

К-93

27/II-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

1956



В.С. Курбатов, Г.А. Ососков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО
К АНАЛИЗУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ
В МНОГОЧАСТИЧНЫХ РАСПАДАХ

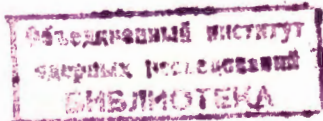
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1965

1956

В.С. Курбатов, Г.А. Ососков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО
К АНАЛИЗУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ
В МНОГОЧАСТИЧНЫХ РАСПАДАХ



2965 / 15065

Экспериментальные данные о многочастичных распадах состоят из гистограмм, дающих нам сведения об энергетических и угловых распределениях вторичных частиц.

Анализ экспериментальных данных обычно имеет целью проверку теоретических моделей распада. При этом необходим учет особенностей эксперимента: геометрия камеры, эффективность просмотра снимков и т.д.

Аналитические подсчеты различных распределений с учетом геометрии камеры и других особенностей опыта приводят к вычислению многократных интегралов с числом переменных 6-10 и более в очень сложных пределах. Поэтому при решении подобных задач традиционным стало применение метода статистических испытаний (Монте-Карло)^{/1/}.

В настоящей работе излагается методика расчетов энергетических и угловых распределений в многочастичных распадах. Такого рода изложение удобнее всего вести на конкретном примере, в качестве которого взято исследование трехчастичных лептонных распадов K^+ -мезонов.

Выбор примера не случаен, так как трехчастичные распады более вероятны и исследуются гораздо чаще, чем распады с большим числом вторичных частиц, хотя в принципе изложенная методика допускает несложное обобщение на случай большего числа частиц.

Точно так же сравнительная простота условий эксперимента (по сравнению, например, с камерой Вильсона, где встают вопросы идентификации распадов и учета неоднородного магнитного поля) позволяет упростить изложение сути метода моделирования, поняв которую нетрудно продумать детализацию и возможные осложнения моделирования.

Как известно^{/2/}, гамильтониан слабого взаимодействия в общем случае содержит векторный (V), скалярный (S) и тензорный (T) члены. Экспериментальное определение варианта слабого взаимодействия^{/3/} может быть произведено при изучении трехчастичных лептонных распадов K^+ -мезонов.

$$K_{u_3} \rightarrow \mu^+ + \pi^0 + \nu \quad (1)$$

$$K_{e_3} \rightarrow e^+ + \pi^0 + \nu \quad (2)$$

Для решения вопроса о варианте слабого взаимодействия в данной задаче можно использовать следующие энергетические и угловые распределения:

1. энергетический спектр μ^+ -мезонов из (1);
2. распределение углов разлета γ -квантов от π^0 -мезона в (1) и (2) каналах распада;
3. энергетический спектр π^0 -мезонов в (1).
4. распределение углов γ -квант-лептон $(\gamma, \mu^+), (\gamma e^+)$.

Для анализа необходимо теоретические распределения 1-4, рассчитанные соответственно для V, S и T-вариантов взаимодействия, исправить с учетом геометрии опыта и сравнить с экспериментальными гистограммами тех же распределений.

Распады K^+ -мезонов детектировались в 30-литровой ксеноновой пузырьковой камере ОИЯИ. Эффективная область камеры, в которой производилось детектирование событий, представляла собой объем, ограниченный шестью плоскостями (неправильную усеченную пирамиду):

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (i = \bar{1,6}). \quad (3)$$

Значения коэффициентов A_i, B_i, C_i и D_i приведены в таблице 1. Для регистрации распада $K_{u_3}^+(K_{e_3}^+)$ необходима остановка в камере $\mu^+(e^+)$ и конверсия в камере хотя бы одного γ -кванта в том же акте распада.

II.

Геометрия камеры может существенно повлиять на вид распределений 1-4. Использование метода Монте-Карло для учета этого влияния потребует введения ряда обозначений и масштабов, чтобы избежать переполнения при расчетах на ЭВМ.

m_k, m_μ, m_π - массы соответственно K^+, μ^+ и π^0 -мезонов,
 E_μ, E_π - энергии μ^+ и π^0 -мезонов;
 W_μ, W_π - максимальные энергии μ^+ и π^0 -мезонов соответственно, т.е.

$$W_\mu = \frac{m_k^2 + m_\mu^2 - m_\pi^2}{2m_k}, \quad W_\pi = \frac{m_k^2 + m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_k}. \quad (4)$$

Обозначим также константы

$$a = \frac{m_\mu}{m_k}, \quad b = \frac{m_\mu}{W_\mu}, \quad c = \frac{m_k}{W_\mu}, \quad d = \frac{m_\pi}{W_\mu}, \quad \ell = \frac{W_\pi}{W_\mu} \quad (5)$$

и переменные величины (энергии μ^+ и π^0 -мезонов в относительных единицах)

$$\xi = \frac{E_\mu}{W_\mu}, \quad \eta = \frac{E_\pi}{W_\mu}. \quad (6)$$

С помощью известной методики /5/ могут быть получены формулы совместной плотности вероятности распределения энергий μ^+ и π^0 -мезонов для V-, S- и T-вариантов взаимодействия соответственно.

V-вариант:

$$P_V(\xi, \eta, \epsilon) = \frac{1}{I_V(\epsilon)} \sum_{k=0}^2 f_k(\xi, \eta) \cdot \epsilon^k. \quad (7)$$

Здесь $\epsilon = \frac{f_-}{f_+}$ - отношение формфакторов, входящих в гамильтониан слабого взаимодействия (1), коэффициенты $f_k(\xi, \eta)$ имеют вид (см. обозначения (5,6)).

$$f_0(\xi, \eta) = [(8\xi - 4ab)(c - \xi - \eta) - c(\ell - \eta)(4 - a^2)],$$

$$f_1(\xi, \eta) = 2ab(2c - 2\xi - \eta - \ell) \quad (7a)$$

$$f_2(\xi, \eta) = ab(\ell - \eta).$$

Нормировочный множитель $I_V(\epsilon)$ определяется интегрированием

$$I_V(\epsilon) = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} d\xi \int_{\eta_{\min}(\xi)}^{\eta_{\max}(\xi)} \sum_{k=0}^2 \epsilon^k \cdot f_k(\xi, \eta) d\eta, \quad (7b)$$

где: $\xi_{\min} = b$, $\xi_{\max} = 1$

$$\eta_{\min}(\xi) = \frac{(c - \xi - \sqrt{\xi^2 - b^2}) + d^2}{2(c - \xi - \sqrt{\xi^2 - b^2})} \quad (8)$$

$$\eta_{\max}(\xi) = \frac{(c - \xi + \sqrt{\xi^2 - b^2}) + d^2}{2(c - \xi + \sqrt{\xi^2 - b^2})} \quad (9)$$

S-вариант:

$$P_S(\xi, \eta) = \frac{1}{I_S} (\ell - \eta). \quad (10)$$

Нормирующий множитель I_S оказывается равным

$$I_S = \int_b^1 d\xi \int_{\eta_{\min}(\xi)}^{\eta_{\max}(\xi)} (\ell - \eta) d\eta. \quad (11)$$

T - вариант:

$$P_T(\xi, \eta) = \frac{1}{I_T} \sum_{k=0}^3 g_k(\xi) \cdot g^k(\xi, \eta) = \frac{P'(\xi, \eta)}{I_T}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} g(\xi, \eta) &= (c - \xi - \eta) \\ g_0(\xi) &= (\xi^2 - b^2)(1 - \xi) \\ g_1(\xi) &= (b^2 + \xi^2 - 2\xi) \\ g_2(\xi) &= \xi + (1 - 2ab) \\ g_3(\xi) &= -1. \end{aligned}$$

Нормирующий множитель I_T получается интегрированием $P'(\xi, \eta)$, по η в пределах (8)-(9) и по ξ от b до 1.

В последующих расчетах нам постоянно придется решать задачу об определении потенциальной длины пробега частицы, т.е. расстояния от точки распада до ближайшей стенки камеры по направлению полета частицы, причем направление задается углами θ и ϕ в системе, связанной с точкой распада K^+ мезона, а координаты точки распада и уравнения стенок камеры - в основной системе, связанной с камерой. Поэтому было бы полезно иметь блок расчета потенциальных длин в виде компактной математической формулы, позволяющий автоматизировать пересчет от одной системы координат к другой.

Предварительно сделаем небольшое математическое отступление. Пусть имеется левая система координат x, y, z . Поворотом осей x и y на угол ϕ в плоскости xOy получим новые оси x_1, y_1 . Наклонив ось z на угол θ , получим ось z_1 . Если в системе координат x_1, y_1, z_1 имеется вектор $\vec{A}(\ell_1, m_1, n_1)$, то его координаты (ℓ, m, n) в системе (x, y, z) получаются из (ℓ_1, m_1, n_1) с помощью преобразования поворота, т.е. умножением строки (ℓ_1, m_1, n_1) на матрицу поворота $^{1/\theta/}$:

$$M(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

Если произвести последовательно "k" поворотов, так что система координат $(x_{\gamma+1}, y_{\gamma+1}, z_{\gamma+1})$ получается из системы $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$ ($\gamma = 1, \dots, k$) поворотом на углы $\theta_{\gamma+1}, \phi_{\gamma+1}$, то компоненты вектора \vec{A} (l_k, m_k, n_k) , заданные в системе (x_k, y_k, z_k) , позволяют определять компоненты того же вектора в системе $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$ по формуле

$$(l_\gamma, m_\gamma, n_\gamma) = (l_k, m_k, n_k) \prod_{j=k}^{\gamma+1} M(\theta_j, \phi_j). \quad (\gamma = 1, 2, \dots, k-1).$$

Возвращаясь к задаче определения потенциальной длины, полагаем, что система (x, y, z) имеет центр в точке распада (x_0, y_0, z_0) , а оси, параллельные осям основной системы координат, т.е. системы, в которой уравнения шести плоскостей стенок камеры имеют вид (3), причем коэффициенты уравнений плоскостей, заданные в таблице I, таковы, что направляющие векторы всех шести плоскостей "смотрят" внутрь камеры.

Примем за ось Ox_1 направление полета вторичной частицы, т.е. в системе (x_1, y_1, z_1) единичный вектор \vec{A} будет иметь компоненты $(0, 0, 1)$. Тогда, очевидно, в системе (x, y, z) его компоненты будут равны элементам третьей строки матрицы $M(\theta, \phi)$. Соответственно частица K -го поколения, будет лететь по прямой, направляющие косинусы которой будут равны элементам третьей строки матрицы

$$M_k = \prod_{j=k}^1 M(\theta_j, \phi_j). \quad (14)$$

Потенциальная длина по определению является длиной вектора \vec{L}_1 , выходящего из точки распада x_0, y_0, z_0 в направлении полета частицы и "упирающегося" своим концом в ближайшую из плоскостей стенок камеры (пусть ее номер будет i). Благодаря специальному выбору направляющих векторов этих плоскостей угол между вектором \vec{L}_1 и направляющим вектором i -ой плоскости будет тупым, т.е. будет отрицательным скалярное произведение

$$Q_1 = A_1 \cdot \ell + B_1 m + C_1 n . \quad (15)$$

Здесь (ℓ , m , n) по-прежнему, являются компонентами единичного вектора, направленного вдоль \vec{L} , и определяются как элементы третьей строки матрицы поворота (13).

Обозначим через R_i величину

$$R_i = A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 + D_i . \quad (16)$$

Расстояние от точки распада (x_0 , y_0 , z_0) до i -ой плоскости будет равно MR_i ($M = (A_i^2 + B_i^2 + C_i^2)^{-1/2}$) -нормирующей множитель i -ой плоскости), а косинус угла между векторами \vec{L}_i , и (A_i , B_i , C_i) будет равен MQ_i .

Отсюда получаем искомое выражение для длины вектора \vec{L}_i

$$\ell_i = |\vec{L}_i| = \left| \frac{R_i}{Q_i} \right| .$$

Алгоритм для определения $|\vec{L}_i|$ по уравнениям плоскостей, заданным таблицей 1, точке распада и направлению (ℓ , m , n) таков: вычисляем по (15) величины Q_i ($i = 1, 6$), отбираем те номера i , для которых $Q_i < 0$, и вычисляем R_i - согласно (16). Потенциальная длина

$$\ell = \min_{i-} \left| \frac{R_i}{Q_i} \right| . \quad (17)$$

Теперь можно перейти к решению задачи о расчете энергетического спектра μ^+ -мезона с учетом геометрии камеры.

Пусть произошло N распадов K^+ -мезонов и в N_1 из них энергия родившихся μ^+ -мезонов заключена в интервале (ξ , $\xi + \Delta \xi$). Отношение $\frac{N_1}{N}$ без учета геометрии опыта при достаточно большом N будет приблизительно равно $P_\mu(\xi) \Delta \xi$, где энергетическая плотность распределения μ^+ мезонов может быть получена при интегрировании совместной плотности (7), (10) или (12) в зависимости от варианта взаимодействия по переменной η в пределах (8)-(9).

При учете геометрии эксперимента будут регистрироваться только те события, в которых μ^+ -мезон останавливается в камере с конверсией в камере хотя бы одного u -кванта. Очевидно, что число таких событий N_2 будет меньше, чем N_1 , т.е. $N_2/N_1 < 1$. При достаточно большом N_1 величина

$$P_\mu(\xi) \frac{N_2}{N_1}$$

даст нам искомый энергетический спектр μ^+ -мезонов, учитывающий геометрию опыта.

Отношение $\frac{N_2}{N_1}$ можно найти путем многократного моделирования на электронной вычислительной машине (ЭВМ) процесса распада K^+ -мезонов с учетом всех условий эксперимента (метод Монте-Карло). Последовательно перебирая энергии μ^+ -мезонов с некоторым шагом $\Delta\xi$, находим для каждого значения энергии отношение N_2/N_1 .

Слова "все условия эксперимента" включают в себя и учет разброса точек распада первичных K^+ -мезонов.

Можно было бы на основании экспериментальной статистики построить трехмерную функцию распределения точек распада, в соответствии с которой и разыгрывать их в дальнейшем. Этот путь усложняется тем, что неизвестен даже вид теоретической функции распределения, не говоря уже о трудностях моделирования его на ЭВМ.

Был использован более простой и близкий к условиям эксперимента путь: в таблицу записывались (с обеспечением случайности записи) координаты реальных точек распада, и затем в процессе счета последовательно выбирались из нее. Метод позволял максимально использовать экспериментальную информацию о распределении точек распада.

Далее излагается процесс моделирования. Буквами a_1, a_2, \dots обозначаются последовательные случайные числа, независимо выбранные из множества чисел, равномерно распределенных на отрезке $(0,1)^{xx/}$.

Программа А

1. Из интервала энергий $(b, 1)$ с заданным шагом $\Delta\xi = \frac{1-b}{n}$ выбирается очередное значение энергии $\xi_k = b + k \cdot \Delta\xi$ ($k = \overline{1, n}$) и по таблице 2 находится средний пробег L_{μ^+} , соответствующий энергии ξ_k .

2. Из таблицы $Z^{xx/}$ выбираются координаты очередной точки распада X_{01}, Y_{01}, Z_{01} .

3. Разыгрывается направление вылета μ^+ -мезона. С учетом изотропности направлений вылета в пространстве разыгрывается $\cos\theta_1$ и ϕ_1 .

^{x/} При реализации излагаемой модели на ЭВМ пользуются так называемыми псевдослучайными числами (см. по этому поводу /4/).

^{xx/} Таблица 3 и аналогичная ей таблица 4 не приводятся в настоящей работе ввиду их громоздкости.

$$\cos \theta_1 = 2a_1 - 1$$

$$\phi_1 = 2\pi a_2.$$

Прибавляется единица к счетчику числа испытаний N_1 .

4. Обращаемся к блоку расчета потенциальной длины и получаем ℓ_μ . Блок работает с помощью вышеприведенного алгоритма, основанного на формулах (15)-(17).

5. Сравнивается L_μ с ℓ_μ . Если $L_\mu > \ell_\mu$ (т.е. мезон уходит из камеры), то возвращаемся к пункту 3. В противном случае - переход к следующему пункту 6.

6. С помощью таблицы условной функции распределения $F_k(\eta)$ разыгрывается η_{k1} энергия π^0 -мезона^{х/}. Таблица функции $F(\eta)$ с шагом $\Delta\eta$ вычисляется по формуле

$$F_k(\eta) = F(\eta | \xi = \xi_k) = \frac{1}{P_\mu(\xi) \eta_{\min}(\xi_k)} \int_0^\eta P(\xi, y) dy, \quad (18)$$

η в таблице принимает значения $\eta_{k1} = \eta_{\min}(\xi_k) + i \Delta\eta$, двумерная плотность $P(\xi, \eta)$ задается формулами (7), (10) или (12) для вариантов V, S или T соответственно, $\eta_{\min}(\xi)$ дается формулой (9), плотность $P_\mu(\xi_k)$ определена выше. Способ розыгрыша: энергия π^0 -мезона равна η_{k1} , если

$$F(\eta_{k1}) < a_3 < F_k(\eta_{k1+1}).$$

7. Определяется направление π^0 -мезона относительно направления μ^+ -мезона, т.е. углы θ_2 и ϕ_2 . Формула для $\cos \theta_2$ находится из законов сохранения импульса и энергии:

$$\cos \theta = \frac{p^2 - 2c \cdot \xi_k - i 2\eta_{k1} (c - \xi_k)}{2\sqrt{\xi_k^2 - b^2} \cdot i \sqrt{\eta_{k1}^2 - d^2}}. \quad (19)$$

Здесь обозначено

$$p^2 = c^2 + b^2 + d^2. \quad (20)$$

^{х/} С целью экономии времени расчета на ЭВМ таблицу (18) разумнее вычислять перед пунктом 2 - сразу же после выбора энергии ξ_k .

Азимутальный угол ϕ_2 распределен равномерно

$$\phi_2 = 2\pi\alpha_4.$$

По формулам (13) и (14) рассчитывается матрица поворота

$$M_2 = M(\theta_2, \phi_2) \cdot M(\theta_1, \phi_1).$$

8. Разыгрывается энергия γ_1 (здесь и в дальнейшем через γ_1 и γ_2 обозначены два γ -кванта, на которые распадается π^0 -мезон).

Из ^{17/} известно, что энергетическое распределение γ -квантов является равномерным с постоянной плотностью, равной $(\eta^2 - d^2)^{1/2}$. Отсюда получаем выражение:

$$E_{\gamma_1} = \frac{\eta_{k_1} + (2\alpha_0 - 1)\sqrt{\eta_{k_1}^2 - d^2}}{2}. \quad (21)$$

После этого по формуле (см. ^{18/})

$$L = 5,1916 + \frac{0,57091}{E_\gamma} - \frac{0,02268}{E_\gamma^2} + \frac{0,0004031}{E_\gamma^3} \quad (22)$$

находим L_{γ_1} - длину конверсии γ_1 .

9. Направление γ_1 находится из законов сохранения

$$\cos \theta_3 = \frac{d^2 - 2\eta_{k_1} \cdot E_{\gamma_1}}{2E_{\gamma_1} \cdot \sqrt{\eta_{k_1}^2 - d^2}},$$

$$\phi_3 = 2\pi\alpha_6.$$

10. Находим матрицу поворота от основной системы координат к системе, связанной с направлением γ_1

$$M_3 = M(\theta_3, \phi_3) \cdot M_2,$$

и обратившись к блоку потенциальных длин, определяем l_{γ_1} .

11. Рассчитывается вероятность конверсии γ_1 в пределах камеры

$$P_1 = 1 - \exp(-l_{\gamma_1} / L_{\gamma_1}).$$

12. Вычисляется энергия γ_2

$$E_{\gamma_2} = \eta_{k_1} - E_{\gamma_1}$$

и по формуле (22) определяется длина конверсии

13. Из кинематики распада π^0 -мезона находится направление γ_2 относительно γ_1

$$\cos \theta_4 = 1 - \frac{d^2}{2E\gamma_1 \cdot E\gamma_2}$$

$$\phi_4 = \pi$$

14. По формулам (13) и (14) рассчитывается матрица поворота $M_4 = M(\theta_4, \phi_4) \cdot M_3$, и с помощью блока потенциальных длин определяется ℓ_{γ_2} .

Вычисляется вероятность конверсии γ_2 в камере

$$P_2 = 1 - \exp\left(-\frac{\ell_{\gamma_2}}{L_{\gamma_2}}\right).$$

С помощью формулы полной вероятности определяется вероятность конверсии в камере хотя бы одного γ -кванта

$$P_{12} = P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2 \quad (23)$$

Мы должны найти число N_2 случаев остановки μ^+ -мезона в камере при условии конверсии хотя бы одного γ -кванта. При большом N_1 - общем числе появления μ^+ -мезонов, имеющих энергию ξ_k , в K_{μ^+} распада число N_2 приблизительно равно вероятности P_{12} взятой столько раз, сколько раз мы регистрировали μ^+ -мезон в камере. Поэтому последний пункт нашего расчета для выбранной точки распада.

16. В сумматоре Σ суммируем вероятность P_{12} , (помня, что на пункт 16 мы попадаем только через пункт 5, т.е. при условии регистрации μ^+ -мезона в камере).

Накопив достаточную статистику N испытаний при данной точке распада, переходим к пункту 2, т.е. выбираем следующую точку распада и снова повторяем расчет. Перебрав все точки распада, в сумматоре Σ мы получим искомое число N_2 и находим отношение N_2/N_1 для данного интервала энергии μ^+ -мезона ($\xi_k, \xi_k + \Delta\xi$). Перебирая все ξ_k в общем интервале ($b, 1$), получим поправку на условия эксперимента для всего спектра энергий μ^+ -мезона.

II.

Как было сказано вначале, для решения вопроса о варианте взаимодействия, кроме распределения 1, можно использовать также и распределение 2 - 3 - 4.

Ниже будут даны пояснения к программе В, позволяющей методом Монте-Карло рассчитать поправки, учитывающие условия эксперимента, к теоретическому распределению 2. Сама программа В полностью изложена в Приложении. Программа поз-

воляет учесть геометрию опыта при расчете распределения углов разлета между γ -квантами от π^0 -мезона независимо от факта останковки μ^+ -мезона в камере.

Используемая в программе совместная плотность распределения $\phi(\eta, x)$ энергии π^0 -мезона и косинуса угла разлета γ -квантов получается как произведение плотности распределения $P_\pi(\eta)$ энергии π^0 -мезона на условную плотность распределения $\psi(x)$ косинуса угла разлета.

$P_\pi(\eta)$ получается интегрированием двумерной плотности $P(\xi, \eta)$, , данной для V, S и T вариантов формулами (7), (10), (12) соответственно, по переменной ξ в пределах

$$\xi_{\min}(\eta) = \frac{(c - \eta - \sqrt{\eta^2 - d^2})^2 + b^2}{2(c - \eta - \sqrt{\eta^2 - d^2})} \quad (24)$$

до

$$\xi_{\max}(\eta) = \frac{(c - \eta + \sqrt{\eta^2 - d^2})^2 + b^2}{2(c - \eta + \sqrt{\eta^2 - d^2})} \quad (25)$$

Вывод формулы $\psi(x)$ приведен в /7/. С точностью до нормировки

$$\psi(x) = (\eta^2 - d^2)^{-1/2} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{-3/2} \left[\eta^2 \left(\frac{1-x}{2} \right) - d^2 \right]^{-1/2} \quad (26)$$

Таким образом:

$$\phi(\eta, x) = \frac{1}{I} P_\pi(\eta) \cdot \psi(x), \quad (27)$$

где нормирующий множитель получается интегрированием

$$I = \int_{\eta_{\min}(x)}^{\eta_{\max}(x)} dx \int_{\xi_{\min}(\eta)}^{\xi_{\max}(\eta)} P_\pi(\eta) \cdot \psi(x) d\eta, \quad (28)$$

$$\eta_{\max} = \ell;$$

$$\eta_{\min} = d \sqrt{\frac{2}{1-x}};$$

$$x_{\max} = 1 - \frac{2d^2}{\ell^2}; \quad (29)$$

$$x_{\min} = -1.$$

Интегрирование по ξ при получении $P_{\pi}(\eta)$ означало, что мы не интересуемся фактом остановки μ^+ -мезона в камере. При необходимости программа В может быть несколько усложнена с целью учета этого факта.

Программа В повторяет некоторые пункты программы А, в этих случаях даются ссылки на соответствующую формулу программы А.

Примером успешного применения изложенной методики вычисления поправок к теоретическим распределениям для учета условий эксперимента может служить работа /8/, доложенная на XII конференции по физике высоких энергий в Дубне в 1964 г.

В работе /8/ излагались результаты сравнения экспериментальных гистограмм с соответствующими распределениями, подсчитанными по программе А.

III.

В упомянутой работе /8/ (равно как и в /10/) сделан вывод о справедливости V-варианта в слабых взаимодействиях. В связи с этим возникает проблема определения отношения формфакторов $\epsilon = \frac{f_-}{f_+}$, входящих в гамильтониан слабого взаимодействия. Предполагается, что формфакторы f_- и f_+ постоянны, т.е. не зависят от энергии π^0 -мезона.

Для решения задачи естественно применить широко известный в статистике метод максимального правдоподобия /11/. Суть метода состоит в нахождении значения параметра ϵ , при котором достигает максимума функция правдоподобия L , являющаяся совместной плотностью вероятности энергий μ^+ -мезонов во всех наблюдававшихся случаях распада K^+ -мезонов.

Отметим, что этот метод уже использовался для решения аналогичной проблемы в недавно появившейся работе /12/. Однако там не приводится методика вычисления функции правдоподобия с учетом условий эксперимента (которые существенно отличаются от наших).

Назовем событием случай распада $K^+_{\mu_3}$ с остановкой μ^+ -мезона в камере и конверсией хотя бы одного γ -кванта. Пусть мы имеем результаты наблюдения n событий. Событие с номером i характеризуется энергией μ^+ -мезона $\xi = \xi_i$, его направлением и фактом конверсии хотя бы одного γ -кванта. Для определения условной плотности распределения $W(\xi, \epsilon)$ энергии μ^+ -мезона в i -м событии мы должны преобразовать двумерную теоретическую плотность распределения (7) так, чтобы учесть условия эксперимента. Такой учет сводится к интегрированию плотности (7), умноженной на вероятность конверсии хотя бы одного γ -кванта по остальным переменным: η , направлению и энергии γ и последующей пере-

нормировке получившейся плотности в связи с возможным обрезанием спектра μ^+ мезонов потенциальной длиной ℓ_{μ_i} в i -м событии.

Поскольку функция (7) является отношением двух многочленов второй степени относительно ϵ , то тот же вид будет иметь и $W_i(\xi, \epsilon)$

$$W_i(\epsilon, \xi) = \frac{V_0(\xi) + V_1(\xi) \cdot \epsilon + V_2(\xi) \cdot \epsilon^2}{V_0' + V_1' \cdot \epsilon + V_2' \cdot \epsilon^2} \quad (30)$$

где знаменатель получается в результате нормировки, т.е.

$$V_k' = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} V_k(\xi) d\xi \quad (k = 0, 1, 2) \quad (31)$$

$\xi_{\min} = b, a$ ξ_{\max} - энергия, соответствующая ℓ_{μ_i} .

Таким образом, логарифм функции максимального правдоподобия будет иметь вид

$$\ln L(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \epsilon) = \sum_{i=1}^n \ln W_i(\xi_i, \epsilon). \quad (32)$$

Как известно [11], наилучшей оценкой параметра ϵ при заданных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ будет величина $\hat{\epsilon}$, дающая максимум функции (32). Обычный метод поиска $\hat{\epsilon}$ путем решения уравнения $\frac{\partial L}{\partial \epsilon} = 0$ практически неприменим в силу сложности этого уравнения. Поэтому было предложено определять максимальное значение L непосредственно, вычисляя функцию (32) многократно при различных ϵ с некоторым шагом $\Delta \epsilon$.

Вычисление L , как это следует из формул (30) - (32), сводится к вычислению функций $V_k(\xi)$ ($k = 0, 1, 2$) в любой точке ξ из отрезка (ξ_{\min}, ξ_{\max}) .

Это вычисление было проведено методом Монте-Карло в излагаемой ниже программе С.

Кроме известных таблиц 1-3, в программе С используется таблица 4, где собрана экспериментальная информация обо всех n событиях. Для каждого события с номером i в таблице 4 указано семь чисел: $X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}; X_{2i}, Y_{2i}, Z_{2i}, \xi_i$. Первые три из них - координаты точки распада K^+ -мезона, вторые три - координаты точки на треке μ^+ -мезона и, наконец, ξ_i - энергия μ^+ -мезона.

Программа С

1. Из таблицы № 4^{x/} выбирается очередная точка " i ", т.е. семь чисел X_{01} , Y_{01} , Z_{01} ; X_{21} , Y_{21} , Z_{21} ; ξ_1 .

2. Рассчитываются направляющие косинусы трека μ^+ -мезона:

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{X_{21} - X_{01}}{p_1} \\ m_1 &= \frac{Y_{21} - Y_{01}}{p_1} \\ n_1 &= \frac{Z_{21} - Z_{01}}{p_1} \end{aligned} \quad p_1 = \sqrt{(X_{21} - X_{01})^2 + (Y_{21} - Y_{01})^2 + (Z_{21} - Z_{01})^2}$$

3. Обращаясь к блоку определения потенциальных длин, находим ℓ_{μ_1} - потенциальную длину, соответствующую направлению μ^+ -мезона. При расчете $M(\theta_1, \phi_1)$ надо учесть, что

$$\cos \theta_1 = n_1,$$

$$\cos \phi_1 = -\frac{\ell_1}{\sqrt{1 - n_1^2}}; \quad \sin \phi_1 = \frac{m_1}{\sqrt{1 - n_1^2}}.$$

4. Из таблицы № 2 по потенциальной длине ℓ_{μ_1} находится $\xi_{\max 1}$ - максимальная энергия μ^+ -мезона, который может быть зарегистрирован в камере по направлению (θ_1, ϕ_1) . (В случае, если при интерполяции получится $\xi_{\max 1} > 1$, полагаем

$$\xi_{\max 1} = 1).$$

5. По формулам (8) и (9) рассчитываем

$$\eta_{\min}(\xi) \text{ и } \eta_{\max}(\xi), \text{ где } \xi_{\min} < \xi < \xi_{\max 1}.$$

6. Разыгрываем энергию π^0 -мезона равномерно в интервале $(\eta_{\min}(\xi), \eta_{\max}(\xi))$

$$\eta_1 = \alpha_1 [\eta_{\max}(\xi) - \eta_{\min}(\xi)] + \eta_{\min}(\xi)$$

и добавляем единицу в счетчик числа испытаний N_1 . (Напомним, что α_1 по-прежнему означает очередное случайное число из интервала $(0,1)$).

7. По формуле (19) рассчитываем $\cos \theta_2(\xi, \eta_1)$.

Разыгрываем азимутальный угол $\phi_2 = 2\pi\alpha_2$.

8. Рассчитываем матрицу $M_2 = M(\theta_2, \phi_2) \cdot M(\theta_1, \phi_1)$.

9. По формуле (21) разыгрываем энергию γ_1 :

$$E_{\gamma_1} = E_{\gamma_1}(\alpha_3).$$

^{x/} См. примечание на стр. 9.

10. По формуле (22) находим длину конверсии L_{γ_1} .

11. Определяем направление γ_1 :

$$\cos \theta_3 = \frac{d^2 - 2\eta_1 \cdot iE\gamma_1}{2E\gamma_1 \cdot i\sqrt{\eta_1^2 - d^2}}$$

$$\phi_3 = 2\pi\alpha_4.$$

12. По аналогии с пунктами 10-15 программы А рассчитываем вероятность P_{12}

13. Используя формулы (7а), находим произведения

$$f_0(\xi, \eta_1) \cdot iP_{12}, f_1(\xi, \eta_1) \cdot iP_{12}, f_2(\xi, \eta_1) \cdot iP_{12}$$

и суммируем их в сумматорах $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ соответственно.

14. Сравниваем содержимое счетчика N_1 с заданным числом испытаний N (число N выбирается из соображений точности расчета и возможного времени счета на ЭВМ). Если $N_1 < N$, возвращаемся к пункту 6 этой программы. Если $N_1 \geq N$, переходим к следующему пункту 15.

15. Вычисляем величины $V_0(\xi), V_1(\xi)$ и $V_2(\xi)$

$$V_k(\xi) = \frac{1}{N} [\eta_{\max}(\xi) - \eta_{\min}(\xi)] \cdot \Sigma_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2).$$

16. Вычисляем V'_k по формуле (31). Для этого необходимо повторить расчет с различными ξ с пункта 5 по 15 столько раз, сколько требуется для интегрирования (31). Далее переходим к пункту 1, т.е. выбираем следующее событие. После вычисления коэффициентов $V_k(\xi_1)$ и V'_k мы можем для ряда значений параметра ϵ по формуле (30) и (32) построить график функции $f_n L$.

Необходимо отметить, что в этой программе используется не вся информация, получаемая из эксперимента.

Из эксперимента с $K_{\mu_s}^+$ - распадами при условии конверсии одного γ -кванта мы получаем информацию о следующих величинах: направление вылета μ^+ -мезона относительно системы координат камеры (углы θ_0 и ϕ); энергия μ^+ -мезона (ξ); угол между направлениями γ -кванта и μ^+ -мезона; расстояние, на котором конвертирует γ -квант. В программе С не используются последние две величины. Чтобы учесть всю информацию, необходимо воспользоваться данными работы /13/, где дается вывод распределения углов разлета γ -квант-лептон. Четырехмерная функция плотности вероятности, полученная с помощью изложенной там методики, умножается на функцию плотности вероятности конверсии γ -кванта

$$P_\gamma(\ell) = \frac{1}{L_\gamma} \exp(-\ell/L_\gamma)$$

и интегрируется по всем ненаблюдавшимся переменным. Логическая структура счета почти не изменяется в этом случае. Может представлять интерес вопрос о времени, необходимом для расчетов на ЭВМ по изложенной методике.

На расчет по программе А одного варианта (V , S или T) при использовании 100 точек распада K^+ -мезона и двадцати значений энергии μ^+ -мезона требуется 5 часов машинного времени на трехадресной ЭВМ, имеющей скорость 20 тыс. операций в сек.

Для вычислений по программе С при $n = 120$ на построение графика $L(\epsilon)$ на 100 значений ϵ требуется 3,5 часа.

В заключение мы хотим выразить благодарность И.В. Чувилу, который обратил наше внимание на задачу о максимальном правдоподобии и В.И. Кочкину, проделавшему конкретные расчеты на ЭВМ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Программа В

1. По формуле (28) рассчитывается величина I . Пределы интегрирования даны в (29).

2. Из интервала (x_{min} , x_{max}) выбирается очередное значение

$$x_k = x_{min} + k \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}$$

3. Строится таблица распределения: η

$$F_k(\eta) = F(\eta/x = x_k) = \frac{1}{P(x_k)} \int_{\eta_{min}(x_k)}^{\eta} \phi(y, x) dy,$$

где

$$P(x_k) = \int_{\eta_{min}(x_k)}^{\eta_{max}(x_k)} \phi(y, x_k) dy$$

с шагом

$$\Delta \eta = \frac{\eta_{max} - \eta_{min}}{m}$$

$$\eta_i = \eta_{min}(x_k) + i \Delta \eta,$$

4. Выбирается очередная точка распада X_{0i} , Y_{0i} , Z_{0i} из таблицы 3.

5. Разыгрывается энергия π^0 -мезона по алгоритму:

если $F_k(\eta_k) \leq \alpha_1 < F_k(\eta_{k+1})$,

то энергия равна $\eta_{k1} = \eta_{\min}(x_k) + i\Delta\eta$.

6. По формуле (21) разыгрывается энергия γ_1

$$E_{\gamma_1} = E_{\gamma_1}(\alpha_2, \eta_{k1}).$$

7. Вычисляется энергия γ_2

$$E_{\gamma_2} = \eta_{k1} - E_{\gamma_1}.$$

8. По формуле (22) находим L_{γ_1} и L_{γ_2} .

9. Разыгрываем направление γ_1 :

$$\cos \theta_1 = 2\alpha_3 - 1$$

$$\phi_1 = 2\pi \alpha_4.$$

10. Обращаясь к блоку определения потенциальных длин, находим ℓ_{γ_1} и рассчитываем:

$$P_1 = 1 - \exp(-\ell_{\gamma_1}/L_{\gamma_1}).$$

11. Направление γ_2 :

$$\cos \theta_2 = x_k$$

$$\phi_2 = 2\pi \alpha_5.$$

Рассчитываем $M_2 = M(\theta_2, \phi_2) \cdot M(\theta_1, \phi_1)$ и определяем потенциальную длину ℓ_{γ_2} .

12. Рассчитываем $P_2 = 1 - \exp(-\ell_{\gamma_2}/L_{\gamma_2})$ и $P_1 \cdot P_2$.

13. Суммируем величину $P_1 \cdot P_2$ с содержимым сумматора Σ_1 , прибавляя при этом единицу в счетчик числа циклов № 2.

14. Сравниваем N_2 с N .

Если $N_2 < N$ уходим на п. 5

Если $N_2 \geq N$ - " - на п. 4

15. После перебора N_1 точек X_{0i} , Y_{0i} , Z_{0i} рассчитываем величину

$$P_k = \frac{f(x_k)}{T \cdot N \cdot N_1} \Sigma_1,$$

выводим ее на печать и идем на новое значение x_k , т.е. на п. 2

Т а б л и ц а 1

i	A_i	B_i	C_i	D_i
1	0	0	1	0
2	0	0	-1	-15,3
3	0	-1	0,3822	-21,6
4	0	1	0,3822	-21,6
5	-1	0	0,2614	-20
6	1	0	0,2614	0

Т а б л и ц а 2

ξ	L	ξ	L	ξ	L
0,440	0	0,546	3,08	0,816	21,99
0,474	0,48	0,557	3,67	0,864	25,95
0,478	0,53	0,569	4,29	0,910	29,96
0,482	0,65	0,581	4,94	1,027	40,35
0,487	0,78	0,593	5,62		
0,492	0,92	0,605	6,32		
0,496	1,07	0,618	7,05		
0,501	1,22	0,628	7,81		
0,506	1,39	0,651	9,37		
0,511	1,56	0,675	11,02		
0,515	1,74	0,698	12,73		
0,525	2,12	0,722	14,50		
0,534	2,53	0,769	18,17		

Л и т е р а т у р а

1. Н.П. Бусленко, Ю.А. Шрейдер. Метод статистических испытаний, Физматгиз, Москва, 1961.
2. R.P. Feynman, M. Gell-mann, Phys. Rev., 109, 193 (1958).
3. S.W. Mac Dowell. Notas de Fisica, v. VIII, N=6 (Brasil).
4. Г.А. Ососков. Методика моделирования случайных чисел на электронных цифровых машинах, "Вопросы радиоэлектроники". Серия XII -общетехническая, 1969, вып. 13.
5. Л.Б. Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз, Москва, 1963.
6. П.С. Моденов. Аналитическая геометрия. Изд-во МГУ, 1955.
7. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Теория поля, Физматгиз, 1960.
8. F.S. Shaklee. The doctor thesis. The University of Michigan May, 1964.
9. Материалы XII-й конференции по физике высоких энергий, Дубна, 1964.
10. G.L. Jensen. The doctor thesis. The University of Michigan, 1964
11. Г. Крамер, Математические методы статистики. ИИЛ, 1948.
12. F.H. Groves et al., Phys. Rev., 135, 1269 (1964).
13. В.С. Курбатов, Э.И. Мальцев, А.Н. Маслаков, А.А. Стручков, А.И. Шкловская. Об одном методе анализа распадов с образованием π^0 -мезона. Препринт ОИЯИ 1956 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 января 1965 г.