ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2 - 10594

РУМЯНЦЕВА
Елена Николаевна

КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА БЕЗМАССОВЫХ ЧАСТИЦ В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ ФРИДМАНА

Специальность 01.04.02 - теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна, 1977

Работа выполнепа в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук профессор Н.Н.БОГОЛЮБОВ (мл.)

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук А.Н.ЛЕЗНОВ

кандидат физико-математических наук А.С.ШУМОВСКИЙ

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Казанский государственный университет.

Автореферат разослан " " ____________ 1977 года.

Защита диссертации состоится " " __________ 1977 года на заседании Специализированного ученого совета К-56 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета В.И.ЖУРАВЛЕВ

Применение квантовой статистики к изучению вещества в нерелятивистских условиях приводит, как известно, к объяснению таких важных явлений, как сверхтекучесть и сверхпроводимость /1/. Имеются все основания ожидать большую пользу и от введения постоянной Планка в общую теорию относительности /2,3,4/. В исследованиях же, посвященных поведению вещества в гравитационных полях, ограничиваются классическим рассмотрением. Диктуется это тем, что квантовый подход к проблеме поведения вещества в условиях римановой геометрии мира оказывается затруднительным. Поэтому весьма актуальной и важной является такая задача, в которой удалось бы последовательно с физической точки зрения и вместе с тем строго математически объединить идеи квантовой статистики с идеями общей теории относительности. Задача такого рода как раз и рассмотрена в реферируемой диссертации, а именно: в диссертации поставлена и решена самосогласованная задача о поведении квантового газа безмассовых частиц в гравитационном поле, создаваемом этим же газом.

Постановка такой задачи стала возможной после того, как в работах /5,6,7/ была построена квантовая теория скалярного, спинорного и электромагнитного полей на фоне римановых миров. Решение этой задачи получено в виде сферической метрики Фридмана. Показано, как радиус мира зависит от фундаментальных физических констант. Новым и интересным результатом является то, что в эту зависимость входит постоянная Планка $\hbar$.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Во введении дан краткий обзор рассматриваемой проблемы и полученных результатов. Во всех трех главах решаются уравнения Эйнштейна

$$R'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R' g'_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi\gamma}{c^3} T'_{\alpha\beta}, \qquad (1)$$

где $T'_{\alpha\beta}$ - тензор энергии-импульса газа безмассовых частиц, причем в первой главе рассматриваются скалярные частицы, во-второй - нейтрино, в третьей - фотоны.

При решении уравнения (I) наряду с искомой метрикой $ds'^2 = g'_{\alpha\beta}(x)\,dx^\alpha dx^\beta$ удобно рассматривать вспомогательную метрику $ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\,dx^\alpha dx^\beta$, такую, что

$$g'_{\alpha\beta}(x) = B^2(x)\,g_{\alpha\beta}(x), \qquad (2)$$

где $B(x)$ – некоторая скалярная функция.

Поскольку рассматриваются безмассовые частицы, след тензора энергии-импульса равняется нулю. Согласно уравнению (I), получаем

$$R' = 0. \qquad (3)$$

В связи с этим в диссертации указан общий способ решения нелинейного уравнения (3). Решение уравнения (3) ищем в виде (2), где $g_{\alpha\beta}(x)$ – произвольное тензорное поле. Отсюда находим, что $B(x)$ удовлетворяет следующему линейному уравнению

$$\Box B + \frac{1}{6} R B = 0. \qquad (4)$$

Чтобы получить сферическую метрику Фридмана ds'^2, полагаем

$$ds^2 = r^2\Big[d\tau^2 - \sum_{i,k=1}^{3} \omega_{ik}(\xi^1 \xi^2 \xi^3)\, d\xi^i d\xi^k\Big], \qquad (5)$$

где τ – временная координата, ξ^1, ξ^2, ξ^3 – координаты на единичной трехмерной сфере, $r = const$ – радиус сферы. Согласно уравнению (4), получаем $B = \cos\tau$. В таком случае уравнения (I) означают

$$\frac{8\pi\gamma}{c^3} T'_{00}\cos^2\tau = 3, \quad T'_{0k} = 0, \qquad (6)$$
$$\frac{8\pi\gamma}{c^3} T'_{ik}\cos^2\tau = \omega_{ik}.$$

Основная трудность, преодоленная в диссертации, состояла в доказательстве того, что эти условия удовлетворяются.

Доказательство основывается на принципе конформной инвариантности поведения безмассовых частиц, обоснованном в работах /5,8/. Согласно этому принципу, если два мира, один из которых статический, находятся в конформном соответствии (2), то операторные тензоры энергии-импульса безмассовых полей связаны соотношением

$$B^2 \hat{T}'_{\alpha\beta} = \hat{T}_{\alpha\beta}, \qquad (7)$$

тогда как операторы энергии и числа частиц совпадают:

$$\hat{H}' = \hat{H}; \quad \hat{N}' = \hat{N}. \qquad (8)$$

Тензор энергии-импульса газа выражается как статистическое среднее от тензора энергии-импульса поля

$$T_{\alpha\beta}(x) = \langle :\hat{T}_{\alpha\beta}(x): \rangle. \qquad (9)$$

Двоеточие, как обычно, означает нормальное произведение операторов рождения и уничтожения частиц. Знаком $\langle\ \rangle$ для любого оператора $\hat{A}$ обозначается

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{Sp\,\hat{A}\exp\left\{-\frac{\hat{H}-\mu\hat{N}}{\Theta}\right\}}{Sp\,\exp\left\{-\frac{\hat{H}-\mu\hat{N}}{\Theta}\right\}}. \qquad (10)$$

Здесь μ – глобальный химический потенциал, Θ – глобальная температура газа /9/, причем $\mu' = \mu$, $\Theta' = \Theta$; $\hat{H}$, $\hat{N}$ – операторы (8). Следовательно, тем самым достигается конформная инвариантность статистического усреднения, и в силу (7),

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{1}{\cos^2\tau} T_{\alpha\beta}. \qquad (11)$$

Значит (ом. 6), остается доказать, что

$$\frac{8\pi\gamma}{c^3} T_{00} = 3, \quad T_{0k} = 0, \quad \frac{8\pi\gamma}{c^3} T_{ik} = \omega_{ik}, \qquad (12)$$

где $T_{\alpha\beta}$ есть (9) для мира с метрикой (5).

В первой главе рассматривается скалярный случай. Оператор поля ϕ подчиняется конформно-инвариантному уравнению

$$\Box\phi + \frac{1}{6}R\phi = 0 . \tag{13}$$

Тензор энергии-импульса поля равняется

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = \hat{T}^{can}_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}(R_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\nabla_\beta - g_{\alpha\beta}\Box)\phi^2 ,$$

где

$$\hat{T}^{can}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\phi_\alpha\phi_\beta + \phi_\beta\phi_\alpha) - \frac{1}{4}\Box\phi^2 g_{\alpha\beta} .$$

Здесь же, в первом параграфе, приведены и другие основные положения квантовой теории безмассового скалярного поля.

Во втором параграфе приводится построение квантовой теории безмассового скалярного поля в сферическом статическом мире в произвольных однородных координатах. В результате проведенного квантования получены операторы рождения и уничтожения частиц, оператор энергии $\hat{H}$, оператор числа частиц $\hat{N}$.

В третьем параграфе поставлена вышеупомянутая задача – удовлетворить уравнениям Эйнштейна (I) и получены условия (I2). Четвертый параграф посвящен проверке этих условий. Прежде всего вычислены средние от произведений операторов рождения и уничтожения частиц. Средние от них имеют вид, обычный для статистики Бозе-газа /I/, поскольку основные принципы квантовой статистики оказалось возможным перенести в мир Фридмана без изменений. Здесь же получены выражения для числа частиц N и энергии E газа.

Для проверки условий на тензор энергии-импульса здесь строится и вычисляется двухточечная функция

$$\langle :\phi(M)\phi(N): \rangle = \frac{\hbar}{2\pi^2 r^2}\sum_{q=1}^{\infty}\Lambda_q \frac{\sin q\gamma}{\sin\gamma}\cos q(\tau_1 - \tau_2) ,$$

$$\Lambda_q = \left[\exp\frac{1}{\Theta}\left(\frac{\hbar c q}{r} - \mu\right) - 1\right]^{-1} , \tag{14}$$

где M и N – мировые точки с координатами $\tau_1\xi^1_1\xi^2_1\xi^3_1$ и $\tau_2\xi^1_2\xi^2_2\xi^3_2$, γ – расстояние (угол) между точками M и N на сфере S_3. С помощью этой функции доказывается, что условия (I2) выполняются при выполнении единственного условия для квадрата радиуса, входящего в формулу (5).

В пятом параграфе, носящем методический характер, та же самая задача решается в бисферических координатах, поскольку во второй и в третьей главах в этих координатах исследуются нейтринный и фотонный газы. При этом мы широко пользовались специальными функциями $P^{e}_{mn}(z)$, соотношения для которых приведены в /I0/.

В заключение обзора первой главы отметим, что полевое уравнение (I3) совпадает с уравнением (4).

Во второй главе рассматривается нейтринный газ. При рассмотрении спинорных полей в римановой геометрии оказывается необходимым ортонормированный репер /II/, поэтому в первом параграфе приводятся основные положения метода ортогонального репера. Во втором параграфе изложены основные положения квантовой теории спинорного поля в римановых мирах. Полевым уравнением в этом случае является уравнение Дирака. В третьем параграфе получено решение уравнения Дирака в сферическом статическом мире. На основе этого решения определены операторы рождения и уничтожения частиц, гамильтониан $\hat{H}$ и оператор числа частиц $\hat{N}$. В четвертом параграфе доказывается выполнимость условий (I2), которые в случае ортогонального репера имеют следующий вид:

$$\frac{8\pi\gamma r^2}{c^3}T_{00} = 3 , \quad T_{0k} = 0 , \quad \frac{8\pi\gamma r^2}{c^3}T_{ik} = \delta_{ik} .$$

Средние от произведений операторов рождения и уничтожения частиц здесь имеют обычный вид для статистики Ферми /I/. Получены выражения для энергии E и числа частиц N нейтринного газа. Уравнения Эйнштейна накладывают единственное условие на квадрат радиуса r.

В третьей главе рассматривается фотонный газ. В первом параграфе изложены основы квантовой теории электромагнитного поля в римановых мирах. Во втором параграфе рассматривается частный случай – статический сферический мир. Приведены операторы рождения и уничтожения фотонов, гамильтониан H и оператор числа частиц $\hat{N}$. В третьем параграфе вычислены статистические средние от произведений операторных векторов напряженностей электрического E_i и магнитного H_i полей, с использованием решения уравнений Максвелла в статическом сферическом мире /I2/:

$$<:E_i H_k:> = 0,$$

$$<:H_i H_k:> = <:E_i E_k:> = \frac{\hbar}{3\pi^2}\,\omega_{ik}\sum_{p=2}^{\infty}(p-1)p(p+1)\Lambda_p$$

С их помощью доказано, что условия (I2) удовлетворяются. Получены выражения для энергии и числа частиц фотонного газа. Так же, как в скалярном и спинорном случаях, уравнения Эйнштейна накладывают на квадрат радиуса мира r единственное условие.

В заключении отмечено, что все построение проведено в соответствии с общими принципами квантовой статистики /I/. Также отмечено соответствие с ранее полученными результатами классического рассмотрения газов в мире Фридмана.

Наконец, указаны общие для всех трех случаев формулы для энергии и числа частиц газа, для квадрата радиуса мира r:

$$E_s = \frac{\hbar c}{r}\, t_s \sum_{q=s+1}^{\infty}(q-s)q(q+s)\Lambda_q\,;$$

$$N_s = t_s \sum_{q=s+1}^{\infty}(q-s)(q+s)\Lambda_q\,,$$

$$r^2 = \frac{4\hbar\gamma}{3\pi c^3}\, t_s \sum_{q=s+1}^{\infty}(q-s)q(q+s)\Lambda_q\,, \qquad (I5)$$

где S – спин частиц, Λ_q есть (I4) в случае бозонов. В случае нейтрино

$$\Lambda_q = \left[\exp\frac{1}{\Theta}\left(\frac{cq\hbar}{r}-\mu\right)+1\right]^{-1}.$$

Для скалярных частиц $S=0$, $t_0=1$.
Для нейтрино $S=\frac{1}{2}$, $t_{\frac{1}{2}}=4$.
Для фотонов $S=1$, $t_1=2$.

Таким образом, в этих формулах видна явная зависимость от спина S. Отметим, что в формуле (I5) мы автоматически получили комбинацию $\frac{2\hbar\gamma}{c^3}$ – квадрат планковской длины.

Результаты, полученные в диссертации, могут оказаться полезными при детальном изучении эволюции Вселенной.

Работы, на основе которых написана диссертация, докладывались в ЛТФ ОИЯИ, во ВНИИФТРИ, а также на IУ Советской гравитационной конференции и опубликованы в следующих работах:

I. Е.Н.Черникова (Румянцева). В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып. 6, М., Атомиздат, 1975. Препринт ОИЯИ, Р2-7708, Дубна, 1974.
2. Е.Н.Румянцева. ТМФ, 27, 2, 190–195, 1976. Препринт ОИЯИ, Р2-9169, Дубна, 1975.
3. Е.Н.Румянцева. ТМФ, 28, 3, 4II–4I6, 1976. Препринт ОИЯИ, Р2-9300, Дубна, 1975.
4. Е.Н.Румянцева. В сб. научных трудов ИФ АН БССР "Классическая и квантовая теория гравитации", Минск, 1976.
5. Е.Н.Румянцева. Препринт ОИЯИ, Р2-9888, Дубна, 1976.

Л и т е р а т у р а

I. Н.Н.Боголюбов. Избранные труды. т. 2, стр. 287-493, т. 3, Киев, Наукова Думка, 1970.
2. М.А.Марков. "Проблемы теоретической физики", сб., посвященный Н.Н.Боголюбову в связи с его шестидесятилетием. М., Наука, 1976.
3. К.П.Станюкович. Гравитационное поле и элементарные частицы, М., Наука, 1965.
4. Д.И.Блохинцев. Пространство и время в микромире., М., Наука, 1970.
5. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov, Ann. Inst. Henri Poincare, 9 109-141, 1968.
6. Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6109, Дубна,1971.
7. А.Б.Пестов, Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. ТМФ, 23, 3, 1975.
8. Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып. 5, Атомиздат, 1974.
9. N.A.Chernikov, Acta. Phys.Pol. XXV1, 1069, 1964.
IO. Н.Я.Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп, М., Наука, 1965.
II. V.Fock, D.Ivanenko. Z. Phys. 54, 798, 1928.
I2. А.Б.Пестов. В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып. 7, М., Атомиздат,1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1977 года