулярный осциллятор. В пункте 2.1 на основе диаграмм Виленкина-Кузнецова-Смородинского предложено графическое правило записи волновых функций для многомерного уравнения Пешля-Теллера. В пункте 2.2 для матрицы перехода

$$\Psi_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{q}} W_{\mathbf{n}}^{N,\mathbf{q}} \Psi_{n_r,\mathbf{l}}$$

$(\mathbf{l} = (\ell_1, \ldots, \ell_{D-1}),\ \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_{D-1}),\ \mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_D),\ N = n_1 + \ldots + n_D = n_r + q_1 + \ldots + q_{D-1})$ от многомерного декартового базиса к произвольному гиперсферическому получено общее интегральное преобразование

$$W_{\mathbf{n}}^{N,\mathbf{q}} = \frac{(-1)^{N-n_r}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2^{2D} n_r! \Gamma(n_r + l + \frac{D}{2})}{\prod_{i=1}^{D} [n_i! \Gamma(n_i \pm k_i + 1)]}} \times \int d\Omega(\theta) Y_l(\theta) \prod_{i=1}^{N} (\tilde{x}_i)^{(2n_i \pm k_i + \frac{1}{2})}.$$

Показано, что переходы "декарт-гиперсфера" генерируются матрицами представляющими собой произведение коэффициентов Клебша-Гордана группы $SU(2)$, если формально их распространить на произвольные вещественные значения моментов. В пункте 2.3 развит диаграммный метод построения матрицы перехода $W_{\mathbf{n}}^{N,\mathbf{q}}$.

Третий параграф посвящен решению кулоновской проблемы на трехмерной сфере S_3. По аналогии с двумерной сферой, в пункте 3.1 найдено комплексное преобразование $S_{4C} \to S_3$, обобщающее известное преобразование Кустанхеймо-Штифеля. В пункте 3.2 показано, что данное преобразование позволяет установить соответствие между кулоновской задачей на S_3 и осцилляторной задачей на комплексной четырех сфере S_{4C}. Найдено решение уравнения Шредингера для четырехмерного потенциала Хиггса и последующей редукцией восстановлены спектр энергии и ортонормированные волновые функции для атома водорода на трехмерной сфере. В пункте 3.3 отмечено, что наличие аналога вектора Рунге-Ленца для кулоновской проблемы на S_3 приводит как и в плоском случае к разделению переменных в дополнительной "параболической" системе координат, представляющей собой частный случай вытянутой эллиптической системы. Получены трехчленные рекуррентные соотношения определяющие интегралы перекрытия W^ℓ, связывающие эллиптический базис с соответствующим сферическим ($\ell = 0, 1, ..N$):

$$\sqrt{\frac{[N^2-(\ell+1)^2][(\ell+1)^2+\sigma^2]}{(2\ell+1)(2\ell+3)}}\,W_{\ell+1} + \frac{1}{kk'}[\lambda-(k^2-k'^2)\ell(\ell+1)]\,W_\ell + \sqrt{\frac{(N^2-\ell^2)(\ell^2+\sigma^2)}{(2\ell-1)(2\ell+1)}}\,W_{\ell-1} = 0, \qquad (5)$$

где λ - это эллиптическая константа разделения, а k, k' - параметры эллиптической системы координат. В четвертом параграфе установлено кулон-осцилляторное соответствие для N-мерных пространств постоянной кривизны. Показано, что квазирадиальное уравнение Шредингера описывающее $n^{coul} = d+1$ - мерную кулоновскую проблему совпадает с $n^{osc} = 2d$ - мерным квазирадиальным уравнением для осциллятора на сфере и одно- и двухполосом гиперболоидах при соотвествующих размерностях.

В заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

В приложении найдено условие существования решений для переопределенной системы однородных алгебраических уравнений встречающейся при исследовании уравнения Гельмгольца на трехмерной сфере в эллипсоидальной системе координат.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. C.Grosche, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *Path Integral discussion for Smorodinsky - Winternitz Potentials: I. Two - and three Dimensional Euclidean Space.* Fortschritte der Physik, **43(6)**, 453-521, 1995.

2. C.Grosche, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *Path Integral discussion for Smorodinsky - Winternitz Potentials: II. Two - and Three Dimensional Sphere.* Fortschritte der Physik, **43(6)**, 523-563, 1995.

3. C.Grosche, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *Path Integral Approach to Superintegrable Potentials. Two - Dimensional Hyperboloid.* ЭЧАЯ, V27, 593-574, 1996.

4. C.Grosche, Kh.G.Karayan, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *Free Motion on the Three-Dimensional Sphere: The Ellipso-Cylindrical Bases.* J. Phys., **A30**, 1629–1657, 1997.

5. R.G.Airapetyan, Kh.G.Karayan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian and D.I.Zaslavsky. *Quantum Motion on the Three-Dimensional Sphere. Ellipsoidal Bases.* Сообщение ОИЯИ, E2-96-117, Дубна, 1996.

6. A.A.Izmest'ev, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian and P.Winternitz. *Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables.* J. Phys **A 29**, 5940, 1996.

7. G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *On the Kepler-Coulomb problem in the three-dimensional space with constant positive curvature.* Turkish Journal of Phys., V21, 515-524, 1997.

8. E.G.Kalnins, W.MIller Jr. and G.S.Pogosyan. *Superintegrability and associated polynomial solutions. Euclidean space and sphere in two-dimensions.* J. Math. Phys. **37**, 6439, 1996

9. A.A.Izmest'ev, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian and P.Winternitz. *Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables. Two-Dimensional Hyperboloid.* International Journal of Modern Physics. **A12(1)**, 53-61, 1997.

10. A.A.Izmest'ev, and G.S.Pogosyan. *Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables on Three-Dimensional Sphere.* In Proceedings "Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups, and Algebras", Eds: H.-D. Doebner, W. Scherer, P. Nattermann. World Scientific, Singapore, page 137, 1997.

11. E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. *Superintegrability on the two dimensional hyperboloid.* J.Math.Phys. **38**, 5416-5433, 1997.

12. A.A.Izmest'ev, G.S.Pogosyan. *Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables. From Two-Dimensional Hyperboloid to Two Dimensional Minkovsky Space.* Препринт ОИЯИ, E2-98-83, Дубна, 1998.

13. Ye.M.Hakobyan, G.Pogosyan and A.N.Sissakian. *On a Generalized D-dimensional Oscillator. Interbasis Expansions,* ЯФ, **61** (10), 1762-1767, 1998.

14. Ye.M.Hakobyan, M.Kibler, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *On a Generalized Oscillator: Invariance Algebra and Interbasis Expansions..* ЯФ, **61**, 1782-1788, 1998.

15. Ye.M.Hakobyan, E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. *Superintegrability in two dimensional hyperboloid II.* J.Math.Phys., **40**, 2291-2306, 1999.

16. A.A.Izmest'ev, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian and P.Winternitz. *Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables. N-dimensional sphere.* J.Math.Phys., **40**, 1549-1573, 1999.

17. E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. *Superintegrability in the three dimensional Euclidean space.* J.Math.Phys., **40**, 708-725, 1999.

18. E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. *Coulomb-oscillator duality in spaces of constant curvature.* J.Math.Phys. **41**, 2629-2657, 2000.

19. E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. *Completeness of multiseparable supereintegrability in* $E_{2,C}$. J.Phys.**A33**, 4105-4120, 2000.

20. E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. *Completeness of multiseparable supereintegrability on the complex 2-sphere.* J.Phys.**A33**, 6791-6806, 2000.

21. A.A.Izmest'ev, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian and P.Winternitz. *Contraction of interbasis expansions for subgroup coordinates on N-dimensional sphere.* J. Phys. **A34**, 521-554, 2001.

22. E.G.Kalnins, J.M.Kress, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. *Completeness of superintegrability in two dimensional constant curvature spaces.* J.Phys. **A34**, 4705-4720, 2001.

23. П.Винтерниц, К.Б.Вольф, Г.С.Погосян и А.Н.Сисакян. *Вывод теоремы сложения Графа путем контракций группы* $SO(3)$ ТМФ, **129(2)**, 227-229, 2001.

24. E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. *The Coulomb-Oscillator Relation on n-Dimensional Spheres and Hyperboloids.* ЯФ, **65(6)**, 1119-1127, 2002.

25. E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. *Completeness of multiseparable superintegrability in two dimensions.* ЯФ, **65(6)**, 1066-1068, 2002.

Получено 22 апреля 2003 г.