ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-2001-97

На правах рукописи
УДК 539.12.01

КРЮКОВ
Сергей Владимирович

СИММЕТРИИ КВАНТОВЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2001

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова Объединенного института ядерных исследований

Научный руководитель: доктор физико-математических наук В.И.Иноземцев

Официальные оппоненты:
кандидат физико-математических наук С.Н.Вергелес
профессор, доктор физико-математических наук В.Б. Приезжев

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. Стеклова

Защита состоится "27" июня 2001 г. в 15^00 часов на заседании диссертационного совета К 720.001.01 в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ, г. Дубна Московской области

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "23" мая 2001 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

С.И. Федотов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Одной из главных задач квантовой теории поля на современном этапе является согласование экспериментальных данных и теоретических построений. Многие вопросы теории сильных взаимодействий до сих пор остаются открытыми, потому что теория возмущений, которая хорошо работает в квантовой электродинамике, здесь в принципе неприменима. Поэтому актуально разрабатывать методы расчета квантовых величин, которые не используют вычислений по теории возмущений. Выражения для таких величин получаются точными (в рамках данной квантовой теории). Чтобы разработать новые идеи и методы, обычно используют более простые модели. Рассматривается теория скалярного поля с нелинейным взаимодействием; эта теория является лоренц-инвариантной теорией поля в одном пространственном и одном временном измерении. Оказывается, полезно рассматривать теории, которые на классическом уровне являются интегрируемыми, т.е. обладают бесконечным количеством интегралов движения, находящихся в инволюции. На квантовом уравне интегрируемость приводит к факторизации многочастичной S- матрицы рассеяния на произведение двухчастичных S- матриц и к возможности записать для двухчастичной S- матрицы уравнение треугольников [1].Этот результат является непертурбативным - он не использует теорию возмущений. Решение этого уравнения и условий кроссинга и унитарности обычно выбирается в простейшем виде. Оно согласуется с вычислением S- матрицы по теории возмущений. Другой пример непертурбативной информации об интегрируемой теории - квантовые интегралы движения. Это происходит по причине того, что одновременная скобка Пуассона модели не определяется взаимодействием или динамикой системы, а содержит информацию лишь о ее фазовом пространстве, которое совпадает с фазовым пространством свободной теории. Вся динамическая информация определяется гамильтонианом теории. Интегралы движения строятся по этой скобке и могут быть получены точно в квантовом случае. Поэтому очень важно изучать пространство интегралов движения на квантовом уровне. Вероятно, скорее всего, что это- вообще единственная информация, которая может быть точно получена. Если удастся найти симметрию, которая построена из интегралов движения, то это будет точная квантовая симметрия модели. Ранее были известны модели, обладающие точной квантовой симметрией – это хорошо известная конформная теория поля [2],которая описывает критические флюктуации статистических систем. Использование свойств этой симметрии позволило вычислить квантовые корреляционные функции и тем самым полностью решить модель. В данной работе мы получаем симметрию, построенную из интегралов движения в лоренц-инвариантных теориях поля - таких, как синус - Гордон и Жибер – Шабат. По всей видимости, результат является совершенно общим и может быть расширен на другие теории поля такого вида - теории поля аффинных Тод, связанных с полупростой алгеброй Ли. Другая характерная черта данных симметрий - это выделение констант связи, для которых эта симметрия появляется.

Другое направление исследования низкоразмерных систем – это точно решаемые модели статистической механики. В точке фазового перехода такие модели могут быть решены с помощью эффективной теории поля. Однако в некритической области нужно использовать другие методы, потому что конформная симметрия исчезает.

Для точного решения этих моделей в некритической области используют так называемые квантовые алгебры или квантовые группы. Они фактически являются q- деформациями обычных алгебр Каца -Муди и Вирасоро или их расширений – W-алгебр. Существует связь между алгебрами Каца-Муди и W- алгебрами. С помощью квантовой редукции Дринфельда-Соколова можно, например, из $s\hat{l}_2$ алгебры получить алгебру Вирасоро. Это необходимо для изучения представлений старшего веса и формул для сингулярных векторов алгебры Виросоро.

Поэтому важно знать, как из q- деформированной алгебры Каца-Муди $U_q(s\hat{l}_2)$ получить q -деформацию алгебры Вирасоро, используя квантовый аналог редукции Дринфельда-Соколова.

Цель диссертации

1. Продемонстрировать квантовые особенности взаимодействия в теории поля на примере интегрируемых систем.
2.Провести редукцию, являющуюся квантовым аналогом редукции Дринфельда-Соколова, и получить в результате редукции деформированную алгебру Вирасоро.
3.Показать, что возможно построение алгебр принципиально нового типа, управляющих квантовым взаимодействием в интегрируемых системах.

Научная новизна

1. Развит подход к квантованию интегрируемых лоренц - инвариантных моделей, таких как синус -Гордон и Жибер-Шабат, сохраняющих интегрируемость. Исследованы возможности увеличения количества интегралов движения на квантовом уровне.
2. Как логическое продолжение, эта процедура квантования дает новые гамильтонианы, которые допускают высшие интегралы движения и эти модели существуют только в квантовом случае. Эти теории не имеют хорошо определенного классического предела и в каком- то смысле близки к возмущенным конформным теориям поля, предложенным Замолодчиковым.
3. Обнаружены квантовые некоммутирующие интегралы движения и связанные с ними сохраняющиеся токи. Алгебры, которые образуют эти токи - это бесконечномерные центрально -расширенные алгебры, являющиеся принципиально новыми алгебраическими объектами. Получено представление свободных полей для генераторов простейшей алгебры.Для нее построено представление старшего веса и простейшие семейства сингулярных векторов.
4. Построен квантовый аналог гамильтоновой редукции для деформированной алгебры $U_q(s\hat{l}_2)$. Найдены два возможные констрейнта на токовый генератор. Найден $BRST$ оператор такой редукции и вычислены его когомологии. В результате редукции получена известная q- деформация алгебры Вирасоро.
5. Изучается классический предел для квантовой решеточной системы Синус-Гордон. Из обнаруженного точного квантового решения для производящего функционала интегралов движения строятся, используя полученную обобщенную формулу Кэмпбела -Хаусдорфа, классические интегралы движения. Результат согласуется с интегралами движения, обнаруженными позднее другими методами. Изучается решеточная алгебра Вирасоро или алгебра Волкова, связанная с элементом Казимира алгебры sl_2, с помощью явных построений трехмерных модулей.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из Введения, четырех глав, Приложений и Заключения. Объем диссертации - 105 страниц, 14 таблиц. Список литературы содержит 54 наименования. По материалам диссертации опубликовано 6 работ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обсуждается актуальность темы и новизна полученных результатов.

Глава 1 посвящена особенностям квантовых интегралов движения моделей синус-Гордон и Жибер -Шабат, а также интегрируемым теориям, не имеющим классического предела и в некотором смысле сходным с возмущенными конформными теориями, предложенными Замолодчиковым. Простейший пример, в котором появляются квантовые некоммутирующие интегралы движения, может быть просто описан на языке $b-c$ системы (системы фермионных духов). Операторные разложение для полей b и c имеет вид:

$$c(z)b(w) \sim \frac{1}{(z-w)}.$$

Можно ввести тензор энергии-импульса

$$T(z) = -:b(z)\partial_z c(z):,$$

лорановские коэффициенты которого образуют алгебру Вирасоро с центральным зарядом $c = -2$. Правило бозонизации $b-c$ системы имеет вид:

$$b(z) =: e^{\varphi(z)}:, \quad c(z) =: e^{-\varphi(z)}:,$$

где $\varphi(z)$ - свободное бозонное поле со следующим спариванием:

$$\varphi(z)\varphi(w) \sim \log(z-w).$$

Гамильтониан для модели синус -Гордон в координатах светового конуса, выраженный в терминах b, c полей, имеет вид:

$$H = \int b(z)dz + \int c(z)dz.$$

Простейший интеграл движения в этих обозначениях выглядит следующим образом:

$$Q_1 = \int :b\partial c:(z)dz. \qquad (1)$$

Конструкция для генераторов алгебры Вирасоро может быть легко деформирована, если мы рассмотрим вместо дифференциальных полиномов от b и c некоторые разностные полиномы. Такое выражение имеет вид:

$$T_q^{n;m}(z) = b(z)c(q^m z) - b(z)c(q^n z),$$

где $m, n \in Z$ и $q \in R$. Производящая функция для интегралов движения – деформация соотношений (1)- может быть получена в следующем виде:

$$\Lambda^{n;m}(q) = \oint_0 \frac{T_q^{n;m}(z)}{z}dz,$$

где мы использовали соотношение, справедливое для мероморфной (голоморфной вне $z = 0, \infty$) функции $f(z)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_0 dz D_z f(z) = 0,$$

а также следующее определенице разностной производной:

$$D_z f(z) = \frac{f(qz) - f(q^{-1}z)}{(q-q^{-1})z}.$$

Явное разложение $\Lambda^{n;m}(q)$ по параметру q в точке $q = 1$ дает:

$$\Lambda^{n;m}(q) \to A_1 \oint I_1(z)dz + (q-1)[A_2^1 \oint I_1(z)dz + A_2^2 \oint I_2(z)zdz] + \dots,$$

где A_1, A_2^i, $i = 1, 2$ - числовые коэффициенты, $I_i(z)$- локальные плотности для интегралов движения (дифференциальных полиномов поля $\varphi(z)$):

$$I_1(z) =: (\partial\varphi(z))^2 : -\partial^2\varphi(z),$$

$$I_2(z) =: (\partial\varphi(z))^3 : - : 3\partial\varphi(z)\partial^2\varphi(z) : +\partial^3\varphi(z).$$

В разложении присутствуют некоммутирующие интегралы движения, что можно проверить непосредственно:

$$Q_1 = \oint I_1(z)dz, \quad Q_2 = \oint I_2(z)zdz, \quad Q_3 = \oint I_2(z)dz.$$

$$[Q_1; Q_2] = -2Q_3.$$

Это простейшие некоммутирующие интегралы движения. Используя духовое представление, можно получить алгебру интегралов движения:

$$[Q_{\bar n}^n; Q_{\bar m}^m] = \sum_{k=0}^{\min\{n;\bar m\}} Q_{\bar n+\bar m-k}^{n+m-k} C(k, n, \bar m) - \sum_{k=0}^{\min\{m;\bar n\}} Q_{\bar n+\bar m-k}^{n+m-k} C(k, m, \bar n),$$

где

$$C(n_1, n_2, n_3) = \frac{n_2! n_3!}{n_1!(n_2 - n_1)!(n_3 - n_1)!},$$

и $\min\{a; b\}$ - минимальное из чисел a и b. После подстановки значений $\bar{n} = \bar{m} = 0$ в эту формулу получаем:

$$[Q_0^n; Q_0^m] = 0.$$

Таким образом, из множества интегралов движения $\{Q_{\bar{n}}^n\}$ мы выделили инволютивное подмножество $\{Q_0^n\}$. Следует сделать замечания по поводу интегралов движения, которые могут быть обнаружены при использовании квантового метода обратной задачи [3]. Интегралы движения в методе обратной задачи строятся путем разложения по спектральному параметру следа матрицы монодромии $T(\lambda)$, причем доказывается, что:

$$[T(\lambda), T(\mu)] = 0.$$

Поэтому в разложении $T(\lambda)$ будут появляться только коммутирующие интегралы движения. Некоммутирующие интегралы движения получить таким образом нельзя.

В теории синус-Гордон при $\alpha = \sqrt{2}$ число интегралов движения резко возрастает и оказывается, что сохраняется целый ток. При нашем значении константы связи $\alpha = 1$ число интегралов движения также возрастает и оказывается, что также можно построить сохраняющийся ток. При слиянии двух токов мы будем обнаруживать новые токи. Общее их количество бесконечно. Легко проверить, что с гамильтонианом модели коммутирует следующее локальное выражение:

$$M(z) =: \partial b \partial c(z) : .$$

Оно может также быть переписано в представлении поля $\varphi(z)$ в следующем виде:

$$M(z) =: 2(\partial_z \varphi(z))^3 : -\partial_z^3 \varphi(z).$$

Алгебра таких токов будет исследована в Главе 2. Далее мы установим, какие из теорий являются интегрируемыми при выборе следующего гамильтониана в координатах светового конуса:

$$H = \int : \exp \alpha\varphi(z) : dz + \int : \exp \beta\varphi(z) : dz.$$

Требование существования нетривиального квантового интеграла движения дает соотношение между α и β. Оказалось, что наряду с известными значениями $\beta = -\alpha, \beta = -2\alpha$ (соответствующие уравнению синус-Гордон и Жибер-Шабат) имеются и дополнительные типы взаимодействий допускающие высшие нетривиальные интегралы движения при

$$\beta = \frac{1}{\alpha}, \quad \beta = \frac{2}{\alpha}, \quad \beta = \frac{4}{\alpha}.$$

(α -общего положения).Эти теории близки к возмущенным конформным теориям, предложенным Замолодчиковым, но имеются и существенные отличия. В таких теориях имеются некоммутирующие интегралы движения и сохраняющиеся токи при фиксированных значениях константы связи ($\alpha = 1, 2^{1/2}, 3^{1/2}, (2/3)^{1/2}$ – разные значения в зависимости от модели).

Сохраняющиеся токи, найденные в этих квантовых интегрируемых теориях, являются в некотором смысле дуальными к W -алгебрам, т.е. симметриям, имеющим, кроме тока спина 2 (генератора алгебры Вирасоро), дополнительно токи высших спинов $s = 3, \ldots n$.Например, простейшая W_3- алгебра содержит два токовых генератора $T(z)$- оператора спина 2, Фурье -компоненты которого образуют алгебру Вирасоро, и тока $W_3(z)$, имеющего спин 3. Фурье- компоненты обоих токов образуют замкнутую алгебру, причем алгебра Вирасоро является подалгеброй.

Токи, которые мы обнаружили, обладают дуальной структурой по отношению к W-алгебрам. В нашем случае пропущены токи спинов $s = 2, ..k$ $(k = 2, 3, 5, 7)$. Наши алгебры содержат токи спина начиная с какого-то числа (3,4,6,8), и общее количество токов в алгебре бесконечно. Ток спина 2 всегда отсутствует. Эти алгебраические объекты являются принципиально новыми. Другими словами, они образуют класс бесконечномерных симметрий, не имеющих в качестве своих подалгебр алгебру Вирасоро. Эти токовые алгебры не имеют классического предела и всегда существуют при фиксированных значениях константы связи модели. Остается вопрос, чем выделены константы связи, для которых резко возрастает симметрия квантовой системы. Теория синус - Гордон с $\alpha = \sqrt{2}$ имеет ток, который образует одноиндексную алгебру - алгебру Вирасоро, при остальных значениях константы связи во всех моделях имеются токи, образующие двухиндексные алгебры, отвечающие уже нетривиальным взаимодействиям в этих теориях, построенных из одного поля φ.

В Главе 2 мы подробно рассматриваем одну из алгебр токов, обнаруженных в Главе 1. Для вычисления алгебры таких токов необходимо знать представление для всей бесконечной совокупности токовых генераторов. Рассмотрим теорию синус - Гордон с $\alpha = 1$.Эта теория является простейшей из нетривиальных теорий, имеющих сохраняющиеся токи (спины s=3,4,.., т.е. ток спина 2 отсутствует). Можно вычислить коммутатор таких токов:

$$[J_n^k, J_m^p] = (k+1)! \sum_{l'=0}^{k} \frac{J_{n+m}^{p+l'}}{l'!(k+1-l')!} \prod_{j'=0}^{k-l'} (m+p+1-j') -$$

$$-(p+1)! \sum_{l=0}^{p} \frac{J_{n+m}^{k+l}}{l!(p+1-l)!} \prod_{j=0}^{p-l} (n+k+1-j)$$

$$+\delta_{n+m,0} \frac{(p+1)!(k+1)!}{2(k+p+3)!} \times$$

$$\times((-1)^{k+1} \prod_{j=0}^{2+k+p} (n+k+1-j) - (-1)^{p+1} \prod_{j=0}^{2+k+p} (m+p+1-j)),$$

где мы ввели обозначение: $J_n^i = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 J^i(z) z^{i+1+n} dz$. Более сложные токи в других моделях имеют подобные коммутаторы. Важным свойством бесконечномерных алгебр является существование у них представления старшего веса. Числа $|\vec{\Delta} >= (\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(i)} ...)$ назовем весами представления. Элементы представления старшего веса строятся по обычным правилам:

$$J_{-p_1}^{k_1} J_{-p_2}^{k_2} ... J_{-p_i}^{k_i} ... J_{-p_N}^{k_N} |\vec{\Delta} >, \quad p_i > 0, \quad k_i \in N.$$

Операторы $J_{-p_i}^{k_i} \quad p_i > 0, \quad k_i \in N$ называются операторами рождения, а операторы $J_{p_i}^{k_i}$ –операторами уничтожения. Существование сингулярных векторов в представлениях старшего веса, которые имеются в этих алгебрах, является важным для вычисления корреляционных функций теорий с бесконечномерной симметрией. Далее

мы выведем формулу для токовых генераторов в бозонном представлении. Генератор алгебры токов, выраженный через поле $b(z)$ и $c(z)$, имеет вид:

$$J^i(z) =: \partial_z^i b(z) \partial_z c(z) :, i \in N$$

Можно получить бозонную реализацию генераторов для этих токов:

$$J^i(z) = \frac{1}{(i+1)} : (\partial_z^{1+i} \exp \varphi(z))(\partial_z \exp -\varphi(z)) : +$$

$$+\frac{1}{(i+1)(i+2)} : (\partial_z^{2+i} \exp \varphi(z)) \exp -\varphi(z) : .$$

Действие семейства токов $\{J^i(z)\}$ на произвольное поле A, зависящее от z, определим с помощью коммутатора следующим образом:

$$[J_k^i, A(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_z dt t^{i+k+1} J^i(t) A(z),$$

где J_k^i - Фурье-компоненты токов $J^i(z)$ имеют вид:

$$J_k^i = \frac{1}{2\pi j} \oint_0 dt J^i(t) t^{i+k+1}.$$

Нам также потребуются следующие определения:

$$(J_k^i, A(z)) = \frac{1}{2\pi j} \oint_z dt (t-z)^{i+k+1} J^i(t) A(z). \qquad (2)$$

Выберем в качестве поля $A(z) =: \exp \alpha\varphi(z) :$. Приведем действие коммутатора тока J_n^1 на $A(z)$. Мы обнаружим, что не дифференциальная часть действия коммутатора собирается по формуле (2). Действительно:

$$[J_n^1, \exp \alpha\varphi(z)] = z^{n+2} (J_{-2}^1, \exp \alpha\varphi(z)) -$$

$$-\{\alpha z^{n+1}(n+2)\partial_z + \frac{(\alpha^3 - \alpha)}{6}(n+2)(n+1)z^n\} \exp \alpha\varphi(z).$$

Мы видим, что выражение $(J_{-2}^1, \exp \alpha\varphi(z))$ появилось в результате вычислений коммутатора. Эта часть не является результатом действия дифференциального оператора на экспоненту. Вычисляя действие голоморфной компоненты тензора энергии-импульса в конформной теории поля в бозонном представлении на экспоненту поля φ, мы не обнаруживали таких недифференциальных выражений.

Далее мы вычисляем веса представления $\Delta^i(\alpha)$ для поля $A(z) =: \exp \alpha\varphi(z)$:, которое порождает представление старшего веса. Результат имеет вид:

$$\Delta^i(\alpha) = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{(i+2)} \prod_{k=1}^{i} (\alpha - k).$$

Функция $\Delta^i(\alpha)$ является аналогом конформной размерности в конформной квантовой теории поля. Выражение Δ в конформной квантовой теории поля является собственным значением оператора L_0.

В Главе 3 мы рассматриваем классический предел решеточной системы синус- Гордон. В первых двух главах мы исследовали исключительно квантовые теории, часть из которых не имеет классического предела. Было обнаружено, что при фиксированных значениях констант связи возможно появление дополнительных необычных симметрий, всего найдено восемь таких случаев.Чтобы ясно представлять, почему все это не наблюдается в классическом пределе, мы должны специально рассмотреть процедуру перехода к этому пределу. Этому посвящена Глава 3. Для удобства желательно рассматривать решеточную версию интегрируемой теории.

В недавних работах предлагается способ получения производящей функции локальных интегралов движения в квантовом случае, используя квантовый метод обратной задачи рассеяния (КМОЗ). Из перестановочных соотношений для L-оператора записывается функциональное уравнение на производящую функцию интегралов движения.

Мы рассматриваем классический предел данного функционального уравнения, что приводит нас к обыкновенному дифференциальному уравнению. После решения этого уравнения удается вычислить высшие интегралы движения в классическом пределе, раскладывая производящую функцию по спектральному параметру и вычисляя возникающие при этом коммутаторы с применением полученной формулы Кэмпбелла-Хаусдорфа.

Введем переменные x_i. Пусть выполнено следующее перестановочное соотношение:

$$x_i x_j = q x_j x_i, \quad i < j, i \in Z,$$

где q - некоторое комплексное число ($q = \exp i\pi\alpha^2$). Квантовый гамильтониан модели синус-Гордон на решетке естественно определить так:$H = \Sigma^+ + \Sigma^-$, где $\Sigma^+ = \sum_{i\in Z} x_i$, $\Sigma^- = \sum_{i\in Z} x_i^{-1}$. Как можно проверить, Σ^+ и Σ^- являются генераторами нильпотентной части квантовой группы $U_q(\hat{sl}_2)$, серровские соотношения между Σ^+ и Σ^- выполнены. Локальные интегралы движения, которые по определению коммутируют с гамильтонианом H, с необходимостью принадлежат пространству $\mathrm{Ker}\Sigma^+ \cap \mathrm{Ker}\Sigma^-$. То есть интегралы движения принадлежат инвариантам нильпотентной части квантовой группы $U_q(\hat{sl}_2)$. В координатах x_i уравнения на оператор R, являющийся фактически фундаментальным L-оператором квантового метода обратной задачи в переменных x_i выглядят так:

$$(\beta x_1 + x_2)R_{12} = R_{12}(x_1 + \beta x_2), \quad (\beta x_1^{-1} + x_2^{-1})R_{12} = R_{12}(x_1^{-1} + \beta x_2^{-1}).$$

Эти соотношения переписываются также в виде:

$$(\beta u + 1)R_{12}(q^{-1}u, \beta) = (u + \beta)R_{12}(u, \beta), \tag{3}$$

где $u = x_1 x_2^{-1}$ и $R_{12}(u, 1) = 1$. В классическом пределе ($q \to 1, \alpha \to 0$) мы получим

$$[\Sigma^+,] \to \sum_i x_i(1 + u_i)\partial_{u_i}, \quad [\Sigma^-,] \to \sum_i x_i^{-1}(1 + u_i^{-1})\partial_{u_i^{-1}}, \quad i \in Z,$$

где введено обозначение $u_i = x_i x_{i+1}^{-1}$, $\partial_{u_i} = \partial/\partial u_i$.

Функциональное уравнение (3) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение.Это делается следующим образом.Решение функционального уравнения (3) ищется в виде

$$\log R(u, \beta, q) = \sum_{l=k}^{-\infty} \frac{1}{(1-q)^l} \log \psi_l(u, \beta), k \geq 2,$$

где функции $\log \psi_l(u, \beta)$ не зависят от q.

При $q \to 1$ существенная часть решения для $\log R(\beta, u, q)$ выглядит следующим образом:

$$\log R(\beta, u, q) = \frac{1}{1-q} \int \frac{\log(\beta u + 1) - \log(u + \beta)}{u} du.$$

Это выражение также может быть получено из точного квантового решения соотношения (3):

$$R(u,\beta,q)=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1+\beta uq^{-i}}{\beta+q^{-i}u}.$$

Найдем явные формулы для плотностей интегралов движения, раскладывая логарифм произведения операторов R по узлам решетки. При вычислении необходимо учесть, что функция логарифм берется от некоммутирующих переменных. Для этого необходимо получить и использовать обобщенную формулу Кэмпбелла-Хаусдорфа. После вычислений получим общую формулу для k -го интеграла движения. Здесь для простоты мы приводим только два первых интеграла движения:

$$I_1=\frac{d}{d\beta}\log R_{12}|_{\beta=1}=R'_{12}|_{\beta=1}, \tag{4.1}$$

$$I_2=\frac{d^2}{d\beta^2}\log R_{12}R_{23}|_{\beta=1}=(\log R_{12})''|_{\beta=1}+(\log R_{23})''|_{\beta=1}+$$

$$+\left[R'_{12}|_{\beta=1},R'_{23}|_{\beta=1}\right].$$

После явных вычислений получим формулы для локальных плотностей интегралов движения в узле решетки с номером $n=1$:

$$I_1=2\log(u_1+1)-\log(u_1),$$

$$I_2=\frac{(u_2-1)(u_1-1)}{(u_1+1)(u_2+1)}+2\log(u_1+1)-\log(u_1)+2\log(u_2+1)-\log(u_2),$$

Здесь мы вычислим явно действие Σ^+,Σ^- на $I'_i, i=1,2$. Так как I_i получаются из I'_i путем соответствующих сдвигов, где

$$I'_1=2\log(u_1+1)-\log u_1,\quad I'_2=\frac{(u_1-1)}{(u_1+1)}\frac{(u_2-1)}{(u_2+1)}.$$

$$\Sigma^+I'_1=x_1(1+u_1)\partial_{u_1}(2\log(u_1+1)-\log u_1)=x_1-x_2;$$

$$\Sigma^+I'_2=(x_1(1+u_1)\partial_{u_1}+x_2(1+u_2)\partial_{u_2})\frac{(u_1-1)}{(u_1+1)}\frac{(u_2-1)}{(u_2+1)}=$$

$$=\frac{x_2(u_1-1)}{(u_1+1)(u_2+1)}+\frac{x_1(u_2-1)}{(u_2+1)(u_1+1)}=\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}-\frac{x_2x_3}{x_2+x_3}.$$

Таким образом, после действия Σ^+ на $I'_i, i=1,2$ мы получаем сдвиг или решеточную производную.

Позднее, были вычислены интегралы движения для решеточной системы синус -Гордон, и результаты наших вычислений совпадают с ними. Таким образом, предельный переход $q\to 1, \alpha\to 0$ отвечает классическому пределу. В Главе 1 мы рассматривали теории при фиксированных значениях константы связи и обнаружили дополнительные симметрии. Таким образом, при этих константах связи характер взаимодействия резко меняется и это случается только в квантовом случае.

В Главе 4 мы рассматриваем аналог квантовой гамильтоновой редукции Дринфельда - Соколова для деформированных алгебр.

Было доказано ранее, что центр универсальной обертывающей алгебры $U(\hat{g})$ аффинной алгебры Каца - Муди $\hat{g}$ на критическом уровне изоморфен алгебре Гельфанда - Дикого, ассоциированной с дуальной алгеброй (по Ленглендсу). Центр отождествляется с классическим пределом W-алгебры, определенной с помощью квантовой редукции Дринфельда - Соколова.

Были также введены деформации универсальной обертывающей алгебры Каца - Муди $U_q(\hat{g})$, мотивированные квантовым методом обратной задачи рассеяния. Естественно было рассмотреть, как изменяются алгебры Гельфанда - Дикого при этой деформации. Были введены новые пуассоновы алгебры $W_q(g)$, которые являются q - деформациями классических W-алгебр. Пуассонова алгебра $W_q(g)$ - центр квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_q(\hat{g}^L)$ на критическом уровне, где g^L двойственна (по Ленглендсу) к алгебре Ли g. Пуассонова алгебра $W_q(sl_2)$ является q-деформацией классической алгебры Вирасоро.

Было показано, что при $q\to 1$ алгебра $W_q(sl_2)$ становится изоморфной классической алгебре Вирасоро.

Существует другая связь между пуассоновыми алгебрами токов и пуассоновыми алгебрами Гельфанда - Дикого. Она обусловлена классической гамильтоновой редукцией Дринфельда - Соколова. Последняя может быть проквантована. В результате возникает процедура, известная как квантовая гамильтонова редукция.

Теперь возникает вопрос, существует ли какая-то процедура получения $W_q(g)$-алгебр из $U_q(\hat{g})$, подобная квантовой гамильтоновой редукции в недеформированном случае. Нам потребуется одно из определяющих соотношений квантовой группы $U_q(\hat{s}l_2)$:

$$J^{\pm}(z)J^{\pm}(w) = \frac{q^{\pm 2}z - w}{z - q^{\pm 2}w} J^{\pm}(w)J^{\pm}(z).$$

Перестановочные соотношения для тока $J^+(z)$ не позволяют наложить на него связь $J^+(z) = 1$, как это делалось в недеформированном случае. Чтобы избежать этой трудности, поступим следующим образом. Домножим выражение для тока $J^+(z)$ на некоторую функцию от генераторов квантового оператора $J^3(z)$ таким образом, чтобы в результате полученный ток $I^+(z)$ удовлетворял соотношению

$$I^+(z)I^+(w) = I^+(w)I^+(z).$$

Теперь мы уже можем накладывать связь $I^+(z) = 1$ непротиворечивым образом. Легко показать, что соотношению выше удовлетворяет ток

$$I^+(z) = J^+(z)\varphi^{-1/2}(q^{k/2}z).$$

Этот выбор не является единственным, возможно также выражение вида

$$I^{+\prime}(z) = J^+(z)\psi^{-1/2}(q^{-k/2}z).$$

Редукцию можно провести на языке скрининговых операторов для бозонизации $U_q(s\hat{l}_2)$ и Вирасоровского скринингова оператора, и обнаружить, что скрининг $U_q(s\hat{l}_2)$ переходит в скрининговый оператор деформированной алгебры Виросоро после редукции. Редукцию будем проводить, используя $BRST$ процедуру. Для построения нильпотентного дифференциала необходимо деформированное спаривание фермионных духов. Нильпотентный дифференциал имеет вид:

$$Q_{BRST} = Q_1 + Q_2.$$

Когомологии этого оператора будем искать следующим образом: сначала найдем когомологии оператора Q_1, а затем, используя связи в когомологиях Q_1, будем искать когомологии оператора Q_2. Ядру оператора Q_1 принадлежат элементы

$$h_{a,b}(z) = \left(\prod_{n=0}^{\infty} \psi^a(q^{k/2+2kn}z)\right) \varphi^{b/2}(q^{-k/2}z)\Psi^*(q^{-k}z),$$

где a, b пробегают значения ± 1
(будем сокращенно писать $h_{\pm,\pm}(z), h_{\mp,\pm}(z), \ldots$).

Не все когомологии $h_{a,b}(z)$ являются независимыми. Между ними существуют связи. Легко получить следующее соотношение:

$$[Q_1, \chi(w)] = h_{-,+}(w) + h_{-,-}(q^{2k}w).$$

Используя это соотношение, можно получить положительные и отрицательные моды в экспоненте при бозонизации $\Psi^*(w)$, выраженные через соответствующие положительные и отрицательные моды когомологий в экспоненте $h_{a,b}(z)$ при бозонизации. Положительные моды $\Psi^*(w)$ имеет вид:

$$\Psi^*(w) = \prod_{n=0}^{\infty} h_{-,-}(q^{2k+(2k+4)n}w)h_{-,+}(q^{-(2k+4)(n+1)}w).$$

Отрицательные моды такие:

$$\Psi^*(w) = \prod_{n=0}^{\infty} h_{-,+}(q^{(2k+4)n}w)h_{-,+}(q^{2k+2+(2k+4)n}w)\times$$

$$\times h_{-,-}(q^{2k-(2k+4)(n+1)}w)h_{-,-}(q^{-2k-(2k+4)(n+1)}w). \qquad (4.7)$$

Используя эти соотношения, можно получить перестановочное соотношение для $\Psi^*(z)$:

$$\Psi^*(z)\Psi^*(w) = -\frac{w}{z}\frac{\Theta_q(q^{2k+2}\frac{w}{z})}{\Theta_q(q^{2k+2}\frac{z}{w})}\Psi^*(w)\Psi^*(z).$$

Это выражение есть не что иное, как перестановочное соотношение для локальных плотностей скрининговых операторов для деформированной алгебры Вирасоро.

Когомология оператора Q_2 дает деформированную алгебру Вирасоро:

$$T(z)T(w)f\left(\frac{w}{z}\right) - T(w)T(z)f\left(\frac{z}{w}\right) =$$

$$= -\frac{(1-q^2)(1-q^{-2k-4})}{(1-q^{-2(k+1)})}\left(\delta\left(q^{-2(k+1)}\frac{w}{z}\right) - \delta\left(q^{2(k+1)}\frac{w}{z}\right)\right),$$

где

$$f(u) = \exp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}u^n\frac{(1-q^{-2(k+2)n})(1-q^{2n})}{(1+q^{-2(k+1)n})},$$

$$\delta(x) = \sum_{n \in Z} x^n.$$

Таким образом, мы доказали, что редукция $U_q(s\hat{l}_2)$, соответствующая наложению связи $I^+(z) = 1$, приводит к q-деформированной алгебре Вирасоро.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Изучены особенности квантовых интегралов движения для теорий синус-Гордон и Жибер-Шабат, используя явные построения и не обращаясь к квантовому методу обратной задачи.Отмечено увеличение количества интегралов движения на квантовом уровне при фиксированных значениях констант связи.

2. Построены квантовые теории поля, обладающие высшими интегралами движения и не имеющие классического предела. Обсуждается связь рассматриваемых теорий и возмущенных конформных теорий поля, предложенных Замолодчиковым. Показано на примерах, что в рассматриваемых моделях пространство интегралов движения шире.Указаны причины.

3. Обнаружены принципиально новые алгебры (они являются бесконечномерными, имеют центральное расширение и не имеют в качестве подалгебры алгебру Вирасоро -это принципиально новая конструкция, нигде ранее не встречавшаяся) токов и некоммутирующие интегралы движения в этих теориях. Вычислена простейшая токовая алгебра и найдены сингулярные векторы в представлении старшего веса. Найдены представления свободных полей для нее. Эти алгебры коммутируют с гамильтонианом и не имеют классического предела, что свидетельствует о неэквивалентности констант связи в теории и возможности возрастания симметрии на квантовом уровне.

4. Построен квантовый аналог гамильтоновой редукции для деформированной алгебры $U_q(s\hat{l}_2)$. Найдены констрейнты на токовые генераторы - возможны два случая. Построен BRST- оператор такой редукции. В результате получается q - деформированная алгебра Вирасоро.

5. Изучается классический предел решеточной системы синус – Гордон с целью продемонстрировать получение классических интегралов движения при стремлении константы связи $\alpha \to 0$. Найдено преобразование решеточных переменных поля в обычных координатах в решеточные переменные поля в координатах светового конуса. Указана процедура вычисления высших классических решеточных интегралов движения для теории синус-Гордон, используя найденное решение для квантового производящего функционала в случае общего положения константы связи. Это позволяет вычислять классические интегралы движения на решетке явным разложением по константе связи следа квантовой матрицы монодромии, доказав и использовав обобщенную формулу Кэмпбелла-Хаусдорфа. После такой процедуры можно получить интегралы движения, которые совпадают с интегралами движения классической решеточной системы синус–Гордон, найденными позднее другими авторами. Это свидетельствует о том, что предел $\alpha \to 0$ в квантовой теории синус-Гордон является действительно классическим пределом. В Приложении В диссертации данный предел берется для непрерывных квантовых интегралов движения. В результате получаются обычные классические интегралы движения, это еще раз подтверждает, что классический предел -это $\alpha \to 0$.

6. Построен генератор алгебры Волкова при помощи элемента Казимира, используя явные выражения для трехмерных модулей sl_2.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

Результаты работы докладывались на семинарах Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау, на семинаре А.А.Белавина, проводимых в этом институте, в Объединенном институте ядерных исследований, Лаборатории теоретической физики им Н.Н.Боголюбова, Дубна, (1997), в отделе по квантовой теории поля SISSA, Италия (2000).

ПУБЛИКАЦИИ

1. С.В. Крюков, Письма в ЖЭТФ,1996,**т.65**,вып.5, стр. 375-380.

2. С.В. Крюков, ТМФ,1997,**112**,n.1,стр.103-114.

3. С.В. Крюков, Э.В. Копанев, М.А. Сухоручкин, ТМФ,1997,**113**,n.1,стр.34-44.

4. С.В. Крюков, ТМФ,1998,**114** , n3. ,стр337.

5. S.V. Kryukov, Modern Physics Letters (1995) A, **10**,n.10,831-835.

6. С.В. Крюков, ТМФ,1995,**105**, n.2,стр. 214-224.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.B. Zamolodchikov and Al.B. Zamolodchikov Annals of Phys (NY) **120** (1979),253-291.

2. A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov,1984,Nucl.Phys,**B241**,333.
3. L.D. Faddeev, in Quantum symmetries Les Houches Session LXIV, ed. A. Connes, K. Gawedzki, J.Zinn-Justin, p.151-219.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 мая 2001 года.