ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2 - 12645

ГАВЛИЧЕК
Милослав

КАНОНИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ

Специальность 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1979

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

член-корреспондент АН Литовской ССР, профессор — В.В. Ванагас

доктор физико-математических наук, профессор — А.А. Кириллов

доктор физико-математических наук, профессор — Я.А. Смородинский

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Математический институт АН СССР им. В.А. Стеклова, Москва.

Защита диссертации состоится " " ________ 197 года на заседании специализированного совета Д047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединённого института ядерных исследований.

Ученый секретарь Совета

Р.А.АСАНОВ

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. Математической сущностью многих проблем теоретической физики является чисто алгебраическая задача: выразить (реализовать) генераторы некоторой алгебры Ли как функции определенного числа канонических квантово-механических переменных q_i и $p_i = \partial/\partial q_i$ или операторов рождения и уничтожения частиц-бозонов.

В ядерной физике канонические реализации или, как часто их называют, бозонные представления алгебр Ли, применяются в работах многих авторов при анализе точно решаемых ядерных моделей, для рационального определения коллективных переменных в проблеме многих тел и в других проблемах.

В теории элементарных частиц хорошо известны применения лестничных представлений Дотана, Гелл-Манна и других авторов для классификации элементарных частиц и в связи со спектр-порождающими или динамическими алгебрами.

Во многих физических задачах применение реализаций алгебр Ли существенно упрощает диагонализацию гамильтонианов, позволяет вычислить важные характеристики систем и в некоторых случаях дает возможность упростить решение проблемы за счет свойств используемых реализаций.

С математической точки зрения реализации алгебр Ли привлекательны тем, что они лежат в основе алгебраического подхода к теории представлений. Хорошо известны также применения реализаций алгебр Ли в исследованиях свойств специальных функций и для классификации дифференциальных уравнений определенного типа.

Таким образом, проблема исследования реализаций алгебр Ли представляет важную задачу, имеющую широкий круг применения как в математике, так и в теоретической физике.

Основной целью работы является систематическое исследование реализаций классических алгебр Ли в алгебре Вейля и в некоторых смежных ее расширениях, удовлетворяющих некоторым заданным условиям, которые характерны для физических применений.

Научная новизна. В диссертации представлены основные научные результаты работ, выполненных автором в течение 1974 – 1977 г.г.в Лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований (Дубна). В этих работах получены и исследованы множества канонических реализаций определенного типа для пяти (из восьми возможных) бесконечных серий некомпактных классических алгебр Ли, вычислены значения порождающих операторов Казимира в этих реализациях. Получены аналогичные результаты для всех комплексных классических алгебр Ли и установлены основные свойства реализаций рассмотренных алгебр.

Научная и практическая ценность работы

Выполненные исследования существенно расширяют известные знания о свойствах канонических реализаций важного семейства классических алгебр Ли и могут служить естественной основой для обобщений на другие типы алгебр Ли.

На защиту выносятся следующие основные положения

1. Новые рекуррентные формулы, определяющие реализации специальных свойств для всех типов классических комплексных алгебр Ли в алгебре Вейля, и их следствия.

2. Аналогичные рекуррентные формулы и их следствия для действительных форм классических алгебр Ли следующих типов: $sl(n,R)$, $su(p,q)$ при $p\geq q\geq 1$, $o(m,n)$ при $m\geq n\geq 1$ и $sp(2n,R)$.

3. Сравнение полученных нами результатов с минимальными реализациями и с реализациями Гельфанда – Кириллова.

Объем работы. Диссертация написана на 112 страницах машинописного текста, список литературы состоит из 111 работ.

Содержание работы

Предлагаемая диссертация представляет попытку систематического исследования реализаций простых алгебр Ли в алгебре Вейля и в некоторых смежных ее расширениях, к которым приходится переходить, если не удается выполнить все условия задачи в рамках алгебры Вейля. Диссертация состоит, кроме введения и заключения, из двух основных частей.

Ядром работы является вторая часть, где предлагаются множества антиэрмитовых (в отношении к определенной ниже инволюции) шуровских реализаций (так названы реализации, в которых все операторы Казимира кратны единице) для пяти из восьми бесконечных серий простых некомпактных алгебр Ли: $o(m,n)$, $su(p,q)$, $sl(n,\mathbb{R})$ и $sp(2n,\mathbb{R})$. Из трех оставшихся серий две, квартернионные, не рассматриваются, так как, насколько известно автору, в физике они пока не применялись, а для третьей, т.е. алгебр $sp(2p,2q)$, получен частный результат, на основе которого можно предположить, что конструкция аналогичного множества реализаций $sp(2p,2q)$ есть технический вопрос. Эти множества являются новыми; в литературе до сих пор встречалось только несколько частных случаев некоторых из них.

Все рассмотренные реализации обладают дополнительным свойством: они являются шуровскими. Это условие понятно с точки зрения применения к теории представлений: представления, полученные из шуровских реализаций, " ближе " к основным, неприводимым представлениям, чем нешуровские. С другой стороны, это условие не ограничивает применения таких реализаций в физике, хотя в ранее упомянутых применениях часто встречаем нешуровские реализации. Дело в том, что одновременно с шуровской реализацией определенной алгебры получаются нешуровские реализации подалгебр. Таким образом, получается также множество нешуровских реализаций подалгебр простых алгебр Ли при помощи разных чисел канонических пар и, более того, эти " подреализации " замкнуты в шуровских реализациях более широких алгебр.

В разделе I.I рассмотрена алгебра $gl(n,\mathbb{R}) \supset sl(n,\mathbb{R})$, при этом рассуждения основаны на следующей рекуррентной формуле. Если $F_{\mu\nu}, \mu,\nu = 1,2,\dots,n-1$ означают генераторы алгебры $gl(n-1,\mathbb{R})$, для которых выполняются перестановочные соотношения

$$[F_{\mu\nu}, F_{\rho\tau}] = \delta_{\nu\rho} F_{\mu\tau} - \delta_{\mu\tau} F_{\rho\nu} \qquad (*)$$

и которые коммутируют с $n-1$ каноническими парами p_μ , q_ν , $[p_\mu, q_\nu] = \delta_{\mu\nu} 1$, то для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ выражения

$$E_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu + F_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu} 1 , \quad E_{n\mu} = -p_\mu$$

$$E_{\mu n} = q_\mu\left(qp + \tfrac{n}{2} - i\alpha\right) + q_\nu F_{\mu\nu} , \quad E_{nn} = -qp - \left(\tfrac{n-1}{2} - i\alpha\right) 1 \qquad (**)$$

$(qp = q_1 p_1 + \dots + q_{n-1} p_{n-1})$ являются генераторами алгебры $gl(n,\mathbb{R})$, т.е. выполняются соотношения типа (*). Доказывается дальше, что под упомянутой инволюцией $p_\mu^+ = -p_\mu$, $q_\mu^+ = q_\mu$, генераторы E_{ij} $(i,j = 1,2,\dots,n)$ – антиэрмитовы, если такими же являются $F_{\mu\nu}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, и что операторы Казимира $gl(n,\mathbb{R})$ кратны единице, если кратны единице операторы Казимира алгебры $gl(n-1,\mathbb{R})$ с генераторами $F_{\mu\nu}$.

После подстановки в формулы (**) $F_{\mu\nu} = i\alpha_{n-1}\delta_{\mu\nu}/(n-1)$, $\alpha = \alpha_n$ получаем антиэрмитову шуровскую реализацию $gl(n,\mathbb{R})$ в алгебре Вейля $W_{2(n-1)}$ с $n-1$ парами, которой ставим в соответствие сигнатуру $(1; \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2\text{-раз}}, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. Реализацию $gl'(n,\mathbb{R})$ с сигнатурой

$(d;0,\ldots,0,\alpha_{n-d},\ldots,\alpha_n)$ определяем рекуррентно формулами (жж) с $\alpha=\alpha_n$, где $F_{\mu\nu}$ реализует алгебру $gl(n-1,\mathbb{R})$ с сигнатурой $(d-1;0,\ldots,0,\alpha_{n-d},\ldots,\alpha_{n-1})$. Эта реализация зависит от $d+1$ действительных параметров $\alpha_{n-d},\ldots,\alpha_n$ и лежит в $W_{2N(d)}$, где $N(d)=\frac{d}{2}(2n-d-1)$.

Таким образом, получается множество антиэрмитовых шуровских реализаций $gl(n,\mathbb{R})$, элементы которого классифицированы сигнатурами $(d;0,\ldots,0,\alpha_{n-d},\ldots,\alpha_n)$, $d=1,\ldots,n-1$ в алгебре Вейля $W'_{2N(d)}$. Доказывается взаимная "неэквивалентность" $(\mathrm{mod}\ \mathrm{End}\,W'_{2N(d)})$ реализаций из этого множества и, далее, то, что при сужении на подалгебру $sl(n,\mathbb{R})$ можно ограничиться только теми реализациями $gl(n,\mathbb{R})$, в которых выполняется условие $\sum_{i=0}^{d}\alpha_{n-i}=0$, так как в остальных реализациях $gl(n,\mathbb{R})$ "подреализация" $sl(n,\mathbb{R})$ уже "эквивалентна" некоторой "подреализации" $sl(n,\mathbb{R})$ из определенного выше подмножества реализаций $gl(n,\mathbb{R})$.

В следующем разделе (П.I.2) вычисляются, в определенных реализациях, значения операторов Казимира. Так как реализации шуровские, то значения операторов Казимира являются функциями от слагаемых сигнатуры. Показывается, что эти функции равны специальным симметрическим полиномам от линейных функций слагаемых сигнатур, которые совпадают с полиномами, выражающими значения операторов Казимира в неприводимом конечноразмерном представлении $gl(n,\mathbb{R})$, вычисленные Переломовым и Поповым.[ж)] При этом подтверждается, что слагаемые сигнатуры являются существенными в том смысле, что если их при определенном d рассматривать как $d+1$ независимых параметров, то среди значений операторов Казимира существует $d+1$ независимых. Таким образом, предлагаемое множество содержит реализации, в

ж) Переломов А.М., Попов В.С., Изв. АН СССР, сер.матем. 32, №6, 1368 (1968).

которых значения всех n порождающих операторов Казимира независимы как функции n параметров (случай максимального $d=n-1$).

В разделах II.2, II.3.I, II.4 рассматриваются в подобном духе формально более сложные случаи алгебр $u(p,q)$, $o(m,n)$, $sp(2n,\mathbb{R})$, в разд. II.3.2 вычисляются для таких реализаций $o(m,n)$ значения операторов Казимира. Определенные здесь реализации упомянутых алгебр снова классифицируются сигнатурами аналогичного типа, как и в случае $gl(n,\mathbb{R})$, и опять обладают свойствами шуровости и антиэрмитовости, но в случаях алгебр $o(m,n)$ и $u(p,q)$ пришлось использовать некоторые расширения алгебры Вейля.

При использовании рекуррентных формул, аналогичных формулам (жж), в случае алгебр $o(m,n)$, $m\geq n\geq 1$, $m-n>2$ приходим к шуровским антиэрмитовым реализациям компактной алгебры $o(m-n)$. Так как известно, что такие нетривиальные реализации в алгебре Вейля (в случае $m-n>2$) не существуют, то было бы возможно либо окончить рекуррентный процесс постановкой тривиальной реализации $o(m-n)$ и таким образом получить множество реализаций $o(m,n)$, в которых число параметров (n) не достигло числа порождающих операторов Казимира $\left(\left[\frac{m+n}{2}\right]\right)$, либо расширить алгебру Вейля так, чтобы в таком расширении нетривиальные антиэрмитовы шуровские реализации компактной алгебры существовали. В этой работе применяется второй путь, а именно, рассматривалось матричное расширение алгебры Вейля $W_{2N,M}\equiv W'_{2N}\otimes \mathrm{Mat}_M$ (Mat_M – комплексные матрицы размерности M. Инволюция на $W'_{2N,M}$ порождается инволюцией на W'_{2N} и эрмитовым сопряжением на Mat_M). При этом в качестве антиэрмитовых шуровских реализаций компактной алгебры $o(m-n)$ было возможно взять обычные антиэрмитовы неприводимые представления $o(m-n)$. Таким образом, получается множество реализаций алгебры $o(n,n)$, в котором число независимых параметров (часть из них приобретает только "дискретные" значения) достигает числа порождающих операторов Казимира. Из результатов разд. II.3.2, где значения этих операторов вычислены (снова с помощью специальных симметрических полиномов), вытекает, что они существенны в таком же смысле, как и для $gl(n,\mathbb{R})$, а именно, что при полном числе $[\frac{n+n}{2}]$ этих параметров значения всех порождающих операторов Казимира есть независимые функции.

В частном случае алгебр $o(n+2,n)$, $o(n+1,n)$ и $o(n,n)$ матричное расширение алгебры Вейля не нужно.

Для алгебр $u(p,q)$ удалось найти антиэрмитовы шуровские реализации только в случае, когда бралось дальнейшее расширение алгебры Вейля $W^r_{2N} \otimes Mat_M$, где W^r_{2N} означает так называемую локализацию (по определенной полугруппе) алгебры Вейля, которая в нашем случае состоит из "полиномов" от канонических переменных, где допускаются у r переменных q_i отрицательные степени.

Как уже сказано, все основные свойства определенных множеств антиэрмитовых шуровских реализаций $o(m,n)$ и т.д. совпадают со свойствами реализаций $gl(n,\mathbb{R})$; следующая таблица содержит некоторые более детальные информации о них.

Алгебра	$gl(n,\mathbb{R})$	$u(p,q)$	$o(m,n)$	$sp(2n,\mathbb{R})$
Реализована в:	$W_{2N(d)}$	$W^{N(d)}_{2N(d),M(d)}$	$W_{2N(d),M(d)}$	$W_{2N(d)}$
Множество значений d	$1,\ldots,n-1$	$1,\ldots,2q-\delta_{pq}$	$1,\ldots,m$	$1,\ldots,n$
$N(d)$	$\frac{1}{2}d\cdot(2n-d-1)$	$\frac{d}{2}(2p+2q-d-1)$	$d(m+n-d-1)$	$d(2n-d)$
$M(d)$	—	0, для $d<d_{max}$; разм. использованного непр. антиэрм. предст. $o(m-n)$ или $u(p-q)$, для $d=d_{max}$		—

В разд. II.5 получен частный результат для алгебры $sp(2n-2s,2s)$, который соответствует случаю $d=d_{min}=1$ для ранее рассмотренных множеств, и снова используется локализация $W^1_{2(2n-1)}$. На основе этого результата и по аналогии с остальными простыми алгебрами можно ожидать, что существуют и "остальные" антиэрмитовы шуровские реализации $sp(2n-2s,2s)$, и что они будут лежать в $W^r_{2N,M}$.

Таким образом, $W^r_{2N,M}$ приобретает интересную универсальность для всех некомпактных простых алгебр Ли. В разд. II.6 решается вопрос о существовании антиэрмитовых шуровских реализаций в $W^r_{2N,M}$ для оставшихся пока в стороне компактных алгебр Ли. Получается, что за исключением антиэрмитовых матричных представлений, кратных неприводимому представлению, дальнейших таких реализаций компактных алгебр Ли в $W^r_{2N,M}$ не существует; этот результат является новым.

При анализе предыдущих результатов оказалось, что они существенно упрощаются и объединяются, если отбросить условие антиэрмитовости. Но тогда вещественность рассмотренной алгебры несущественна, и результаты лучше формулировать для алгебр комплексных.

В разд. III.I третьей части работы определяются множества реализаций всех классических комплексных алгебр Ли по тому же плану, что и для алгебр действительных. Реализации, опять шуровские, характеризуются сигнатурами, но, в отличие от случая действительных алгебр, все лежат в алгебре Вейля $W_{2N(d)}$. Как и раньше, число канонических пар $N(d)$ пробегает для каждой алгебры свое множество значений от $n_{min} \equiv N(1)$ до $n_{max} \equiv N(n)$:

Алгебра	A_n	B_n	C_n	D_n
$N(d)$, $d=1,\ldots,n$	$\frac{1}{2}d(2n-d+1)$	$d(2n-d)$	$d(2n-d)$	$d(2n-d-1)$

При этом для алгебр B_n, C_n, D_n n_{min} оказалось (за исключением алгебр самых низких размерностей) "на много" выше ранга алгебры (равного n), который служил нижней гранью для чисел канонических пар N таких, что могут существовать нетривиальные реализации этих алгебр в W'_{2N}. Для алгебр B_n $(n>2)$ и D_n $(n>3)$ удалось этот результат усилить и сдвинуть нижнюю грань к $2n-2$ для B_n и $2n-3$ для D_n, т.е., другими словами, доказать, что не существуют нетривиальные реализации B_n и D_n в W'_{2N}, если $N<2n-2$ или $N<2n-3$ соответственно. Этот новый результат был получен одновременно с Джозефом. Далее оказалось, что все реализации B_n и D_n в $W'_{2n_{min}}$ являются щуровскими и что значения операторов Казимира этих алгебр в любой реализации в W'_{2N}, $N<n_{min}$, "двузначно" зависят только от n.

Таким образом, n_{min} приобретает значение минимального числа канонических пар такого, что в $W'_{2n_{min}}$ допускается существование параметрического множества реализаций B_n и D_n, в которых значения операторов Казимира могут зависеть от этих параметров: предложенные в работе однопараметрические множества реализаций алгебр B_n и D_n в $W'_{2n_{min}}$ доказывают, что, действительно, эта возможность осуществляется.

Таков же результат и для алгебр C_n; минимальное число пар $n_{min}=2n-1$, с помощью которого построено однопараметрическое подмножество реализаций предложенного множества, обладает тем свойством, что параметрические множества реализаций C_n в W_{2n}, $N<n_{min}$, в которых значения операторов Казимира зависят от этих параметров, не существуют. При этом опять все реализации C_n в $W'_{2(2n-1)}$ щуровские. Эти результаты являются новыми и содержатся в разд. III.2.I.

С другой стороны, максимальное число канонических пар, с помощью которых построены (n -параметрические) подмножества реализаций из предложенных множеств, равно $n_{max}(L)$ $(L=A_n, B_n, C_n, D_n)$, оно получается подстановкой $d=n$ в $N(d)$ в предыдущей таблице. Число $n_{max}(L)$, для которого нетрудно получить соотношение $n_{max}(L) = \frac{1}{2}(\dim L - \mathrm{rang}\, L)$, совпадает с числом канонических пар, соответствующих алгебре L по известной, уже упомянутой, гипотезе или теореме И.М.Гельфанда и А.А.Кириллова. (Краткому изложению существа гипотезы посвящен разд.III.3).К тому же число независимых параметров в дискутируемом подмножестве реализаций совпадает с числом добавочных коммутирующих элементов, выступающих в гипотезе. В последнем разделе третьей части показано, что для алгебры A_n, для которой гипотеза доказана, такие реализации являются эндоморфным образом реализаций A_n, возникающих вследствие гипотезы Гельфанда-Кириллова (разд. III.4).Аналогичный результат можно ожидать и в случаях остальных классических алгебр Ли.

Таким образом, предложенные множества реализаций содержат: однопараметрические подмножества, построенные из минимального числа канонических пар, с помощью которого вообще можно построить однопараметрическое множество реализаций, и n-параметрические подмножества, потроенные из числа пар, отвечающего данной алгебре по гипотезе Гельфанда-Кириллова. Но кроме этих "экстремальных" случаев, определенные в работе множества реализаций классических алгебр содержат дальнейшие 2-, 3-, ..., $(n-1)$-параметрические подмножества реализаций в алгебре Вейля, построенных из возрастающего числа пар $N(2)$, ..., $N(n-1)$.

Последней частью работы является заключение, состоящее из четырех разделов, в которых намечены некоторые дальнейшие перспективы (в частном случае определяется, напр., сжатие реализаций) и приводится сводка основных результатов.

Результаты диссертации докладывались на семинарах и Международных конференциях в СССР, Болгарии, ГДР, ЧССР и были опубликованы в работах /I-II/.

Литература:

1. Havlíček M, Exner P., Ann.Inst. H.Poinc. 23A, 313 (1975).
2. Havlíček M., Exner P., Ann.Inst. H.Poinc. 23A, 335 (1975).
3. Havlíček M., Exner P., Czech.Journ.Phys. B28, 949 (1978).
4. Гавличек М., Экснер П., Матричные канонические реализации алгебр Ли группы $O(m,n)$. Труды IУ Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц, Варна, I974.
5. Havlíček M., Lassner W., Rep.Math.Phys. 8, 391 (1975).
6. Havlíček M., Lassner W., Rep.Math.Phys. 9, 45 (1976).
7. Havlíček M., Lassner W., Canonical Realization of the Lie Algebra $sp(2n,R)$. JINR, E2-9160, Dubna 1975. (Int. Journ. Theor. Phys. 15, 867, 1976).
8. Havlíček M., Lassner W., Rep.Math.Phys. 12, 1 (1977).
9. Havlíček M., Lassner W., On the "Near to Minimal" Canonical Realizations of the Lie Algebra C_n. JINR, E2-9161, Dubna 1975. (Int. Journ. Theor. Phys. 15, 877, 1976.
10. Exner P., Havlíček M., Lassner W. Czech.Journ.Phys. B26, 1213, 1976.
11. Экснер П., Гавличек М., Ласснер В. Канонические реализации классических алгебр Ли. I и II, ОИЯИ, Р2-I0263 и Р2-I0264, Дубна, I977.

Рукопись поступила в издательский отдел
II июля 1979 года.