ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-2000-161

На правах рукописи
УДК 530.145.6; 539.128.2

КРИВОНОС
Сергей Олегович

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ С РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 2000

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова Объединённого института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:
Доктор физико-математических наук, профессор И.Л. Бухбиндер
Доктор физико-математических наук, профессор М.А. Васильев
Доктор физико-математических наук А.П. Исаев

Ведущая организация: Институт теоретической и экспериментальной физики, г. Москва

Защита диссертации состоится "4" октября 2000 г. на заседании диссертационного совета Д047.01.01 при Лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "15" августа 2000 г.

Учёный секретарь совета
доктор физико-математических наук С.В. Голоскоков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вплоть до начала семидесятых годов число известных точно решаемых и интегрируемых, физически важных задач было невелико, поскольку подавляющая часть уравнений движения систем по своей природе существенно нелинейна, а математический аппарат для изучения таких систем, по сути дела, включал в себя только теорию возмущений. С открытием метода обратной задачи рассеяния, ситуация изменилась и был обнаружен целый ряд важных нелинейных интегрируемых уравнений и развит соответствующий математический аппарат для их решения. С момента открытия суперсимметрии, начались многочисленные попытки построения суперсимметричных интегрируемых систем, включающих как бозонные, так и фермионные поля. Основная проблема построения новых интегрируемых систем с расширенной суперсимметрией состоит в том, что уже для $N = 2$ суперсимметрии бозонный сектор будет содержать систему уравнений на два бозонных поля и, априори совершенно не ясно, какие же дополнительные уравнения должны возникать в бозонном секторе. Более того, оказывается что, например, известные $N = 2$ суперсимметричные расширения уравнения Буссинеска содержат само бозонное уравнение Буссинеска только в очень специальном случае редукции, а $N = 4$ суперсимметричное уравнение Лиувилля содержит в бозонном секторе, наряду с уравнением Лиувилля, Весс-Зумино-Новиков-Виттеновскую σ-модель на группе $SU(2)$ и может быть равноправно названо $N = 4$ ВЗНВ σ-моделью. Необходимо также отметить, что для систем с $N \geq 2$ суперсимметрией возникает еще одна, весьма непростая для решения, проблема. Дело в том, что для таких суперсимметрий простейшие суперполя являются приводимыми и на них необходимо накладывать подходящие дополнительные условия, ограничивающие зависимость суперполей от грассмановых координат.

Интуитивно ясно, что интегрируемость суперсимметричной системы (т.е. наличие бесконечного числа законов сохранения) должна быть, так или иначе, связана с бесконечномерными (супер)симметриями. Установление и использование таких связей алгоритмизовало бы проблему построения интегрируемых систем с расширенной суперсимметрией, сводя последнюю к анализу (супер)алгебр - задаче, на сегодняшний день гораздо больше изученной. Пока общая теория не создана и область построения и изучения интегрируемых систем с расширенной суперсимметрией переживает стадию поиска и анализа частных уравнений, представляется актуальным изучение их свойств, установлению связей с бесконечными симметриями и использованию последних для построения новых иерархий.

Цель диссертации состоит в анализе и построении интегрируемых систем с расширенной ($N > 1$) суперсимметрией, выяснению их связи с бесконечномерными и нелинейными (супер)алгебрами и изучению последних.

Научная новизна и практическая ценность.

В диссертации получены новые результаты, касающиеся построения и изучения свойств интегрируемых систем с расширенной суперсимметрией исходя из их внутренней связи с бесконечномерными и нелинейными супералгебрами.

Основное новое направление, открытое этой диссертацией, может быть определено следующим образом: построение и изучение интегрируемых систем с расширенной суперсимметрией в рамках нелинейных реализаций бесконечномерных и нелинейных групп и супергрупп.

Оно базируется, во-первых, на методе ковариантной редукции, который позволяет алгоритмически строить новые интегрируемые системы исходя из их инвариантности относительно (бесконечномерных) симметрий. Сами уравнения движения получают при этом ясную геометрическую интепретацию, как уравнения движения по геодезическим в фактор - пространствах соответствующих (супер)групп. Во-вторых, на идее построения интегрируемых систем с расширенной суперсимметрией, допускающих, в качестве второй Гамильтоновой структуры, бесконечномерные и нелинейные группы и супергруппы. Как правило, для большинства бозонных систем Гамильтоновы структуры известны, как известны (или могут быть достаточно алгоритмически построены) и их суперсимметричные обощения. Таким образом, задача построения супер - расширения бозонного уравнения с заданной Гамильтоновой структурой становится, по сути дела, задачей вычислительной, хотя, конечно, достаточно сложной.

Принципиально важно, что и метод ковариантной редукции, и идея суперсимметризации второй Гамильтоновой структуры позволяют ответить на два главных вопроса, возникающих при построении суперсимметричных расширений известных бозонных интегрируемых систем: какие бозонные системы лежат в основе интегрируемых систем с расширенной суперсимметрией и какие условия неприводимости должны быть наложены на суперполя? Последнее, зачастую, гораздо более важно, поскольку область использования неприводимых мультиплетов не ограничивается интегрируемыми системами. Найденные в диссертации условия неприводимости для $N = 2$ (твистованный киральный мультиплет) и для $N = 4$ суперсимметрии (вариант условий на гипермультиплет в D=4), были в дальнейшем использованы для построения различных типов σ - моделей. Следует отметить, что построенное в диссертации $N = 4$ суперсимметричное уравнение Лиувилля, содержит в бозонном секторе также уравнение ВЗНВ σ - модели на группе $SU(2)$ и явилось вообще первым примером её суперсимметризации, причем сразу с $N = 4$ суперсимметрией.

К сожалению, суперсимметризация вторых Гамильтоновых структур не позволяет ответить на вопрос интегрируемо ли построенное уравнение или нет. Зачастую, системы с $N \geq 2$ суперсимметрией содержат произвольные параметры и становятся интегрируемыми только при специальных, дискретных значениях этого параметра. В диссертации найден целый ряд суперполевых операторов Лакса (для $N = 2$ уравнения Буссинеска с $\alpha = -1/2$; для $N = 2$ уравнения КдФ с $\alpha = 4$, воспроизводящий все законы сохранения; для $N = 2$ нелинейного уравнения Шредингера и его обобщений; для $N = 4$ уравнения КдФ; для новой $N = 4$ суперсимметричной интегрируемой иерархии, определенной на $N = 2$ аффинных супертоках, которая является $N = 4$ расширением сразу двух иерархий, $N = 2$ НУШ и $N = 2$ мКдФ; для аффинной иерархии, связанной с "квази" $N = 4$ иерархией КдФ; для объединенной $N = 2$ $a = 4$ КдФ и многомерной $N = 2$ иерархии НУШ) позволивший доказать интегрируемость соответствующих систем.

В диссертации также построены новые $N = 2$ супералгебры - суперполевая версия W_3 и $N = 2$ суперрасширение $W_3^{(2)}$ алгебры Полякова - Бершадского с произвольным центральным зарядом, в компонентах и суперполях.

Разработанный в диссертации Mathematica^{TM} пакет для вычисления Суперполевых Операторных Разложений (СОР) в мероморфных $N = 2$ суперконформных теориях поля, позволяет проводить большинство вычислений с использованием компьютера и был использован в целом ряде работ.

На защиту выдвигаются следующие результаты:

1. Разработан метод ковариантной редукции. Показана конструктивность данного метода для построения интегрируемых систем с расширенной суперсимметрией.

2. Методы нелинейных реализаций распространены на бесконечномерные и нелинейные группы и супергруппы.

3. Впервые построены суперполевые уравнения $N = 4$ суперконформной механики и найдены уравнения её N-расширенной версии.

4. Исходя из нелинейных реализаций суперконформных симметрий и с использованием развитого метода ковариантной редукции, построены новые точно решаемые системы с расширенной суперсимметрией: $N = 2$ и $N = 4$ суперсимметричные уравнения Лиувилля. Обнаружено, что вторая система является также $N = 4$ суперсимметризацией Весс-Зумино-Новиков-Виттеновской σ-модели. Изучена ВЗНВ σ-модель с $N = 3$ суперсимметрией. Построены общие решения $N = 2, 4$ уравнений Лиувилля.

5. В рамках метода нелинейных реализаций, обобщенного на случай нелинейных алгебр, установлена связь уравнений Буссинеска и x-уравнения Буссинеска с геометрией групп W_3 и $W_3^{(2)}$, соответственно.

6. Найдена суперполевая формулировка $N = 2$ суперсимметричной W_3 алгебры. Впервые построены её суперполевые реализации.

7. Впервые предложено $N = 2$ суперсимметричное уравнение Буссинеска. Доказано, что $N = 2$ уравнение Буссинеска интегрируемо только при трех значениях параметра $\alpha = -2, -1/2, 5/2$, появляющегося в Лагранжиане.

8. Построены суперполевые операторы Лакса для $N = 2$ уравнения Буссинеска с $\alpha = -1/2$, как с обычным, так и с модифицировааным определением вычетов супер-псевдодифференциальных операторов и уравнений Лакса. Доказана би-Гамильтоновость $N = 2$ уравнения Буссинеска с $\alpha = -2$.

9. Впервые построено $N = 3$ суперсимметричное уравнение Кортевега - де Фриза. Выявлена его вторая Гамильтонова структура и изучены свойства интегрируемости.

10. Доказано, что $N = 1$ нелинейное уравнение Шредингера обладает скрытой $N = 2$ суперсимметрией. Построена явно $N = 2$ суперполевая формулировка НУШ. Изучена связь $N = 2$ НУШ и $N = 2$ уравнения КдФ, найдены преобразования Бэклунда, связывающие эти уравнения. Найдены суперполевые операторы Лакса, как для $N = 2$ НУШ, так и для соответствующего уравнения КдФ, воспроизводящие все токи соответствующих иерархий. Выявлена глубокая связь $N = 2$ НУШ и фактор-пространств $N = 2$ $\hat{U}(2)$ супергруппы.

11. Выявлена скрытая $N = 4$ суперсимметрия $N = 2$ расширения аффинной алгебры $\widehat{sl(2) \oplus u}(1)$. Показано, что эта супералгебра обеспечивает вторую Гамильтонову структуру для новой $N = 4$ суперсимметричной интегрируемой иерархии, определенной на $N = 2$ аффинных супертоках. Эта система является $N = 4$ расширением сразу двух иерархий, $N = 2$ НУШ и $N = 2$ мКдФ. Найдена аффинная иерархия для другой интегрируемой системы с $N = 4$ СКА в качестве второй Гамильтоновой структуры - "квази" $N = 4$ иерархии КдФ, обладающей только $N = 2$ суперсимметрией. Для обеих новых иерархий построены скалярные операторы Лакса.

12. Проанализированы свойства интегрируемости $N = 4$ суперсимметрического уравнения КдФ и построен оператор Лакса в $N = 2$ суперполях.

13. С помощью объединения псевдо-дифференциальных операторов Лакса для $a = 4$, $N = 2$ КдФ и многомерной $N = 2$ иерархии НУШ, построены новые $N = 2$ суперсимметричные интегрируемые системы. Рассмотрено подобное расширение одной

из $N = 2$ супер иерархий Буссинеска и доказана его интегрируемость. Предложена новая система с $N = 4$ суперсимметрией, допускающая несколько первых интегралов движения.

14. Построено $N = 2$ суперрасширение $W_3^{(2)}$ алгебры Полякова - Бершадского с произвольным центральным зарядом, в компонентах и суперполях. Найдена полная квантовая версия этой нелинейной алгебры. Представлена гибридная, включающая токи и поля, реализация $N = 2$ супер-$W_3^{(2)}$ алгебры, как в классическом, так и в квантовом случаях. Предложено соответствующее расширение уравнения Буссинеска с $N = 2$ супер-$W_3^{(2)}$ алгеброй в качестве второй Гамильтоновой структуры.

15. Разработан Mathematica^{TM} пакет для вычисления Суперполевых Операторных Разложений (СОР) в мероморфных $N = 2$ суперконформных теориях поля.

Апробация работы.
Результаты, представленные в диссертации, докладывались на семинарах в Лаборатории теоретической физики им Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (Дубна), в Институте физики высоких энергий (Протвино), в Физическом институте Академии Наук (Москва), в Математическом институте Академии Наук (Москва), в Империал Колледже (Лондон), в Гумбольдтском Университете (Берлин), в Боннском Университете, в Харьковском физико-техническом институте, в Харьковском Университете, в Днепропетровском Университете, в Институте теоретической физики (Вроцлав), в Институте теоретической физики (Краков), в Международном центре теоретической физики (Триест), в SISSA (Триест), в Университете г. Падуя, в Университете г. Парма, в Университете г. Марсель, в Университете II г. Рим, в Национальной Физической Лаборатории (Фраскати), в Университете г. Орсэй, в Университете г. Лодзь, в ENSLAPP (Лион), в ЦЕРН (Женева), а также на Международном совещании по теоретико-групповым методам в физике, Звенигород, 1982 г.; на VII Международном совещании по нелокальным теориям поля, Алушта, 1984 г.; на XXII Международной конференции по физике высоких энергий, Лейпциг, Германия, 1984 г.; на Международной конференции "Суперсимметрия

85", Харьков, 1985; на Международной конференции "Кварки-86", Тбилиси, 1986 г.; на Международной конференции "Квантовая гравитация", Москва, 1987 г.; на Международных семинарах "Суперсимметрии и квантовые симметрии", Дубна, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 гг.; на XXX зимней школе по теоретической физике, Карпач, Польша, 1994 г.; на Рабочем совещании "Геометрия и интегрируемые модели", Дубна, 1994 г.; на Международных семинарах по интегрируемым системам, Дубна, 1996, 1998 гг.; на Международном рабочем совещании по теориям струн, калибровочным теориям и квантовой гравитации, Триест, Италия, 1996 г.; на X Международной конференции "Проблемы квантовой теории поля", Алушта, 1996 г.; на Международной конференции "Суперсимметрия и квантовая теория поля", Харьков, 1997 г.; на Международном совещании по интегрируемым системам, Ереван, 1998 г.; на 11 Международной конференции по проблемам квантовой теории поля, Дубна, 1998 г.; на 32 Международном симпозиуме по теории элементарных частиц, Буков, Германия, 1998 г.; на Международном совещании "Квантовая теория поля и физика высоких энергий", Москва, 1999 г.; на XIV Симпозиуме "Новые симметрии и интегрируемые системы", Карпач, Польша, 1999 г.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 37 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 7 глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Она содержит 196 страниц машинописного текста. Список литературы включает 130 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан обзор современного состояния и сформулированы основные проблемы построения интегрируемых систем с расширенной суперсимметрией. Обоснована принципиальная необходимость поиска новых методов построения таких систем, базирующихся на связи свойства интегрируемости системы с наличием бесконечномерных симметрий. Сформулирована цель работы, обоснована актуальность проведенных в диссертации исследований и изложено ее краткое содержание.

Глава 1 посвящена формулировке основных принципов метода ковариантной редукции, состоящего в наложении подходящих ковариантных связей на 1-формы Картана. В разделе 1.1 развит метод ковариантной редукции для конечномерных алгебр, который затем применяется для анализа бозонной (N=0) конформной механики. Основной результат этого раздела - установление того факта, что уравнения конформной механики

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{\gamma^2}{\rho^3}, \quad \left[\gamma^2\right] = \text{см}^{-2}, [\rho] = \text{см}^0, \tag{1}$$

совпадают с уравнениями геодезических в групповом пространстве $SO(1,2)$ и, следовательно могут быть получены занулением подходящих форм Картана.

В разделе 1.2 метод ковариантной редукции обобщается на случай конечномерных супергрупп и затем применяется к построению и анализу $N = 2,4$ суперконформных механик. В частности, суперполевые уравнения $N = 4$ случая имеют следующий вид:

$$(D)^2 e^u = 4mf, \ \left(\bar{D}\right)^2 e^u = 4m\bar{f}, \tag{2}$$

$$\left[D, \bar{D}\right] e^u = 8mc, \tag{3}$$

$$\left[D_{(a}, D_{b)}\right] u = 0. \tag{4}$$

Важно, что среди этих уравнений содержатся условия неприводимости (2), оставляющие в суперполе $u(t,\theta,\bar{\theta})$ следующие компоненты

$$e^{\frac{1}{2}u}\Big|_{\theta=0} = \rho(t), \ \frac{1}{2}D_a u\Big|_{\theta=0} = i\Psi_a(t)\rho^{-1}, \ \frac{1}{2}\bar{D}^a u\Big|_{\theta=0} = -i\bar{\Psi}^a(t)\rho^{-1},$$
$$\left[D^{(a}, D^{b)}\right] u\Big|_{\theta=0} = A^{(ab)}(t), \ \left[D_a, \bar{D}^a\right] u\Big|_{\theta=0} = C(t).$$

Во второй Главе метод ковариантной редукции обобщается на случай бесконечномерных и нелинейных (супер)групп. В частности, в этой Главе рассмотрены нелинейные реализации (супер)конформной группы двумерия и ее простейших нелинейных обобщений - W_3 и $W_3^{(2)}$ групп. В разделе 2.1, на примере обычной бозонной конформной группы показано, как применять метод ковариантной редукции к бесконечномерным группам. Продемонстрировано, что после наложения связей обратного эффекта Хиггса, весь бесконечный набор полей, параметризующих фактор-пространство конформной группы,

выражается через единственное существенное поле теории - дилатон $u(x)$, которое удовлетворяет либо уравнению Лиувилля, либо свободному уравнению. В разделе 2.2 развитый метод построения инвариантных уравнений применяется к $N = 2,4$ суперконформным группам. Там же построены $N = 2$ и $N = 4$ суперсимметричные расширения уравнения Лиувилля, изучены условия неприводимости $N = 4$ кватернионного суперполя $q_\alpha^\beta \equiv \left(e^{-u-i\phi\cdot\sigma}\right)_\alpha^\beta$

$$D_-^{(\alpha} q_\gamma^{\beta)} = 0 \,, \quad \bar{D}_{+(\alpha} q^\beta{}_{\gamma)} = 0 \,, \tag{5}$$

следующие из условий ковариантной редукции, и рассмотрен вопрос построения общего решения этих уравнений. Применению метода ковариантной редукции к нелинейным W-алгебрам посвящены разделы 2.3-2.5. Методы нелинейных реализаций, которые мы собираемся применять к нелинейным симметриям W - типа, были разработаны для симметрий, основанных на алгебрах Ли, то есть линейных алгебрах. Чтобы обобщить эти методы на W_N алгебры, мы предлагаем трактовать все композитные генераторы с высшими спинами, присутствующие в обертывающей алгебре, построенной на генераторах W_N, как независимые. Другими словами, мы заменяем нелинейную W_N алгебру некоторой линейной бесконечномерной алгеброй, включающей высшие спины. Подходящий выбор подгруппы стабильности, совместно с условиями ковариантной редукции позволяют и в этих случаях свести бесконечные наборы голдстоуновских полей к конечному числу существенных, подчиняющихся известным бозонным уравнениям и найти их суперсимметричные расширения. В разделе 2.3 выведены sl_3 Тодовские реализации классических W_3 симметрий на двух скалярных полях геометрическим способом, из нелинейной реализации некоторой ассоциированной более высокой симметрии W_3^∞. Далее, в разделе 2.4 мы строим реализацию W_3^∞ алгебры (одной копии) в фактор-пространствах, *отличных* от рассмотренных в предыдущих разделах. Мы демонстрируем, что существует набор ковариантных условий редукции, который уменьшает число независимых полей - параметров фактор-пространства до двух полей конформных спинов 2 и 3, которые могут быть отождествлены с токами W_3 алгебры, и одновременно приводит к уравнению Буссинеска для этих полей. И пространственная (x), и эволюционная (t) координаты естественно появляются как параметры рассматриваемого фактор-пространства. Нелинейные реализации классической алгебры Полякова-Бершадского $W_3^{(2)}$ рассмотрены в разделе 2.5. Метод реализации в фактор пространстве и процедура ковариантной редукции позволяют нам вывести уравнение Буссинеска с переставленными координатами пространства-времени. Добавляя еще одну пространственную координату и вводя две копии $W_3^{(2)}$ алгебры, тот же самый метод приводит к уравнениям $sl(3,R)$ цепочки Тода.

В третьей Главе построена суперполевая реализация $N=2$ супер-W_3 алгебры и найдены её реализации на свободных суперполях (раздел 3.1). Все токи, генерирующие $N=2$ супер-W_3, в соответствии с их спинами, могут быть объединены в два $N=2$ супертока $J(Z)$ и $T(Z)$ со спинами 1 и 2 соотвественно. Полный набор операторных разложений (ОПР) для компонентных токов, теперь может быть записан как три ОПР между супертоками $J(Z)$ и $T(Z)$. В этом же разделе построены гамильтоновы потоки на $N=2$ супер-W_3 алгебре и найдены обобщенные $N=2$ иерархии Буссинеска, для которых эта алгебра является второй гамильтоновой структурой. Мы определяем $N=2$ суперсимметричное уравнение Буссинеска как $N=2$ суперполевое уравнение, имеющее в качестве второй гамильтоновой структуры $N=2$ супер-W_3 алгебру. Другими словами, мы рассматриваем следующие эволюционные уравнения

$$\dot{T}=[T,H] \quad , \quad \dot{J}=[J,H] \quad , \tag{6}$$

где гамильтониан H определен как

$$H=\frac{1}{2\pi i}\oint dZ\left(T+\alpha J^2\right) . \tag{7}$$

Подчеркнем, что гамильтониан (7) является наиболее общим, $N=2$ суперсимметричным, построенным из супертоков J и T гамильтонианом подходящей размерности. Отметим появление свободного параметра α в (7). Явный вид $N=2$ суперсимметричного уравнения Буссинеска следующий:

$$\begin{aligned}
\dot{T} &= -2J''' + \left[\overline{\mathcal{D}},\mathcal{D}\right]T' + \frac{80}{c}\partial\left(\overline{\mathcal{D}}J\mathcal{D}J\right) - \frac{32}{c}J'\left[\overline{\mathcal{D}},\mathcal{D}\right]J \\
&- \frac{16}{c}J\left[\overline{\mathcal{D}},\mathcal{D}\right]J' + \frac{256}{c^2}J^2J' + \left(\frac{40}{c}-2\alpha\right)\overline{\mathcal{D}}J\mathcal{D}T \\
&+ \left(\frac{40}{c}-2\alpha\right)\mathcal{D}J\overline{\mathcal{D}}T + \left(\frac{64}{c}+4\alpha\right)J'T + \left(\frac{24}{c}+2\alpha\right)JT' \\
\dot{J} &= 2T' + \alpha\left(\frac{c}{4}\left[\overline{\mathcal{D}},\mathcal{D}\right]J' + 4JJ'\right) .
\end{aligned} \tag{8}$$

В разделе 3.2 показано, что высшие законы сохранения существуют только для трех значений свободного параметра $\alpha=-2,-1/2,5/2$ в $N=2$ суперсимметричном уравнении Буссинеска и построены два оператора Лакса для случая $\alpha=-1/2$:

$$\begin{aligned}
L^{(1)} &= \partial^3 + 3J\partial^2 - 3\overline{\mathcal{D}}J\mathcal{D}\partial + \left(2J^2 - T + \frac{3}{2}\partial J - \frac{1}{2}[\mathcal{D},\overline{\mathcal{D}}]J\right)\partial \\
&+ \left(\overline{\mathcal{D}}T - 4J\overline{\mathcal{D}}J - 2\partial\overline{\mathcal{D}}J\right)\mathcal{D} ,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
L^{(2)} &= \partial^3 + \frac{3}{2}J\partial^2 + \frac{3}{2}J[\mathcal{D},\overline{\mathcal{D}}]\partial - 3\overline{\mathcal{D}}J\mathcal{D}\partial + \left(\overline{\mathcal{D}}T - 4J\overline{\mathcal{D}}J - 2\partial\overline{\mathcal{D}}J\right)\mathcal{D} \\
&- 2\left(J^2 - \frac{1}{2}T + \frac{3}{4}\partial J - \frac{1}{4}[\mathcal{D},\overline{\mathcal{D}}]J\right)\overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}] .
\end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, интегрируемые $N=2$ супер иерархии Буссинеска могут существовать только при трех специальных значениях свободного параметра α. Интегрируемость в случае $\alpha=-1/2$ следует из пары Лакса, в то время как в случае $\alpha=-2$ это следствие наличия двух гамильтоновых структур.

В Главе 4 построено одно-параметрическое семейство $N=3$ суперсимметрических расширений уравнения КдФ, как Гамильтоновых потоков на $N=3$ суперконформной алгебре и показано, что оно не-интегрируемо для любого выбора свободного параметра (раздел 4.1). Затем, в разделе 4.2, предложено модифицированное $N=3$ супер уравнение КдФ:

$$J_t = -J_{xxx} + 3\left(J\mathcal{D}^3J\right)_x + \frac{3}{2}J\left(\mathcal{D}^iJ\mathcal{D}^iJ\right)_x . \tag{11}$$

которое обладает высшими законами сохранения и таким образом является кандидатом на интегрируемую систему. После редукции к $N=2$, это уравнение сводится к интегрируемой версии $N=2$ суперсимметричного уравнения КдФ. В этом же разделе приведена Гамильтонова формулировка нового $N=3$ супер уравнения КдФ, как потока на некоторой контракции прямой суммы двух $N=3$ суперконформных алгебр.

В пятой Главе изучаются суперсимметричные расширения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), $N=4$ уравнение КдФ и строятся новые интегрируемые системы с $N=2$ и $N=4$ суперсимметрией. В разделе 5.1 показано, что известное $N=1$ НУШ обладает

$N=2$ суперсимметрией. Оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{c}{4}\left[\mathcal{D},\overline{\mathcal{D}}\right] J' + 4J'J \qquad (12)$$

и таким образом это фактически $N=2$ НУШ. Вторая суперсимметрия скрыта в терминах, обычно используемых $N=1$ суперполей, но становится явной после перехода к $N=2$ суперполям. В терминах новых переменных, вторая Гамильтонова структура суперсимметрического НУШ совпадает с $N=2$ суперконформной алгеброй, а само $N=2$ НУШ принадлежит $N=2$, $a=4$ иерархии КдФ. Здесь же построен КП-подобный, псевдо-дифференциальный оператор Лакса в терминах $N=2$ суперполей:

$$L = \partial - 2J - 2\overline{D}\partial^{-1}(DJ)\,. \qquad (13)$$

Здесь ∂ означает стандартную бозонную x-производную. Скобки в вышеупомянутом выражении означают действие D на J, (то есть D не действует свободно направо) . Этот оператор Лакса воспроизводит все законы сохранения I_n для соответствующей иерархии, которые в нашем случае генерируются константными членами L^n, то есть

$$I_n = (-\tfrac{1}{2})^n \int dX (L^n)_0\,, \qquad (14)$$

где индекс “0” обозначает константную часть оператора.

В разделе 5.2 обсуждается связь между супер-НУШ и $N=2$ суперсимметричным уравнением КдФ с параметром $a=4$. Показано, что существует преобразование Бэклунда, которое отображает супер-НУШ во второй поток иерархии, связанной с $N=2$, $a=4$ уравнением КдФ.

В разделе 5.3 доказывается, что $N=2$ расширение аффинной алгебры $\widehat{sl(2)\oplus u(1)}$ обладает скрытой глобальный $N=4$ суперсимметрией и обеспечивает вторую Гамильтонову структуру для новой $N=4$ суперсимметричной интегрируемой иерархии, определенной на $N=2$ аффинных супертоках. Соответствующие первые и вторые потоки имеют вид

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t_1} = \Psi' \qquad (15)$$

Для всех $\Psi \equiv \{H, \overline{H}, F, \overline{F}\}$, и

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t_2} &= -F'' + 2\overline{D}HF' + 2\overline{D}H'F + 2D\overline{H}F' + 2\overline{D}FFD\overline{F} - 2FF'\overline{F}\\
&\quad + 2HD\overline{H}\overline{D}F + 2H\overline{H}F' + 2H\overline{H}'F - 2\overline{D}HH\overline{H}F + 4H\overline{D}FF\overline{F}\,,\\
\frac{\partial H}{\partial t_2} &= H'' + 2\overline{D}HH' + 2HD\overline{H}' + 2H'D\overline{H} + 2\overline{D}HFD\overline{F} - 2H\overline{D}FD\overline{F}\\
&\quad + 2HF'\overline{F} + 2H'F\overline{F} - 2HD\overline{H}F\overline{F} - 2H\overline{H}FD\overline{F}\,. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Эта система является $N=4$ расширением сразу двух иерархий, $N=2$ НУШ и $N=2$ мКдФ.

В этом же разделе найдена аффинная иерархия для другой интегрируемой системы, с $N=4$ СКА в качестве второй Гамильтоновой структуры - ”квази” $N=4$ иерархии КдФ. Она имеет только $N=2$ суперсимметрию. Для обеих новых иерархий построены скалярные операторы Лакса.

В разделе 5.4 представлены результаты анализа свойств интегрируемости $N=4$ суперсимметрического уравнения КдФ. Для того чтобы прояснить структуру этого уравнения и соответствующей Гамильтоновой структуры, оно сформулировано в обычном $N=4$ и далее в $N=2$ суперпространствах. В $N=2$ суперпространстве это уравнение сводится к связанной системе уравнений движения для общего $N=2$ суперполя и двух киральных и антикиральных суперполей, и включает два независимых вещественных параметра, a и b:

$$\begin{aligned}
V_t &= -V_{xxx} + 3i\left(\left[D,\bar{D}\right]V\,V\right)_x - \frac{i}{2}(1-a)\left(\left[D,\bar{D}\right]V^2\right)_x - 3a\,V_xV^2\\
&\quad + \frac{1}{4}(a-4)\left(\Phi_x\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_x\Phi\right)_x + \frac{i}{2}(a-1)\left(D\Phi\bar{D}\bar{\Phi}\right)_x - \frac{3}{2}a\left(V\Phi\bar{\Phi}\right)_x\\
&\quad + \frac{1}{8}b\left(\Phi^2 - \bar{\Phi}^2\right)_{xx} - \frac{3}{4}b\left[V\left(\Phi^2 + \bar{\Phi}^2\right)\right]_x\\
&\quad + \frac{i}{2}b\left[D,\bar{D}\right]\left[V\left(\Phi^2 - \bar{\Phi}^2\right)\right]\\
\Phi_t &= -\Phi_{xxx} - \frac{5}{4}b\,\Phi_x\Phi^2 - \bar{D}\left[6i\,(DV\,\Phi)_x - i\,(a+2)\,D\,(V\Phi)_x\right]\\
&\quad + \bar{D}D\left[3i\,a\left(V^2\Phi + \frac{1}{4}\Phi^2\bar{\Phi}\right) + i\,b\left(V\bar{\Phi}\right)_x + i\,b\left(V^2\bar{\Phi} + \frac{1}{4}\bar{\Phi}^2\Phi\right)\right]\\
\bar{\Phi}_t &= -\bar{\Phi}_{xxx} - \frac{5}{4}b\,\bar{\Phi}_x\bar{\Phi}^2 + D\left[6i\,\left(\bar{D}V\,\bar{\Phi}\right)_x - i\,(a+2)\,\bar{D}\left(V\bar{\Phi}\right)_x\right]
\end{aligned}$$

$$+D\bar{D}\left[3i\,a\left(V^2\bar{\Phi}+\frac{1}{4}\,\bar{\Phi}^2\Phi\right)-i\,b\,(V\Phi)_x+i\,b\left(V^2\Phi+\frac{1}{4}\,\Phi^2\bar{\Phi}\right)\right].$$

Здесь же построены первые шесть законов сохранения и показано, что они существуют только для следующих выборов параметров: (i) $a=4,\ b=0$; (ii) $a=-2,\ b=-6$; (iii) $a=-2,\ b=6$.

Наконец, в разделе 5.5 построены новые $N=2$ суперсимметричные интегрируемые системы, путем объединения псевдо-дифференциальных операторов Лакса для $a=4$, $N=2$ КдФ и многомерной $N=2$ иерархии НУШ:

$$L_1=\partial-2J-2\overline{\mathcal{D}}\partial^{-1}(DJ)-\sum_i F^i\overline{\mathcal{D}}\partial^{-1}(D\bar{F}^i)+\sum_i\overline{\mathcal{D}}\partial^{-1}(D(F^i\bar{F}^i)). \tag{17}$$

Как важный частный случай, для одной пары взаимно сопряженных фермионных суперполей $F, \bar{F}=F^\dagger$ и вещественного J, этот оператор (17) является оператором Лакса для $N=4$ супер уравнения КдФ.

В Главе 6 построены $N=2$ суперрасширения $W_3^{(2)}$ алгебры Полякова - Бершадского с произвольным центральным зарядом, как в компонентах (раздел 6.1), так и в суперполях (раздел 6.2). Эта супералгебра содержит, как не пересекающиеся подалгебры, $N=2$ суперконформную алгебру и $W_3^{(2)}$, и может рассматриваться как нелинейное замыкание этих двух алгебр. Все токи этой алгебры могут быть объединены в пять $N=2$ ограниченных суперполей: три бозонных со спином 1/2, 1 и 2, и два фермионных со спинами 1/2 и 2. Представлена гибридная, включающая токи и поля, реализация $N=2$ супер-$W_3^{(2)}$ алгебры. Также рассмотрена суперполевая редукция $N=2$ супер-$W_3^{(2)}$ алгебры к $N=2$ супер-W_3 и построено семейство $N=2$ уравнений, для которых $N=2$ супер-$W_3^{(2)}$ обеспечивает вторую Гамильтонову структуру.

В седьмой Главе описан Mathematica^{TM} пакет для вычисления Суперполевых Операторных Разложений (СОР) в мероморфных $N=2$ суперконформных теориях поля. Приведены два примера использования пакета: построение "маленькой" $N=4$ суперконформной алгебры в $N=2$ суперполях и нахождение реализации $N=2$ суперконформной алгебры в терминах киральных и антикиральных фермионных суперполей.

В Приложениях приведены некоторые полезные тождества и доказана Лемма, использующаяся в Главе 5.

В Заключении суммированы основные результаты диссертации и сформулированы открытые в ней новые направления.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. E. Ivanov, S. Krivonos, "U(1) supersymmetric extension of the Liouville equation", Lett. Math. Phys., **7** (1983) 523.
2. E. Ivanov, S. Krivonos, "N=4 super Liouville equation", J. Phys., **A17** (1984) L671.
3. Е. Иванов, С. Кривонос, "Нелинейная реализация конформной группы двумерия и уравнение Лиувилля", ТМФ, **58** (1984) 200.
4. E. Ivanov, S. Krivonos, "Integrable systems as nonlinear realizations of infinite dimensional symmetries. The Liouville equation example", Lett. Math. Phys., **8** (1984) 39.
5. Е. Иванов, С. Кривонос, Суперполевые расширения уравнения Лиувилля, в Трудах VII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля, Алушта, 1984, Д2-84-366, Дубна, 1984.
6. Е. Иванов, С. Кривонос, "N=4 суперрасширение уравнения Лиувилля с кватернионной структурой", ТМФ, **63** (1985) 230.
7. E. Ivanov, S. Krivonos, "Backlund transformations for the super Liouville equations", Theor. Math. Phys., **66** (1986) 60.
8. E. Ivanov, S. Krivonos, V. Leviant, "A new class of superconformal sigma models with the Wess-Zumino action", Nucl. Phys., **B304** (1988) 601.
9. E. Ivanov, S. Krivonos, V. Leviant, "Quantum N=3, N=4 superconformal WZW sigma models", Phys. Lett., **B215** (1988) 689, Erratum-ibid **B221** (1989) 432.
10. E. Ivanov, S. Krivonos, V. Leviant, "Geometry of conformal mechanics", J.Phys., **A22** (1989) 345.
11. E. Ivanov, S. Krivonos, V. Leviant, "Geometric superfield approach to superconformal mechanics", J.Phys., **A22** (1989) 4201.

12. E. Ivanov, S. Krivonos, V. Leviant, "N=3 and N=4 superconformal WZNW sigma models in superspace. 1. General formalism and N=3 case", Int. J. Mod. Phys., **A6** (1991) 2147.

13. E. Ivanov, S. Krivonos, A. Pichugin, "Nonlinear realizations of W_3 symmetry", Phys. Lett., **B284** (1992) 260.

14. E. Ivanov, S. Krivonos, "Superfield realizations of N=2 super-W_3", Phys. Lett., **B291** (1992) 63, Erratum-ibid.**B301** (1993) 454.

15. E. Ivanov, S. Krivonos, V. Leviant, "N=3 and N=4 superconformal WZNW sigma models in superspace. 1. The N=4 case", Int. J. Mod. Phys., **A7** (1992) 287.

16. E. Ivanov, S. Krivonos, R.P. Malik, "Boussinesq type equations from nonlinear realizations of W_3", Int. J. Mod. Phys., **A8** (1993) 3199.

17. S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos, "Towards an integrable N=3 super-KdV equation", Phys. Lett. **A173** (1993) 143.

18. S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos, "On N=3 super Korteveg - de Vries equation", J. Math. Phys., **34** (1993) 3087.

19. S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos, A. Pichugin, "N=2 super-Boussinesq hierarchy: Lax pairs and conservation laws", Phys. Lett. **B 312** (1993) 463.

20. S. Bellucci, V. Gribanov, S. Krivonos, A. Pashnev, "Nonlinear realizations of the $W_3^{(2)}$ algebra", Phys. Lett., **A191** (1994) 216.

21. S. Krivonos, A. Sorin, "The N=2 super-$W_3^{(2)}$ algebra", Preprint LNF-94/014 (P), Frascati, 1994.

22. S. Krivonos, A. Sorin, "The minimal N=2 superextension of the NLS equation", Phys. Lett., **B 357** (1995) 94.

23. S. Krivonos, A. Sorin, F. Toppan, "On the super-NLS equation and its relation with the N=2 super-KdV equation within the coset approach", Phys. Lett., **A 206** (1995) 146.

24. E. Ivanov, S. Krivonos, R.P. Malik, "N=2 super-W_3 algebra and N=2 super Boussinesq equations", Int. J. Mod. Phys., **A10** (1995) 253.

25. C. Ahn, S. Krivonos, A. Sorin, "The full structure of quantum N=2 super-$W_3^{(2)}$ algebra", Mod. Phys. Lett., **A10** (1995) 1299.

26. E. Ivanov, S. Krivonos, A. Sorin, "N=2 super-$W_3^{(2)}$ algebra in superfields", Mod. Phys. Lett., **A10** (1995) 2439.

27. F. Delduc, E. Ivanov, S. Krivonos, "N=4 super-KdV hierarchy in N=4 and N=2 superspaces", J. Math. Phys., **37** (1996) 1356.

28. C. Ahn, E. Ivanov, S. Krivonos, A. Sorin, "Quantum N=2 super-$W_3^{(2)}$ algebra in superspace", Mod. Phys. Lett., **A11** (1996) 1705.

29. S. Krivonos, K. Thielemans, "A Mathematica package for computing N=2 superfield operator product expansions", Class. Quant. Grav., **13** (1996) 2899.

30. L. Bonora, S. Krivonos, "Hamiltonian structure and coset construction of the supersymmetric extensions of N = 2 KdV hierarchy", Mod. Phys. Lett., **A12** (1997) 3037.

31. E. Ivanov, S. Krivonos, F. Toppan, "N=4 super NLS-mKdV hierarchies", Phys. Lett., **B405** (1997) 85.

32. E. Ivanov, S. Krivonos, "New integrable extensions of N=2 KdV and Boussinesq hierarchies", Phys. Lett., **A231** (1997) 75.

33. S. Krivonos, A. Pashnev, Z. Popowicz, "Lax pairs for N=2,3 supersymmetric KdV equations and their extensions", Mod. Phys. Lett., **13A** (1998) 1435.

34. L. Bonora, S. Krivonos, "The Hamiltonian Structure of the 'Bosonic' and 'Fermionic' Extensions of N=2 KdV Hierarchy", в "Supersymmetry and Quantum Field theory", Springer 1998, p.173.

35. S. Krivonos, Z. Popowicz, "N=2 SUSY Two-Boson KP Hierarchy, (Derivative) NLS Equation and Miura Transformations", In Proceedings of the International Seminar Dedicated to the Memory of

V.I. Ogievetsky, Russia, 22-26 July 1997, Lecture Notes in Physics, **524**, p.252, Springer, 1999.

36. S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos, "Partial Breaking N=4 to N=2: Hypermultiplet as a Goldstone Superfield", Talk given at 11th International Conference on Problems of Quantum Field Theory, Dubna, Russia, 13-17 July 1998 and 32nd International Symposium Ahrenshoop on the Theory of Elementary Particles, Buckow, Germany, 1-5 Sept. 1998, Fortsch. Phys. **48** (2000) 19.

37. E. Ivanov, S. Krivonos, "N=1 D = 4 supermembrane in the coset approach", Phys. Lett., **B453** (1999) 237.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июля 2000 года.