ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-2001-240

На правах рукописи
УДК 539.12.01

ДЕРЯГИН
Владимир Борисович

ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2001

Работа выполнена в Московском физико-техническом институте.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Лезнов А.Н.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Манько В.И.

доктор физико-математических наук
Разумов А.В.

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына.

Защита состоится 19 декабря 2001 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета К720.001.01 в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан 16 ноября 2001 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Федотов С.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Интегрируемые системы, такие как уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнения sin-Гордон и Гейзенберга встречаются в задачах самой разной физической природы. Эти системы обладают удивительным математическим свойством-скрытой алгебраической симметрией, приводящей к интегрированию с помощью обратной задачи рассеяния для вспомогательного линейного оператора. Интегрируемые системы обладают такими замечательными свойствами, как бесконечные серии законов сохранения, бигамильтоновость, солитонные решения, дискретные группы симметрий. До недавнего времени в теоретической физике огромную роль играли симметрии Нётеровского типа, представляющие собой непрерывные группы преобразований. В последнее время было показано, что многие важные свойства интегрируемых систем, включая явный вид их солитонных решений, тесно связаны с дискретными симметриями- автопреобразованиями Бэклунда. Тема данной диссертационной работы связана с тем, чтобы показать нетривиальную роль этих преобразований в теории интегрируемых систем, в частности продемонстрировать их значение для построения операторов рекурсии в случае одной пространственной переменной. Актуальность работы для теоретической и математической физики связана ещё и с тем, что в ней разработан формализм получения интегрируемых (1+1) и (1+2) потоков, инвариантных относительно преобразований Бэклунда, без использования операторного формализма.

Целью настоящей работы является:

1. Использование преобразований Бэклунда для построения рекурсионных операторов уравнения симметрии в случае одной пространственной переменной.
2. Разработка формализма, альтернативного операторному, который позволяет строить бесконечные иерархии интегрируемых систем как в случае одной, так и двух пространственных переменных.

3. Построение рекурсионных операторов уравнения симметрии в случае несингулярных зависимых матричных переменных произвольного размера $N \times N$.

4. Построение формализма решения уравнения симметрии в случае суперсимметричной решётки Тоды.

Научная новизна работы состоит в:

1. Получении необходимых и достаточных условий инвариантности кососимметричных операторов нулевого, первого и второго порядков относительно преобразований Бэклунда определённого типа.

2. Решении уравнения симметрии в случае одной и двух пространственных переменных без использования операторного формализма, опираясь на скрытые групповые свойства дискретных симметрий.

3. Решении уравнения симметрии в случае операторозначных зависимых переменных.

4. Построении иерархии интегрируемых систем, инвариантных относительно $N = 2$ суперинтегрируемой подстановки Ферми-Тоды.

Достоверность полученных результатов следует непосредственно из математического аппарата, используемого в работе.

Теоретическая ценность диссертации заключается:

- в новом взгляде на дискретные симметрии интегрируемых систем, который обнаруживает целый ряд удивительных свойств этих преобразований.

- в построении алгоритмов, которые позволяют в явном виде получать интегрируемые системы любого порядка, инвариантные относительно преобразований Бэклунда определённого типа.

- в получении алгоритмов решений уравнения симметрии без использования операторного формализма в случае одной и двух пространственных переменных.

- в решении уравнения симметрии в случае суперсимметричной решётки Тоды.

На защиту выносятся:

1. Методы построения рекурсионных операторов для (1+1) интегрируемых систем.

2. Обобщения методов построения рекурсионных операторов на случай несингулярных матричных зависимых переменных произвольного размера $N \times N$.

3. Алгоритмы решения уравнения симметрии без использования операторного формализма

4. Алгоритм решения уравнения симметрии для суперсимметричной решётки Тоды.

Публикации и апробации работы.
Основное содержание исследований по теме диссертации опубликовано в 5 работах. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах ЛТФ ОИЯИ(Дубна-2000), НИИЯФ МГУ(Москва-2001). Кроме того диссертация обсуждалась и получила одобрение на заседании кафедры физики высоких энергий МФТИ.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, библиографического списка, включающего 25 наименований, 131 страницы машинописного текста.

Краткое содержание работы:

Во введении дан краткий обзор текущего состояния исследуемой проблемы, показана её актуальность, отражено краткое содержание работы.
Первая глава целиком посвящена исследованию свойств дискретных симметрий (1+1) интегрируемых систем и построению рекурсионных операторов с помощью этих симметрий.
Мы рассматриваем преобразования вида:

$$\Phi(\overleftarrow{u}, u, u_x, ..., \overset{(n)}{u_x}) = 0, \quad a = 1, ..., q. \tag{1}$$

Из этого преобразования можно с помощью дифференцирования по произвольному параметру t получить уравнение вида:

$$\frac{\partial \Phi^a}{\partial \overset{\leftarrow}{u}^b} \overset{\leftarrow}{F}_b [u] + \sum_J \frac{\partial \Phi^a}{\partial u_J^b} D_J F_b[u] = 0, \quad a = 1, ...q. \tag{2}$$

Это соотношение называется уравнением симметрии, соответствующим преобразованию (1).
Уравнение (2) всегда обладает решением вида $F[u] = u_x$, которое называется тривиальным. Интегрируемой подстановкой в дальнейшем будем называть преобразование типа (1), уравнение симметрии которого имеет хотя бы одно решение, отличное от тривиального. Мы называем $H[u]$ оператором рекурсии уравнения (2), если при действии на произвольное решение этого уравнения получается решение этого же уравнения.
Глава состоит из двух параграфов. В первом параграфе рассматриваются интегрируемые подстановки вида:

$$\overset{\leftarrow}{u}^a = \varphi^a[u], \quad a = 1, 2.$$

производные Фреше которых имеют специальную форму:

$$\varphi'[u] = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

При этом β, γ и δ являются дифференциальными операторами. Мы ищем кососимметрические операторы $J[u]$ нулевого, первого и второго порядков, удовлетворяющие условию инвариантности:

$$\varphi'[u] J[u] \varphi'^T[u] = J[\overset{\leftarrow}{u}]. \tag{3}$$

В этой главе предложена структура решения уравнения (3) и получены критерии выполнения условия инвариантности для операторов с этой структурой.
Оператор $H[u]$, удовлетворяющий условию:

$$\varphi'[u] H[u] \varphi'^{-1}[u] = H[\overset{\leftarrow}{u}], \tag{4}$$

является оператором рекурсии для уравнения симметрии (2).

Если $\overset{(i)}{J}[u]$ и $\overset{(j)}{J}[u]$ являются некоторыми решениями уравнения (3)и оператор $\overset{(i)}{J}[u]$ обратим, то оператор:

$$H[u] = \overset{(j)}{J}[u] \overset{(i)}{J}[u]^{-1}$$

удовлетворяет (4).
Рассмотрим в качестве примера интегрируемую подстановку:

$$\overset{\leftarrow}{u} = \frac{1}{v}, \quad \overset{\leftarrow}{v} = uv^2 - v(\ln v)_{xx}.$$

Оператор рекурсии $H[u] = \overset{(1)}{J}[u] \overset{(0)}{J}[u]^{-1}$ принимает вид:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}D - uD^{-1}v & -uD^{-1} \cdot u \\ vD^{-1} \cdot v & -\frac{1}{2}D + vD^{-1} \cdot u \end{pmatrix}.$$

Начиная с правой части системы:

$$u_t = u, \quad v_t = -v,$$

последовательным применением полученного оператора H можно получить интегрируемую систему любого порядка.
Во втором параграфе рассматривается формализм построения оператора рекурсии для интегрируемой подстановки Лотки-Вольтерра:

$$\overset{\leftarrow}{u} = u + \frac{v_x}{p(v)}, \quad \overset{\leftarrow}{v} = v + \frac{\overset{\leftarrow}{u}_x}{q(\overset{\leftarrow}{u})},$$
$$p(a) = \varepsilon a^2 + \alpha a + \beta, \quad q(a) = \varepsilon a^2 + \gamma a + \delta. \tag{5}$$

Рекурсионный оператор соответствующего уравнения симметрии имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} -D + (up'(v) + \gamma v) + & 2q(u) + \gamma v_x D^{-1} + \\ +\alpha u_x D^{-1} + 2\varepsilon u_x D^{-1} \cdot v & +2\varepsilon u_x D^{-1} \cdot u \\ 2p(v) + \alpha v_x D^{-1} + & D + (\gamma v + up'(v)) + \\ +2\varepsilon v_x D^{-1} \cdot v & +\gamma v_x D^{-1} + 2\varepsilon v_x D^{-1} \cdot u \end{pmatrix}.$$

Вторая глава посвящена разработке формализма решения уравнений симметрии в случае одной и двух пространственных переменных без использования операторного формализма. Существенный акцент сделан на использование скрытых групповых свойств интегрируемых подстановок. Глава состоит из двух параграфов.

В первом параграфе рассматриваются двумерные интегрируемые подстановки Дарбу-Тоды , Лотки-Вольтерра и двумерное обобщение преобразования Бэклунда для уравнения Гейзенберга. Наиболее характерные свойства редукционного механизма решения уравнения симметрии в этом случае просматриваются на примере подстановки Лотки-Вольтерра .

Преобразование Лотки-Вольтерра имеет вид:

$$\overleftarrow{u} = u + \frac{v_x}{v}, \quad \overleftarrow{v} = v + \frac{\overleftarrow{u}_y}{\overleftarrow{u}}.$$

Инвариантные потоки принимают вид:

$$u_t = D_x(T_k), \quad v_t = v(\overleftarrow{T}_k - T_k), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Выражение для T_k можно записать в форме:

$$T_k = CT_0 \prod_{l=1}^{k} \left[1 - L_l exp\left(-(l+1)d_l - \sum_{j=l+1}^{k} d_j\right)\right] \int_{-\infty}^{x} \overleftarrow{t}_1\, dx' \cdot \ldots \cdot \int_{-\infty}^{x} \overleftarrow{t}_1^{\,k}\, dx^k.$$

где $exp(d_p)$ означает сдвиг влево в p-ом члене кратного интеграла, а символ L_p-замену $t_1 = uv$ на $t_2 = \overleftarrow{u}\, v$.

Во втором параграфе на основании разработанного формализма мы решаем уравнение симметрии для одномерных подстановок Лунда-Рэджа и модифицированного нелинейного уравнения Шредингера.

Третья глава посвящена рассмотрению операторного формализма в случае несингулярных матричных переменных размера $N \times N$.Она состоит из трёх параграфов.

Первый параграф содержит обобщение методов построения операторов, удовлетворяющих уравнению (3), для случая интегрируемых подстановок вида:

$$\overleftarrow{u} = \varphi^1[u, v], \quad \overleftarrow{v} = \varphi^2[u, v].$$

где u, v являются несингулярными матрицами размера $N \times N$.

Во втором параграфе проводится построение операторов рекурсии для подстановок:

$$\overleftarrow{u} = v^{-1}, \quad \overleftarrow{v} = vuv - v_{xx} + v_x v^{-1} v_x \tag{6}$$

и

$$\overleftarrow{u} = v, \quad \overleftarrow{v} = u + v^{-1} v_x v^{-1}. \tag{7}$$

Для подстановки (6) рекурсионный оператор имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} E & F \\ G & L \end{pmatrix},$$

$$E^{ij}_{kl} = B^{ij}_{kl} = \delta^i_k \delta^k_j D - \delta_{ik} u_{sj} D^{-1} \cdot v_{ls} - \delta_{lj} u_{is} D^{-1} \cdot v_{sk},$$
$$F^{ij}_{kl} = -A^{ij}_{lk} = -u_{ik} D^{-1} \cdot u_{lj} - u_{lj} D^{-1} \cdot u_{ik},$$
$$G^{ij}_{kl} = \Delta^{ij}_{lk} = v_{ik} D^{-1} \cdot v_{lj} + v_{lj} D^{-1} \cdot v_{ik},$$
$$L^{ij}_{kl} = \left(B^{lk}_{ij}\right)^T = -\delta^l_j \delta^i_k D + \delta_{lj} v_{is} D^{-1} \cdot u_{sk} + \delta_{ik} v_{sj} D^{-1} \cdot u_{ls}.$$

Для интегрируемой подстановки (7) рекурсионный оператор принимает вид:

$$H = \begin{pmatrix} E & F \\ G & L \end{pmatrix},$$

$$E^{ij}_{kl} = \delta^i_k \delta^l_j D^{-1} + \delta_{ik} u_{pj} D^{-1} \cdot v_{lp} D^{-1} + \delta_{lj} u_{ip} D^{-1} \cdot v_{pk} D^{-1},$$
$$F^{ij}_{kl} = -\left(u_{ik} D^{-1} \cdot u_{lj} D^{-1} + u_{lj} D^{-1} \cdot u_{ik} D^{-1}\right),$$
$$G^{ij}_{kl} = -\left(v_{ik} D^{-1} \cdot v_{lj} D^{-1} + v_{lj} D{-1} \cdot v_{ik} D^{-1}\right),$$
$$L^{ij}_{kl} = -\delta^i_k \delta^l_j D^{-1} + \delta_{lj} v_{ip} D^{-1} \cdot u_{pk} D^{-1} + \delta_{ik} v_{pj} D^{-1} \cdot u_{lp} D^{-1}.$$

В третьем параграфе рассматривается матричный вариант интегрируемой подстановки Лунда-Рэджа:

$$\overleftarrow{u} = (v_x + vuv)^{-1},$$

$$\overleftarrow{v} = -(v_x + vuv)_x + (v_x + vuv) v^{-1} (v_x + vuv).$$

Оператор рекурсии в этом случае можно получить из соответствующего оператора для подстановки (6) с помощью преобразования Миуры:

$$q = u, \quad r = v_x + vuv.$$

Четвёртая глава посвящена обобщению результатов, полученных для подстановки Тоды, на случай независимых бозонных и фермионных переменных. В этой главе рассматривается N=2 суперинтегрируемая подстановка Ферми-Тоды в (1|2) суперпространстве и построение соответствующей ей иерархии интегрируемых систем. Глава состоит из двух параграфов.

В первом параграфе мы показываем интегрируемость самой подстановки Ферми- Тоды. Мы работаем в (1|2) суперпространстве с одной бозонной переменной x и двумя фермионными θ и $\bar\theta$, используем стандартное представление для N=2 суперсимметричных фермионных ковариантных производных:

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\bar\theta\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \bar D = \frac{\partial}{\partial\bar\theta} - \frac{1}{2}\theta\frac{\partial}{\partial x}.$$

Вводим в рассмотрение пару киральных и антикиральных фермионных суперполей $f(x,\theta,\bar\theta)$ и $\bar f(x,\theta,\bar\theta)$, удовлетворяющих условию:

$$Df = \bar D\bar f = 0. \tag{8}$$

Подстановка Ферми-Тоды имеет вид:

$$\frac{1}{2}\left(\overleftarrow{f\bar f} - f\bar f\right) = \left[\ln(\bar D \overleftarrow{f} \cdot D\bar f)\right]'. \tag{9}$$

Система эволюционных уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(f, \bar f, f', \bar f', D\bar f, \bar D f),$$

$$\frac{\partial \bar f}{\partial t} = \bar F(f, \bar f, f', \bar f', D\bar f, \bar D f).$$

является инвариантной относительно рассматриваемой подстановки, если и только если функции $\begin{pmatrix} F \\ \bar F \end{pmatrix}$ удовлетворяют определённым ограничениям, которые накладывает уравнение симметрии. Уравнение симметрии для рассматриваемой подстановки можно получить, продифференцировав соотношение (9) по произвольному параметру t и обозначив соответствующие производные от f и $\bar f$ через F и $\bar F$.

В итоге получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\overleftarrow{F}\bar f + \overleftarrow{f}\bar F - F\bar f - f\bar F\right) = \left(\frac{\bar D \overleftarrow{F}}{\bar D \overleftarrow{f}} + \frac{D\bar F}{D\bar f}\right)'. \tag{10}$$

Столбец $\begin{pmatrix} f' \\ \bar f' \end{pmatrix}$ является тривиальным частным решением этого уравнения. Другим решением этого уравнения является пара $\begin{pmatrix} f \\ -\bar f \end{pmatrix}$.

Таким образом подстановка является интегрируемой в соответствии с определением.

Во втором параграфе мы строим рекурсионную процедуру, позволяющую находить бесконечный набор частных решений уравнения (10). Представляем в явном виде рекурсионный оператор для этого уравнения:

$$R = \Pi \begin{pmatrix} \partial + fD\bar D\cdot\partial^{-1}\cdot\bar f + & -fD\bar D\cdot\partial^{-1}\cdot f - \\ +\frac{1}{2}\partial\cdot f\partial^{-1}\cdot\bar f & -\frac{1}{2}\partial\cdot f\partial^{-1}\cdot f \\ \bar f\bar D D\cdot\partial^{-1}\cdot f + & -\partial - \bar f\bar D D\cdot\partial^{-1}\cdot f - \\ +\frac{1}{2}\partial\cdot\bar f\partial^{-1}\cdot f & -\frac{1}{2}\partial\cdot\bar f\partial^{-1}\cdot f \end{pmatrix} \Pi.$$

Операторы Π и $\bar\Pi$ имеют вид:

$$\Pi = -\begin{pmatrix} D\bar D\cdot\partial^{-1} & 0 \\ 0 & \bar D D\cdot\partial^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\bar\Pi = -\begin{pmatrix} \bar D D\cdot\partial^{-1} & 0 \\ 0 & D\bar D\cdot\partial^{-1} \end{pmatrix}.$$

Оператор Π проектирует верхний и нижний элементы столбца на киральное и антикиральное подпространства соответственно. Оператор R определён с точностью до произвольного аддитивного оператора, уничтожающего столбец $\begin{pmatrix} F \\ \bar F \end{pmatrix}$ с киральной и антикиральной составляющей. В общем случае такой оператор можно записать в виде $C\bar\Pi$, где C-произвольный матричный псевдо- дифференциальный оператор. Из вида R следует также, что он сохраняет киральную структуру уравнения (10). Действуя p-раз ($p \in Z_+$) оператором R на первое нетривиальное решение уравнения (10), мы получаем новые решения:

$$\begin{pmatrix} F_p \\ \bar F_p \end{pmatrix} = R^p \begin{pmatrix} f \\ -\bar f \end{pmatrix}.$$

Основные результаты работы и выводы.

1. В случае одной пространственной переменной предложена конкретная структура кососимметрических операторов, удовлетворяющих условию инвариантности. На основе этих операторов строятся операторы рекурсии уравнения симметрии, которые позволяют находить частные решения любого порядка для этого уравнения.

2. Получены обобщения операторных методов решения уравнения симметрии в случае несингулярных матричных зависимых переменных произвольного размера $N \times N$.

3. В случае одной и двух пространственных переменных предложен формализм решения уравнения симметрии, альтернативный операторному, основанный на скрытых групповых свойствах преобразований Бэклунда.

4. Получена иерархия интегрируемых систем, инвариантная относительно N=2 суперинтегрируемой подстановки Ферми-Тоды.

Публикации по теме диссертации.

1. V.B. Deryagin and A.N. Leznov.The two-dimensional Lotkey-Volterra integrable mapping and the explicit form of (1+2) hierarchies of integrable systems.
   Preprint IHEP 95-24, Protvino (1995).

2. V.B. Deryagin, A.N. Leznov and E.A. Yuzbashyan. The two- dimensional integrable substitutions and the explicit form of (1+2) hierarchies of integrable systems.
   Preprint IHEP 95-27, Protvino(1995).

3. V.B. Deryagin and A.N. Leznov. The discrete symmetries and multi-Poisson structures of (1+1) integrable systems.
   Preprint MPI 96-36, Bonn(1996).

4. V.B. Deryagin,A.N. Leznov and A.S. Sorin. N=2 Superintegrable f-Toda mapping and Super-NLS hierarchy in($\mathbf{1}|\mathbf{2}$) superspace.
   Yadernay Fizika, Vol.61, No.11 (1998) 2097.

5. V.B. Deryagin, A.N. Leznov and A.S. Sorin. The solution of the $\mathbf{N} = (\mathbf{0}|\mathbf{2})$ superconformal f-Toda lattice.
   Nuclear Physics B 527 (1998) 643.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 ноября 2001 года.