ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-2002-213

На правах рукописи
УДК 539.12.01; 539.171.016; 539.172.17

МЛАДЕНОВ
Димитар Магдалинов

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ И ГРАВИТАЦИИ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2002

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. ПЕРВУШИН
кандидат физико-математических наук
А.М. ХВЕДЕЛИДЗЕ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
В.В. НЕСТЕРЕНКО (ЛТФ ОИЯИ)
доктор физико-математических наук
В.П. ПАВЛОВ (МИ РАН, г. Москва)

Ведущая организация:
Институт ядерных исследований, г. Москва.

Защита диссертации состоится "____" __________ 2002 г. в $15^{\underline{00}}$ на заседании диссертационного совета К 720.001.01 при Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "____" __________ 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета С.И. ФЕДОТОВ

Актуальность темы.

Исследование интегрируемых моделей привлекает к себе внимание как с чисто теоретической точки зрения, так и с точки зрения их практического применения в различных областях физики. Наряду с традиционным интересом к этой проблеме в задачах классической механики, в настоящее время особую актуальность приобрел анализ интегрируемости теоретико-полевых моделей, связаных с описанием фундаментальных гравитационных и сильных взаимодействий. На протяжении последних десятилетий в центре внимания теоретической и математической физики и физики элементарных частиц находятся две фундаментальные проблемы: конфайнмент, т.е. проблема невылетания кварков из адронов, и построение непротиворечивой теории квантованного гравитационного поля. Достижение прогресса в решении этих задач невозможно без исследования свойств квантовой хромодинамики и общей теории относительности в области сильной связи, за пределами применимости стандартных теоретико-полевых методов, основанных на теории возмущения. Эти мощные методы, сыгравшие исключительную роль в теории электрослабых взаимодействий, оказались недостаточными для эффективного описания физики сильновзаимодействующих частиц и теории гравитации, где даже качественная картина процессов требует учета непертурбативных эффектов. Современный анализ этих проблем показал, что для описания непертурбативных решений квантовых теорий важным игредиентом становится анализ специфических интегрируемых систем. Ярким примером этому могут быть полученные Зайбергом и Виттеном непертурбативние решения, допускающие естественное отображение на классические механические модели, а именно на модели Тоды и Калоджеро-Мозера. Причем интересно, что формулировка в терминах интегрируемых систем оказалась в определенной степени универсальной, т.е. модели, с первого взгляда совершенно не похожие друг на друга могут иметь в своей основе одну и туже интегрируемую систему. Тем самым подход, основанный на использовании интегрируемых систем, охватывает широкий спектр задач, от квантовой хромодинамики при высоких энергиях до точно решаемых моделей двумерной и трехмерной гравитации.

Целью работы является определение и детальный анализ интегрируемых моделей лежащих в основании однородных космологических моделей Бианки и теории неабелевых калибровочных полей с калибровочной группой $SU(2)$.

Научная новизна и практическая ценность. Предложен новый подход к описанию вырожденных лагранжевых систем, обладающих калибровочной и репараметризационной инвариантностью. Развита схема гамильтоновой редукции, позволяющая в явном виде отделить калибровочно зависимые переменные и найти инвариантный (физический) сектор теории. Данная схема практически реализована для теории поля Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(2)$. Детально описана редукция однородных космологичесих моделей Бианки и в так называемой $SU(2)$ механике Янга-Миллса, которая возникает при анализе длинноволнового приближения $SU(2)$ глюодинамики.

При рассмотрении геодезического движение на группе $GL(n, \mathbb{R})$ с би-инвариантной метрикой, впервые показано, что гамильтониан задающий геодезическое движение на регулярных стратах группы $SO(n, \mathbb{R})$ в $GL(n, \mathbb{R})$ представляет обобщение модели Эйлера-Калоджеро-Мозера-Сазерленда на случай частиц, обладающих двумя дополнительными внутренними степенями свободы, типа спина и изоспина. При этом оказалось, что геодезическое движение на сингулярных стратах приводит к масс-деформированной модели типа Эйлера-Калоджеро-Мозера-Сазерленда, т.е. к описанию динамики частиц с различными массами. До сих пор была известна только

квантовая интегрируемая версия модели Калоджеро-Мозера-Сазерленда при сильном предположении, что масса только одной из частиц отличается от масс других тождественных частиц.

В диссертации впервые показано $SU(2)$ механика Янга-Миллса в мговенной форме динамики эквивалентна системе $\mathrm{I}D_3$ Эйлера-Калоджеро-Мозера с внешним потенциалом четвертой степени, в то время как соответствующая $SU(2)$ механика Янга-Миллса в динамике светового фронта совпадает с так называемой конформной механикой и тем самым является интегрируемой системой.

Впервые найдено представление для космологической модели Бианки I в форме, в которой динамика наблюдаемых описывается гамильтонианом, представляющим положительно определенную квадратичную форму физических имульсов, не зависящую от наблюдаемого времени. Заметим, что до настоящего времени для генератора эволюции применялся гамильтониан выраженный в виде квадратного корня, что приводит к трудностям при квантовании системы. Помимо этого показано, что данный гамильтониан совпадает с гамильтонианом относительного движения в интегрируемой системе $\mathrm{II}A_3$ Эйлера-Калоджеро-Сазерленда. Используя найденное соответствие с интегрируемой системой, получено общее решение вакуумных уравнений Эйнштейна для метрики Бианки I в случае компактной трехмерной пространственноподобной гиперповерхности.

Апробация работы.

Результаты, представленные в диссертации, докладывались на научных семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, Отдела квантовой теории поля Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Кафедры теоретической физики Физического факультета Софийского университета, Отдела теоретической физики Математического института им. А.М. Размадзе АН Грузии, на X международной конференции "Problems of Quantum Field Theогу" (Алушта, Украина, 1996), на IX и X международном семинаре "Гравитационная энергия и гравитационние волны" (Дубна, 1996,1997), на IX международной конференции Российского гравитационного общества "Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации" (Новгород, 1996), на международной конференции "Physical Variables in Gauge Theories" (Дубна,1999), на XXIII международной конференции "Group Theoretical Methods in Physics" (Дубна, 2000) на международной конференции "Calogero-Moser models and its Applications" (Рим, 2001).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 15 работ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения с общим объемом 136 страниц. Список цитированной литературы содержит 218 наименований.

Содержание работы

Во введении рассмотрена роль интегрируемых систем в калибровочных теориях и гравитации, дан обзор основных подходов и результатлов, сформулированы цели диссертации и кратко изложено ее содержание.

Первая глава является вводной. В ней приведены и сформулированы результаты, используемые в последующих главах диссертации при получении основных результатов. Она посвящена проблематике, связанной с изучением динамических систем с конечным числом степеней свободы, обладающих локальной симметрией. В рамках обобщенной гамильтоновой теории обсуждается процедура редукции системы динамических уравнений к так называемому нормальному виду, когда задачи Коши имеет единственное решение. Основное внимание уделено изложению гамильтоновой схемы редукции, которая позволяет выделить физическое подпространство в фазовом пространстве вырожденной динамической системы и найти в явном виде соответствующие канонические переменные без явного введения в теорию дополнительных калибровочных условий.

Вторая глава посвящена исследованию геодезического движения на группе $GL(n,\mathbb{R})$ с би-инвариантной метрикой. Проведен анализ динамики в соответствии с симплектическим действием группы симметрии $SO(n,\mathbb{R})$. Показано, что гамильтониан задающий геодезическое движение на регулярных стратах группы $SO(n,\mathbb{R})$ в $GL(n,\mathbb{R})$ может быть представлен в виде

$$H_{GL} = \frac{1}{8}\sum_{a=1}^{3} p_a^2 + \frac{1}{16}\sum_{(abc)} \frac{\xi_a^2}{\sinh^2(x_b - x_c)} - \frac{1}{4}\sum_{(abc)} \frac{\left(R_{am}\eta_m + \frac{1}{2}\xi_a\right)^2}{\cosh^2(x_b - x_c)}$$

и тем самым представляет собой обобщение многочастичной модели Эйлера-Калоджеро-Мозера-Сазерленда. В обобщенном случае частицы помимо канонических переменных (x_a, p_a), определяющих положение частиц на прямой и их импульсы, описываются еще и дополнительными переменными: "спином" ξ_a и "изоспином" η_a

$$\{\xi_a\,, \xi_b\} = \epsilon_{abc}\,\xi_c\,, \qquad \{\eta_a\,, \eta_b\} = \epsilon_{abc}\,\eta_c\,, \qquad \{\xi_a\,, \eta_b\} = 0\,.$$

Анализ геодезического движения на сингулярных стратах приводит к другому типу обобщения, а именно массы частиц полученной модели типа Эйлера-Калоджеро-Мозера-Сазерленда находятся в произвольном рациональном отношении. Далее приведены результаты редукции полученной системы на различные инвариантные подмногообразия с использованием как непрерывных так и дискретных симметрий обобщенной модели. Результаты этой главы используются далее в диссертации, поскольку как показано в последующих главах динамика наблюдаемых в таких вырожденных системах как механика Янга-Миллса и космологические модели Бианки может быть представлена в виде гамильтоновых потоков на группе $GL(n,\mathbb{R})$.

В третьей главе выполнена гамильтонова редукция $SU(2)$ теории поля Янга-Миллса с произвольным θ-углом к нелокальной теории без связей, описывающей самодействующее симметрическое тензорное поле второго ранга. Показано, что при точной проекции на редуцированное пространство топологический инвариант Понтрягина в действии остается дивергенцией и тем самым обеспечивается θ-независимость полученной нелокальной теории. Однако, разложение нелокальной части гамильтониана по степеням обратной константы связи приводит к нарушению θ-независимости уже в низшем приближении. С целью сохранения свойства θ-независимости предложенна модификация разложения по степеням обратной константы связи. Получен соответствующий приближенный лагранжиана второго порядка по производным полей а также выражение для аналога тока Черна-Саймонса, линейного по производным полей. Далее, путем разложения действия вблизи минимума классического потенциала, выведена эффективная теория типа нелинейной σ-модели, в которой исходный топологический инвариант Понтрягина средуцирован к инварианту Хопфа отображения 3-сферы на единичную 2-сферу, записанному в интегральной форме Уайтхеда.

В четвертой главе метод гамильтоновой редукции в рамках формализма Дирака для систем со связями применяется к двум формам $SU(2)$ механики Янга-Миллса: мгновенной и светового фронта. Две формы $SU(2)$ механики Янга-Миллса возникают как нулевое приближение в длинноволновом разложении полевой $SU(2)$ калибровочной теории, сформулированной соответственно в мгновенной форме динамике и на световом фронте. Первая система интенсивно изучалась с точки зрения анализа вакуума в калибровочных теориях и в последнее время в связи с прояснением механизма точной интегрируемости четырехмерной $N=2$ суперсимметричной модели Янга-Миллса.

В этой главе показано, что редуцированный гамильтониан $SU(2)$

механики Янга-Миллса в мгновенной форме совпадает с гамильтонианом системы ID_3 Эйлера-Калоджеро-Мозера

$$H_{YMM} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3} p_a^2 + \frac{1}{4}\sum_{(abc)}^{3}\left(\frac{1}{(x_b+x_c)^2} + \frac{1}{(x_b-x_c)^2}\right)\xi_a^2 + V(x_1,x_2,x_3)$$

с внешним потенциалом $V(x_1,x_2,x_3)$, допускающим представление в суперпотенциалной форме

$$V(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial W}{\partial x_a}\frac{\partial W}{\partial x_a},$$

с суперпотенциалом $W = x_1x_2x_3$. Это представление позволяет непосредственно строить $N=2$ суперсимметричное обобщение данной модели.

Формулировка теории полей Янга-Миллса на световом фронте существенно отличается от описания в мгновенной форме динамики. В частности, при переходе к переменным светового конуса кроме известных связей первого рода появляются дополнительные связи, представляющие смешанную систему связей первого и второго рода, анализ которых представляет собой сложную задачу. Эта особенность заставляет различных авторов прибегать к различного рода дополнительным предположениям. В случае $SU(2)$ механики Янга-Миллса, рассмотенной в динамике светового конуса, в диссертации найдена полная алгебра связей первого и второго рода и показана приводимость алгебры связей первого рода к абелевому виду. С этой целью были использованы эффективные вычислительные алгоритми на основе программ для аналитических вычислений в системе MAPLE. В результате редукции получен гамильтониан

$$H_{LCYMM} = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{l^2}{x^2}\right), \tag{1.1}$$

где l^2 константа. Тем самым показана эквивалентность $SU(2)$ механики Янга-Миллса в динамике светового конуса хорошо известной модели конформной механики.

<u>В пятой главе</u> методами гамильтоновой редукции проанализированы однородные космологические модели Бианки и определена динамика наблюдаемых. С математической точки зрения эти модели описываются четырехмерными псевдоримановыми многообразиями Эйнштейна $\mathcal{M}$, которые допускают такое $3+1$ разбиение, что трехмерные пространственноподобные подмногообразия являются орбитами трех-параметрической группы Ли, действующей просто транзитивно на $\mathcal{M}$. С точки зрения физических приложений модели Бианки описывают однородную и анизотропную Вселенную и в определенной степени претендуют на описание реальной геометрии мира в согласии с современными экспериментальными данными о слабой анизотропии наблюдаемой Вселенной. Несмотря на то, что девяти моделям Бианки посвящено большое количество научных исследований, как физических так и математических, окончательная картина динамики наблюдаемых еще не получена. В частности остаются открытыми вопросы относительно глобальной геометрии Вселенной. Поэтому в данной главе на основе обобщенного гамильтонового метода сделаны первие шаги в этом направлении. Проведено исследование простейшей космологической модели Бианки I, для которой было показано, что редуцированный гамильтониан, описывающий динамику наблюдаемых, совпадает с гамильтонианом относительного движения модели IIA_3 Эйлера-Калоджеро-Сазерленда

$$H_{BI} = \frac{1}{12}\left(p_+^2 + p_-^2\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\xi_1^2}{\sinh^2(3\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} + \frac{\xi_2^2}{\sinh^2(3\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} + \frac{\xi_3^2}{\sinh^2(2\sqrt{3}\beta_-)}\right)$$

с каноническими координатами (x_+, p_+, x_-, p_-) и спиновыми степенями свободы ξ. Данная идентификация позволяет получить явные решения вакуумных уравнений Эйнштейна и проанализировать вопрос эквивалентности метрик модели Бианки I. Помимо этого в четвертой главе приведены также результаты исследования и космологической модели Бианки IX. Для нее получено представление в котором алгебра импульсных связей абелизирована и построено каноническое преобразование к репараметрически инвариантным динамическим переменным. Кроме этого гамильтонова связь записана в форме соответствующей геодезическому движению на трехмерном римановом многообразии. Полученное представление оказывается удобным для исследования возможной интегрируемости космологической модели Бианки IX.

<u>В заключении</u> сформулированы основные результаты, представленные в диссертации.

<u>На защиту выдвигаются следующие результаты</u>, полученные в диссертации

1. Получено интегрируемое обобщение модели Эйлера-Калоджеро-Мозера-Сазерленда на случай частиц с двумя типами внутрених переменных — "спином" и "изоспином". Показано, что данная модель соответствует геодезическому движению на группе $GL(n,\mathbb{R})$ с би-инвариантной метрикой, когда динамика рассматривается на регулярной страте действия группы $SO(n,\mathbb{R})$ в $GL(n,\mathbb{R})$.

2. При рассмотрении геодезического движения с би-инвариантной метрикой на сингулярных стратах группы $SO(n,\mathbb{R})$, действующей в $GL(n,\mathbb{R})$ получена масс-деформированная модель типа Эйлера-Калоджеро-Мозера-Сазерленда, в которой массы частиц находятся в произвольном рациональном отношении.

3. Выполнена гамильтонова редукция $SU(2)$ теории поля Янга-Миллса с топологическим инвариантом Понтрягина в действии. Показано, что при точной проекции на редуцированное пространство топологический инвариант Понтрягина в действии остается дивергенцией. Получен соответствующий прибли-

женный лагранжиана второго порядка по производным полей а также выражение для аналога тока Черна-Саймонса, линейного по производным полей. Выведена эффективная теория типа нелинейной σ-модели, с инвариантом Хопфа отображения 3-сферы на единичную 2-сферу, представленным в форме Уайтхеда.

4. Осуществлена гамильтонова редукция $SU(2)$ механики Янга-Миллса к ID_3 модели Эйлера-Калоджеро-Мозера с внешним потенциалом.
5. Показано, что $SU(2)$ механика Янга-Миллса в динамике светового фронта эквивалентна одномерной конформной механике.
6. Для космологической модели Бианки I получено представление, в котором редуцированный гамильтониан системы совпадает с гамильтонианом относительного движения частиц в IIA_3 модели Калоджеро-Сазерленда со спином.
7. Получено общее решение для метрики космологической модели Бианки I, обобщающее известное вакуумное решение Казнера на случай компактных трехмерных пространственноподобных многообразий.
8. Показано, что супергамильтониан космологической модели Бианки IX задает геодезическое движение на трехмерном римановым многообразии.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. **S.A. Gogilidze, A.M. Khvedelidze, D.M. Mladenov, and V.N. Pervushin**, *Hamiltonian analysis of Bianchi IX cosmology*, Gravitation and Cosmology **3**, 85-88, 1997.
2. **S.A. Gogilidze, A.M. Khvedelidze, D.M. Mladenov, and V.N. Pervushin**, *On generalized dynamics of Bianchi IX cosmology*, Proceeding of the Eighth Marcel Grossmann Meeting, Hebrew University, Jerusalem, 1997.
3. **S.A. Gogilidze, A.M. Khvedelidze, D.M. Mladenov, and H.-P. Pavel**, *Reduction of $SU(2)$ Dirac-Yang-Mills mechanics*, JINR preprint E2-97-218, 1997.
4. **S.A. Gogilidze, A.M. Khvedelidze, D.M. Mladenov, and H.-P.Pavel**, *On Hamiltonian reduction of $SU(2)$ Dirac-Yang-Mills mechanics*, Phys. Rev. **D 57**, 7488-7500, 1998.
5. **С.А. Гогилидзе, Д.М. Младенов, А.М. Хведелидзе**, *Двухпараметрическое решение космологической модели Бианки I*, Труды IX международного семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны", Дубна, 1998.
6. **A.M. Khvedelidze and D.M. Mladenov**, *$SU(2)$ Yang-Mills mechanics and ID_3 Euler-Calogero-Moser model with inverse square potential*, Proceedings of the Seminar Symmetries and integrable systems, Dubna, 1999.
7. **A.M. Khvedelidze and D.M. Mladenov**, *On rational Euler-Calogero-Moser model and Yang-Mills mechanics*, Proceedings of International Seminar Physical Variables in Gauge Theories, Dubna, 2000.
8. **A.M. Khvedelidze and D.M. Mladenov**, *Euler-Calogero-Moser model from $SU(2)$ Yang-Mills theory*, Phys. Rev. **D 62**, 125016 (1-9), 2000.
9. **A.M. Khvedelidze and D.M. Mladenov**, *Classical mechanics on $GL(n,\mathbb{R})$ group and Euler-Calogero-Sutherland model*, Physics of Atomic Nuclei **65**, 1042-1046, 2002; Yadernaya Fizika **65**, 1075-1079, 2002; [arXiv: nlin/0101033].

10. **A.M. Khvedelidze and D.M. Mladenov**, *Generalized Calogero-Moser-Sutherland models from geodesic motion on $GL(n, \mathbb{R})$ group manifold*, Phys. Lett. **A 299** (2002) 522-530; [arXiv: nlin/0103047].

11. **A.M. Khvedelidze, D.M. Mladenov, H.-P. Pavel, and G. Röpke**, *On unconstrained $SU(2)$ gluodynamics with theta angle*, Eur. Phys. J. **C 24** 137-141, 2002; [arXiv: hep-th/0110016].

12. **A.M. Khvedelidze, D.M. Mladenov, H.-P. Pavel, and G. Röpke**, *Unconstrained $SU(2)$ Yang-Mills theory with topological term in the long-wavelength approximation*, [arXiv: 0202145].

13. **A.M. Khvedelidze and D.M. Mladenov**, *Bianchi I cosmology and Euler-Calogero-Sutherland model*, [arXiv: gr-qc/0208037].

14. **V.P. Gerdt, A.M. Khvedelidze and D.M. Mladenov**, *Analysis of constraints in light-cone version of $SU(2)$ Yang-Mills mechanics*, Proceedings of International Workshop Computer Algebra and its Application to Physics, Dubna, 2001; [arXiv: 0209107].

15. **V.P. Gerdt, A.M. Khvedelidze and D.M. Mladenov**, *Light-cone $SU(2)$ Yang-Mills theory and conformal mechanics*, [arXiv: hep-th/0209236].

Получено 13.09.2002.