ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2 - 12529

МИР-КАСИМОВ
Руфат Мир-Асадулла оглы

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С ПРОСТРАНСТВОМ ИМПУЛЬСОВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Специальность 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1979

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Д.А.Киржниц

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник А.Н.Лезнов

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент АН СССР Д.В.Ширков

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

Автореферат разослан " " ________ 1979 года.

Защита состоится " " ________ 1979 года на заседании специализированного Ученого совета ЛТФ ОИЯИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета Р.А. Асанов

Актуальность проблемы. Квантовая теория поля (КТП) возникла как обобщение квантовой механики на релятивистскую область. КТП представляет собой единственную логически последовательную схему описания релятивистских элементарных частиц, в которой учтены все основные физические требования/I-3/. Квантовая электродинамика, развитие идей динамических симметрий в физике частиц, единые теории электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий - примеры, иллюстрирующие роль КТП как основополагающего подхода. В то же время имеется ряд трудностей, не позволяющих считать КТП законченной физической теорией. Главная из них - ультрафиолетовые расходимости, дефект, присущий в том или ином виде всем известным формулировкам КТП. Ультрафиолетовые расходимости возникают как следствие неоднозначности используемого в КТП хронологического произведения операторов.

Почти одновременно с возникновением КТП возникла точка зрения, что избавить теорию от трудностей можно, лишь подвергнув серьезному пересмотру описание взаимодействий на малых расстояниях. В качестве меры малых масштабов пространства-времени был введен новый параметр – фундаментальная длина ℓ. По традиции теории, содержащие фундаментальную длину, называют нелокальными.

Можно различать два класса нелокальных теорий поля. Теории первого класса /4-8/ преследуют лишь одну цель: избавить КТП от ультрафиолетовых расходимостей. Предполагается, что частицы взаимодействуют не локально, а в некоторой области пространства-времени с конечными размерами порядка ℓ. В таких схемах геометрические свойства пространства-времени в любых масштабах, в том числе на расстояниях $\lesssim \ell$, остаются обычными, псевдоевклидовыми. Соответственно, все физические принципы, лежащие в основе локальной теории, переносятся в новую схему без каких-либо изменений. В силу этого нелокальные теории первого класса в определенном смысле являются феноменологическими, ибо конкретный вид нелокального взаимодействия должен определяться только из опытных данных.

Нелокальные теории второго класса исходят из убеждения о необходимости более глубокой трактовки вопроса. Сторонники этого подхода считают, что трудности теории связаны с чрезмерной прямолинейностью решения вопроса о распространении квантовых законов на релятивистскую область в рамках существующей КТП. Выдвигается гипотеза о том, что характер взаимодействия на малых пространственно-временных расстояниях меняется из-за того, что на этих расстояниях модифицируется сама геометрия пространства-времени /4,5,9-17/.

Роль, которая отводится в теориях второго класса фундаментальной длине ℓ, более универсальна. Она сравнима с ролью $\hbar$ и c – фундаментальных констант, определяющих квантовый и релятивистский характер теории.

С учетом сказанного ясна актуальность вопроса: существует ли непротиворечивая реализация аксиом КТП, в которой геометрия пространства-времени на малых расстояниях коренным образом отличается от псевдоевклидовой? Цель данной работы – дать утвердительный ответ на этот вопрос.

Научная новизна и практическая ценность

В диссертации построена схема, удовлетворяющая всем аксиомам КТП, расширение за массовую поверхность (МП) в которой происходит в импульсном пространстве постоянной кривизны. Радиус кривизны p -пространства равен $Mc = \frac{\hbar}{\ell}$. Изменение геометрии импульсного пространства требует введения нового конфигурационного ξ-представления, адекватного группе движения искривленного p-пространства. Сформулировано динамическое уравнение для тока, обобщающее условие причинности Боголюбова на случай новой КТП. Построена теория возмущений, что представляет собой нетривиальную проблему в рамках данного подхода. В новой КТП не возникает проблемы доопределения неоднозначных произведений сингулярных функций с совпадающими особенностями.

Все выражения новой КТП переходят в обычные, когда вкладом фундаментальной длины можно пренебречь. Это является выражением своеобразного принципа соответствия, выполняющегося в данной теории.

Непротиворечивая реализация системы аксиом КТП с фундаментальной длиной полезна по ряду соображений. Несомненно, новая схема может быть использована для изучения самой структуры КТП. В частности, может быть пролит свет на связь структуры сингулярных функций теории поля с геометрией пространства-времени.

Имеется и другой аспект /I6,I7/ гипотезы о фундаментальной длине, который следует рассмотреть независимо от формальной перестройки аппарата КТП. Существование непротиворечивой схемы, опирающейся на гипотезу о фундаментальной длине – весомый аргумент в пользу справедливости этой гипотезы. В области сверхвысоких энергий $(\gtrsim Mc^2)$ предсказания новой схемы существенно отличаются от тех, которые дает обычная КТП. Если новый подход окажется верным, то понимание явлений в этой области будет в принципе невозможно без учета роли фундаментальной длины. В этом смысле рассматриваемая теория может явиться теоретической основой физики сверхвысоких энергий.

Разумеется, подтвердить или опровергнуть гипотезу о существовании фундаментальной длины можно, лишь опираясь на экспериментальные данные, которых пока недостаточно. Согласно имеющимся оценкам /I6/, фундаментальная длина может быть обнаружена в измерениях при энергиях ускорителей следующего поколения (Серпухов, Батавия, ЦЕРН) или в точных измерениях электромагнитных характеристик частиц.

<u>Следующие основные результаты диссертации выдвигаются для защиты:</u>

I. Доказано, что гипотеза о неевклидовом характере геометрии импульсного пространства вне МП не противоречит аксиомам КТП и ведет к построению замкнутой схемы, представляющей собой альтернативу обычной КТП.

2. Сформулированы в явном виде ограничения, которым должна удовлетворять S-матрица, расширенная за МП в p-пространстве постоянной кривизны (пространстве де Ситтера). Условие трансляционной инвариантности формулируется в виде интегральных тождеств в импульсном пространстве.

3. Построены обобщения теории скалярного и спинорного полей в духе геометрии p-пространства де Ситтера.

4. Развита концепция конфигурационного ξ-пространства, адекватного неевклидову пространству импульсов. Новое ξ-представление канонически сопряжено искривленному p-пространству в смысле преобразования Фурье по полной системе матричных элементов унитарных неприводимых представлений группы движений пространства де Ситтера.

5. Показано, что ξ- пространство имеет "причинную" структуру, в нем есть аналоги пространственно-подобной и времени -подобной областей. Во времени-подобной области ξ-пространства существует дискретный инвариант - аналог знака времени. Аналог светового конуса, т.е. поверхности, на которой сосредоточены все сингулярности обычной КТП, отсутствует.

6. Понятие локальности обобщено на случай ξ -пространства. Вычислены перестановочная и другие сингулярные функции скалярного поля в ξ -пространстве и показано, что скалярное поле удовлетворяет новому условию локальности.

7. Введен локальный оператор тока и сформулировано динамическое уравнение для тока, обобщающее условие причинности.

8. Построена трансляционно-инвариантная теория возмущений с локальным в ξ-пространстве лагранжианом. Показано, что в рассматриваемом подходе не возникает неинтегрируемых произведений сингулярных функций.

9. Разработан квазипотенциальный подход с фундаментальной длиной, как пример динамического описания в трехмерном ξ-пространстве. На основе этого подхода сформулирован ряд методов, позволяющих производить расчеты приближенного и модельного характера: уравнение в терминах быстрот, релятивистский метод фазовых функций и др.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах ЛТФ ОИЯИ, ИФВЭ, ФИАН, МИАН, FNAL , MIT , CERN и на многочисленных всесоюзных и международных конференциях, семинарах, школах, в том числе на ХУП и ХУШ, XIX международных конференциях по физике высоких энергий (Лондон, 1974, Тбилиси, 1976, Токио 1978), на международных совещаниях по нелокальной теории поля (1967, 1970, 1973, 1976, 1979 гг.), на Международной конференции по математическим методам в квантовой теории поля и статистике (Москва, 1973), на международном семинаре по проблемам физики высоких энергий и теории поля (Серпухов, 1978).

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и трех приложений.

Во введении изложены общая постановка проблемы и краткое содержание диссертации.

В главе I дан анализ аксиом КТП. В рамках аксиоматического подхода к КТП /I-3/ существенным моментом является расширение различных теоретико-полевых объектов за МП. При этом предполагается, что 4-импульсы, от которых зависят поля и другие величины вне МП, являются произвольными векторами пространства Минковского. Однако это предположение не следует из общих принципов КТП, и, по сути дела, является дополнительным постулатом.

Формулируется гипотеза, играющая ключевую роль во всем рассматриваемом подходе: 4-импульсы вне МП принадлежат не псевдоевклидову пространству импульсов, а пространству импульсов постоянной кривизны. Возможны два варианта таких пространств (пространств де Ситтера), реализующиеся на гиперболоидах, вложенных в 5-мерное пространство

$$p_0^2 - \vec{p}^{\,2} + M^2c^2 p_4^2 = M^2c^2 \qquad (1)$$

$$p_0^2 - \vec{p}^{\,2} - M^2c^2 p_4^2 = -M^2c^2. \qquad (2)$$

Величина M называется фундаментальной массой. В данном подходе естественной является система единиц, основанная на фундаментальных константах

$$\hbar = c = \ell = M = 1. \qquad (3)$$

В "плоском" пределе, т.е. когда

$$|p_\mu| \ll 1 , \quad p_4 \simeq 1 \quad (\mu = 0,1,2,3) \qquad (4)$$

или формально $\ell \to 0$, все соотношения де-ситтеровской геометрии переходят в соотношения псевдоевклидовой геометрии и все эффекты, связанные с фундаментальной длиной, исчезают. МП может быть вложена в любое из пространств (I) или (2). В случае пространства (I) при этом должно соблюдаться дополнительное ограничение

$$m^2 \le 1. \qquad (5)$$

Далее показано, что требования Пуанкаре-инвариантности, унитарности, спектральности, полноты системы асимптотических состояний не противоречат расширению за МП в неевклидовом импульсном 4-пространстве. Особого анализа требует условие трансляционной инвариантности, т.е. инвариантности относительно преобразований

$$x_\mu \to x_\mu + a_\mu. \qquad (6)$$

В нашем подходе это условие формулируется в виде интегральных тождеств для коэффициентных функций S-матрицы в p-пространстве. Данные тождества легко обобщаются на неевклидов случай.

В §2 приводятся сведения о геометрии p-пространства постоянной кривизны. Дана физическая интерпретация некоторых величин, связанных с группой движений импульсного пространства, и сводка важнейших формул. В последующих двух параграфах даны обобщения теории свободных скалярного и спинорного полей в духе геометрии p-пространства де-Ситтера. Показано, что при анализе полей в искривленном p-пространстве оказывается существенной зависимость от дополнительной 5-й компоненты импульса p_4.

В случае (2) скалярное поле $\varphi(p, p_4)$ с массой m в p-представлении удовлетворяет следующему "уравнению Клейна-Гордона"

$$2(m_4 - p_4)\varphi(p, p_4) = 0, \qquad (7)$$

где $m_4 = \sqrt{1+m^2}$. Решение уравнения (7) содержит фактор $\delta(p^2 - m^2)$, т.е. находится на массовой поверхности. В "плоском пределе" $\ell \to 0$ уравнение (7) переходит в обычное уравнение Клейна-Гордона.

Пятый параграф является ключевым для первой главы и содержит доказательство справедливости аксиом КТП в неевклидовом p-пространстве. Он содержит явные соотношения, выражающие органичения, которым должна удовлетворять S-матрица при новом расширении.

<u>Глава II</u> целиком посвящена развитию концепции нового конфигурационного ξ-представления. Дана физическая интерпретация интервала (собственного времени) и плоской волны в обычной теории как собственного значения и собственной функции оператора Казимира группы движений импульсного пространства

$$\left(i\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)^2 e^{ipx} = x^2 e^{ipx} = \sigma^2 e^{ipx} \qquad (8)$$

для случая унитарных представлений. Такая интепретация позволяет обобщить понятие интервала и плоской волны на случай p-пространства постоянной кривизны в виде

$$\frac{1}{2} M_{KL} M^{KL} \langle \xi | p \rangle = \sigma(\sigma+3) \langle \xi | p \rangle, \qquad (9)$$

где M_{KL} – генераторы группы де-Ситтера, σ – обобщенный интервал, ξ – набор 4 переменных (в который входит интервал), являющийся "точкой" ξ-пространства. Для унитарных представлений новые "плоские" волны $\langle \xi | p \rangle$ образуют полный ортогональный базис. Величины $\langle \xi | p \rangle$, в отличие от обычных плоских волн, сингулярные функции, требующие регуляризации (ср. /18/). Преобразование Фурье на функциях $\langle \xi | p \rangle$ позволяет перейти в новое конфигурационное ξ-представление.

Во второй главе приведено большое количество результатов математического характера, необходимых для конкретных теоретико-полевых расчетов. Формулы, отвечающие вариантам p-пространств (I) и (2), сильно отличаются друг от друга и требуют независимого изучения, хотя принципиальная основа понятия ξ-пространства для обоих случаев одна и та же.

Наиболее важным моментом является то, что ξ-пространство обладает "причинной структурой". Например, в случае ξ-пространства (2) спектр нового интервала σ имеет для унитарных представлений вид

$$\sigma = \begin{cases} i\Lambda - 3/2 \quad 0 < \Lambda < \infty & \text{непрерывная серия времени-подобная область } \xi\text{-пространства} \\ L = -1, 0, 1, 2, \ldots & \text{дискретная серия пространственно-подобная область } \xi\text{-пространства.} \end{cases} \qquad (10)$$

В непрерывной времени-подобной Λ-серии существует дополнительный дискретный инвариант, который совпадает со знаком переменной, играющей здесь роль времени. В обычной теории значение интервала $\sigma = 0$ отвечает световому конусу, т.е. поверхности, отделяющей друг от друга времени-подобную и пространственно-подобную области конфигурационного X -пространства. На световом конусе сосредоточены особенности сингулярных функций обычной КТП. В случае ξ -пространства две части спектра интервала разделены конечным промежутком, т.е. аналог светового конуса здесь отсутствует.

В главе Ш дан анализ полей в конфигурационном ξ -представлении, построено обобщение условия причинности Боголюбова и развита теория возмущений.

В §10 рассмотрена теория скалярного поля в ξ -пространстве. Существенно, что гипотеза о неевклидовой геометрии p -пространства и условие трансляционной инвариантности теории (см. (6)) приводят к билокальной зависимости (ср. /4/) скалярного поля φ :

$$\varphi_x(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \langle \xi | p \rangle \, \varphi(p, p_4) \, d\Omega_p , \tag{11}$$

где $\varphi(p,p_4)$ - поле в p -пространстве де-Ситтера, вообще говоря, вне МП ,

$$d\Omega_p = \frac{d^4 p}{|p_4|} \tag{12}$$

элемент объема. Переменные x и ξ имеют различную природу. Лишь в "плоском пределе" $l \to 0$ разница между ними исчезает

$$\varphi_x(\xi) \to \varphi(x+\xi). \tag{13}$$

При преобразованиях трансляций имеем:

$$\varphi_x(\xi) \to e^{i\hat{P}a} \varphi_x(\xi) e^{-i\hat{P}a} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \langle \xi | p \rangle e^{i\hat{P}a} \varphi(p,p_4) e^{-i\hat{P}a} d\Omega_p = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \langle \xi | p \rangle e^{ipa} \varphi(p,p_4) d\Omega_p = \varphi_{x+a}(\xi),$$

где $\hat{P}$ - оператор энергии-импульса.

Коммутатор скалярного поля в случае (2) имеет вид

$$[\varphi_x(\xi), \varphi_x(0)] \equiv \frac{1}{i} \mathcal{D}(\xi) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \xi | p \rangle \varepsilon(p_0) \delta(2p_4 - 2m_4) d\Omega_p =$$

$$= \begin{cases} \varepsilon(\xi^0) \dfrac{2\sqrt{m}}{(2\pi)^{3/2}} \Gamma(i\lambda - \tfrac{1}{2}) e^{-\pi\lambda} \operatorname{sh} \pi\lambda \cdot Q_{1/2}^{-i\lambda}\left(\dfrac{m_4}{m}\right) - \\ \quad - \text{во времени-подобной } \Lambda \text{ -области;} \\ 0 \ - \text{в пространственно-подобной } L \text{-области.} \end{cases} \tag{15}$$

Здесь $\varepsilon(\xi^0)$ - знаковая функция, аналог $\varepsilon(x^0)$ в обычной теории; $Q_{1/2}^{-i\lambda}$ - функция Лежандра П рода. В "плоском пределе" (15) переходит в обычную $\mathcal{D}$ -функцию скалярного поля.

Поскольку ξ инвариантна относительно преобразований трансляции (6), а перестановочная $\mathcal{D}$ -функция (равно как и другие сингулярные функции скалярного поля) не зависит от x, переменную ξ можно рассматривать как аналог относительной координаты $x_1 - x_2$.

Обращение коммутатора полей в нуль в пространственно-подобной области ξ-пространства есть новое условие локальности.

Вводится локальный в новом смысле оператор тока $j_x(\xi)$ и постулируется для него уравнение, обобщающее условие причинности

$$\frac{\delta j_x(\xi)}{\delta \varphi_x(0)} = \vartheta(-\xi^0) [j_x(\xi), j_x(0)] + \Lambda_x(\xi), \tag{16}$$

где $\vartheta(\xi^0)$ - ступенчатая функция обобщенного времени, $\Lambda_x(\xi)$- квазилокальный оператор.

Для построения трансляционно-инвариантной теории возмущений вводится функция включения $g_x(\xi)$ с билокальной зависимостью. Получающееся разложение по степеням константы связи удовлетворяет всем требованиям КТП. Поскольку сингулярные функции имеют единственную особенность - простой полюс в комплексной плоскости интервала, а интегрирование по интервалу в ξ -пространстве содержит рецепт обхода этой особенности, то проблема доопределения произведений сингулярных функций не возникает.

В главе IУ рассмотрен ряд вопросов, связанных с квазипотенциальным уравнением /19-22/. Исторически концепция ξ -пространства, точнее, его трехмерный вариант /22/, впервые была рассмотрена на примере квазипотенциального подхода. В диссертации дан вывод квазипотенциальных уравнений, содержащих фундаментальную длину. Рассмотрены различные методы в рамках квазипотенциального подхода с длиной: уравнение в терминах быстрот, релятивистский метод фазовых функций и др.

В трех приложениях описаны применения рассмотренных в диссертации физических концепций и методов к описанию спектра масс ядер, спектра масс векторных мезонов, данных по протон-протонному рассеянию.

Результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Р.М.Мир-Касимов. ЖЭТФ, 49, 905, 1965.
2. Р.М.Мир-Касимов. ЖЭТФ, 49, 1161, 1965.
3. Р.М.Мир-Касимов. ЖЭТФ, 52, 533, 1967.
4. Р.М.Мир-Касимов. в сб. Международная школа по физике высоких энергий (Гомель, 1973), ОИЯИ, Р1,2-7642, Дубна, 1973.
5. А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов. Болгарский физический журнал, 1, 58, 1974.
6. А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов. Болгарский физический журнал, 1, 150, 1974.
7. А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов. Болгарский физический журнал, 1, 233, 1974.
8. А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов. Болгарский физический журнал, 2, 3, 1975.

9. А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов. Труды Математического института имени В.А.Стеклова, т. СХХХУI, Москва, Наука, 1975.
10. А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов. в сб. "Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории поля", ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
11. R.M.Mir-Kasimov, I.P.Volobujev. Acta Physica Polonica, B9, No. 2, 1978.
12. R.M.Mir-Kasimov. Preprint JINR, E2-11893, Dubna, 1978.
13. V.V.Babikov, R.M.Mir-Kasimov. Phys.Lett., 31B, 415, 1970.
14. В.В.Бабиков, Г.В.Груша, Р.М.Мир-Касимов, Н.Ш.Шульгина. ТМФ, 17, 391, 1973.
15. И.В.Амирханов, Г.В.Груша, Р.М.Мир-Касимов. ТМФ, 30, 333, 1977.
16. R.M.Mir-Kasimov. Proceedings of XVIII Int. Conf. on High Energy Phys. (Tbilisi - 1976), JINR, D1,2-10400, Dubna, 1977.
17. И.В.Амирханов, Г.В.Груша, Р.М.Мир-Касимов. ЯФ, 26, 207, 1977.
18. И.В.Амирханов, Г.В.Груша, Р.М.Мир-Касимов. ТМФ, 36, 42, 1978.

Цитируемая литература

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Москва, Наука, 1976.
2. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. Москва, Наука, 1969.
3. Н.Н.Боголюбов, Т.В.Медведев, М.К.Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Москва, Физматгиз, 1958.
4. М.А.Марков. Гипероны и K -мезоны. Москва, Физматгиз, 1958.
5. Д.И.Блохинцев. Пространство и время в микромире. Москва, Наука, 1070.
6. Д.А.Киржниц. УФН, 90, 129, 1966.
7. В.Я.Файнберг. Статья в сб. "Проблемы теоретической физики", посвященном памяти И.Е.Тамма. Москва, Наука, 1972.
8. Г.В.Ефимов. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. Москва, Наука, 1977.

9. H.Snyder. Phys.Rev., 71, 38, 1947; 72, 68, 1947.
10. C.N.Yang. Phys.Rev. 72, 874, 1947.
11. Ю.А.Гольфанд. ЖЭТФ, 43, 256, 1962; 44, 1249, 1963.
12. В.Г.Кадышевский. ДАН СССР, 147, 588, 1336, 1962.
13. И.Е.Тамм. Труды XII Международной конференции по физике высоких энергий, т. II, Атомиздат, 1964; Proc. Intern. Conf. on Elementary Particles, Kyoto, 1965.
14. А.Н.Лезнов. Труды Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля, ОИЯИ, Р2-3590, Дубна, 1967.
15. S.Fubini. Proc. of XVII. Int. Conf. on High Energy Phys. London 1974.
16. A.D.Donkov, V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov. Proceedings of XVIII and XIX Conf. on High Energy Phys. (Tbilisi 1976, Tokyo 1978).
17. V.G.Kadyshevsky. Preprint Fermilab Pub. 72/22,THY,1978.
18. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Москва, Физматгиз, 1962.
19. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cimento,29,380,1963.
20. V.G.Kadyshevsky. Nucl.Phys., B6,125, 1968. V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev.Nuovo Cimento. 55A, 275, 1967.
21. В.Г.Кадышевский, А.Н.Тавхелидзе. в сб. "Проблемы теоретической физики", посвященном Н.Н.Боголюбову в связи с его 60-летием, Москва, Наука, 1969.
22. V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov, N.B.Skachkov. Nuovo Cimento, 55A, 237, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел 8 июня 1979 г.