ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.А. Арбузов

О РАЗЛОЖИМОСТИ S -МАТРИЦЫ ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук
профессор

А.А. Логунов

Дубна 1965

Б.А. Арбузов

1932

О РАЗЛОЖИМОСТИ S-МАТРИЦЫ ПО КОНСТАНТЕ СВЯЗИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук
профессор

А.А. Логунов

Диссертация посвящена исследованию структуры разложения матричных элементов S -матрицы при малых значениях константы связи в квантовой теории поля. В главе II рассматриваются перенормируемые теории. Как известно [1], в перенормируемых теориях поля значение любой физической величины можно представить в виде ряда по константе связи. Почти сразу же после создания перенормировочной процедуры было высказано предположение [2], что ряды по константе связи в квантовой электродинамике не являются сходящимися, а имеют лишь асимптотический характер. Это означает, что точка $\alpha = 0$ является существенно особой точкой. Были приведены довольно веские аргументы в пользу этого предположения. Отметим, что если ряды теории возмущений являются асимптотическими, то в теории возмущений отнюдь не заключена вся информация, содержащаяся в теории. В самом деле, асимптотический ряд не определяет однозначно функцию, разложением которой он является. Проблема здесь заключается в том, чтобы найти способ выхода за рамки теории возмущений. В § 1 главы II диссертации, где рассматривается асимптотика фотонной функции распространения $D(k^2)$, для этого используется уравнение Дайсона, рассматриваемое как уравнение для спектральной плотности фотонной функции распространения $\rho(x)$ [3]. При этом для $\rho(x)$ получается сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, решение которого, как известно, можно записать в явном виде. Для $\rho(x)$ получается следующее выражение

$$\rho(x) = -\frac{x+B}{\pi x\, B} \cdot \frac{\operatorname{Im} P(x)}{[1-\operatorname{Re} P(x)]^2 + [\operatorname{Im} P(x)]^2}\,, \tag{1}$$

где $P(x)$ – поляризационный оператор и $(-B)$ –корень уравнения $1 - P(x) = 0$. При выборе $P(x)$ во втором порядке теории возмущений $\left(P(x) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{4m^2 - x}{4m^2}\right)$ получаем

$$B \approx 4m^2 \exp\left\{\frac{3\pi}{\alpha}\right\}. \tag{2}$$

С помощью спектрального представления Челена-Лемана мы определим функцию распространения

$$D(k^2) = -\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{B}\right) \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{4m^2 - k^2}{4m^2}}\,. \tag{3}$$

Таким образом, $D(k^2)$ не содержит полюса при отрицательных k^2 и отличается от выражеиия, найденного суммированием главных логарифмических диаграмм [4], на член, имеющий нулевое асимптотическое разложение. Из формулы (3) мы видим, что $D(k^2)$ имеет существенную особенность в точке $\alpha = 0$, а асимптотическое разложение выражения (3) совпадает с теорией возмущений. Полученный результат является следствием неоднозначности суммирования асимптотических рядов. Асимптотика функций распространения с учетом этого обстоятельства рассматривалась в работах[5,6]. Наши выражения отличаются от выражений, найденных в этих работах тем, что здесь неаналитическая зависимость от заряда имеется не только в функции распространения, но и в спектральной функции. Это кажется вполне естественным, так как в силу условия унитарности спектральная плотность $\rho(x)$ непосредственно связана с самой функцией $D(k^2)$. Действительно, исследование, проведенное в конце первого параграфа, показывает, что выражение (3) является также решением нелинейного интегрального уравнения, учитывающего условие унитарности в двухчастичном приближении, если сделать довольно простые предположения о поведении вершинной функции при $k^2 \to \infty$.

В § 2 главы II приведены некоторые результаты квазипотенциального метода в теории поля[7], которые используются в дальнейшем изложения. Особенно интересным для нас является поведение эффективного потенциала на малых расстояниях, которое и определяет аналитические свойства амплитуды рассеяния по константе связи. Действительно, как показано в работе[8], если потенциал $V(r)$ ведет себя на малых расстояниях как $1/r^{\alpha}$, где $\alpha < 2$, то ряды Фредгольма в решении для амплитуды рассеяния сходятся, и, значит, амплитуда рассеяния аналитична по константе связи в некоторой окрестности нуля. Однако в реальных теориях условие $\alpha < 2$ не выполняется. Например, в теории с взаимодействием $g\phi^4$ разложение эффективного потенциала в ряд по константе связи имеет вид при малых r

$$V(r) = a\,\frac{g^2}{r^2} - b\,\frac{g^3}{r^2}\log r + \ldots \tag{4}$$

В неперенормируемых теориях сингулярность потенциала в нуле еще сильнее. Например, первое приближение для потенциала в теории $\lambda\phi^5$ имеет вид с $\frac{\lambda^2}{r^4}$.

В § 3 главы II рассматриваются аналитические свойства параметров рассеяния для потенциала (4). Решение уравнения Шредингера при $k^2=0$ для такого потенциала было найдено в работе[9]. Например, для длины рассеяния A в этом случае получается следующее выражение:

$$A = 1 - \frac{\sqrt{\kappa}\, K_{1/3}\left(\frac{2\kappa^{3/2}}{3bg^3}\right)}{\frac{\sqrt{\kappa}}{2}\, K_{1/3}\left(\frac{2\kappa^{3/2}}{3bg^3}\right) + \kappa\, K_{2/3}\left(\frac{2\kappa^{3/2}}{3bg^3}\right)}\,, \tag{5}$$

где $\kappa = \frac{1}{4} - ag^2$. Из формулы (5) следует, что A разлагается в ряд по g, но ряд этот является асимптотическим. Можно показать, что точка $g=0$ является точкой сгущения полюсов, так как знаменатель в (5) имеет бесконечное число нулей при $g \to 0$ с соответствующей стороны. Следовательно, длина рассеяния, а равным образом и параметры для других парциальных волн имеют существенную особенность по константе связи и разлагаются лишь в асимптотический ряд по g.

Таким образом, примеры, рассмотренные в главе II, подтверждают предположение об асимптотическом характере разложения по константе связи в перенормируемых теориях.

В главах III и IV рассматриваются примеры, существенные для понимания ситуации в неперенормируемых теориях. Как известно, в неперенормируемых теориях ряд по константе связи не существует[1]. Поэтому в ряде работ[10,11] предпринимались попытки вычисления радиационных поправок в таких теориях без прямого использования теории возмущений. При этом выяснилось, что в разложении решений при малых константах связи g появляются члены вида $g \log g$, т.е. точка $g=0$ является точкой ветвления. Это делает понятным несостоятельность теории возмущений в неперенормируемых теориях. В ряде работ[12] в качестве модели неперенормируемых теорий использовалось нерелятивистское рассеяние на сингулярных потенциалах. В главе III с помощью уравнения Липпмана-Швингера рассматривается парциальная амплитуда рассеяния на потенциалах вида g/r^{2n}, $g>0$[13]. Если пытаться решать это уравнение итерациями, возникают степенные расходимости. Однако решение существует. Это доказывается с помощью сведения уравнения Липпмана-Швингера к дифференциальному уравнению по переменной p. Показано, что в случае потенциала отталкивания граничные условия, которые накладываются на решение дифференциального уравнения для того, чтобы оно было также решением интегрального уравнения, могут быть удовлетворены и притом единственным образом. Метод, примененный здесь, имеет существенные преимущества по сравнению с другими методами, так как обходится без введения вспомогательной регуляризации, а дает сразу конечный и вполне определенный ответ. В частном случае (потенциал g/r^4; $k^2=0$; $\ell=0$) решение можно выразить через хорошо изученные специальные функции, что дает возможность подробно изучить структуру разложения решений при малых g. При этом получается следующее разложение для амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности

$$f_0(p,p';0) = \frac{2}{\pi}\sqrt{g}\,pp' - \frac{2}{3\pi}\, g^{3/2}\log(\gamma\, g^{1/4})\,[p^2p' + p'^3p\,] + \\ + \theta(p-p')\left[-g\,\frac{pp'^2}{2} - g\,\frac{p'^3}{6}\right] + \theta(p'-p)\left[-g\,\frac{p'p^2}{2} - g\,\frac{p^3}{6}\right] + \ldots \tag{6}$$

Таким образом, точка $g=0$ является точкой ветвления точного решения, причем имеет место как корневое ветвление (члены, пропорциональные $\sqrt{g}$), так и логарифмическое ветвление (члены, пропорциональные $\log g$).

В главе IV рассматривается неперенормируемая теория взаимодействия массивных векторных частиц со скалярными[14]. Мы изучили приближенное линейное уравнение для вершинной функции. Приближение соответствует лестничному приближению в уравнении Бете–Солпитера для амплитуды рассеяния. В перенормируемых теориях подобное уравнение рассматривалось в работе /15/. Обозначим вершинную функцию через $\Gamma_\mu(p,k)$, где k –импульс векторной частицы, а скалярные частицы имеют импульсы $p+\frac{k}{2}$ и $p-\frac{k}{2}$. Рассмотрим случай $k_\mu = 0$. В этом случае вершина имеет простую структуру $\Gamma_\mu(p,0) = 2p_\mu F(p^2)$. В приближенном уравнении мы производим поворот контура интегрирования по p_0 на угол $\pi/2$ /16/. Запишем уравнение для $F(p^2)$ символически в виде:

$$F = Z + I + K^{(0)}F + K'F \, . \tag{7}$$

Здесь мы, пользуясь инвариантностью теории относительно группы перенормировок, ввели константу перенормировки вершины Z . Кроме того, мы разбили ядро на часть, которая дает постоянную:

$$I = \frac{g^2}{12}\int_0^\infty q^4\, dq^2\, \frac{F(q^2)}{(q^2+M^2)^2} \, , \tag{8}$$

где g пропорционально константе связи, а из остальной части выделили наиболее сингулярное ядро $K^{(0)}$. Сумма $Z+I$ обозначается через N и предполагается, что Z выбрано так, чтобы величина N была конечной. Постоянная N фиксируется условием нормировки на поверхности масс. Если представить F в виде $F^{(0)}+F'$, так чтобы $F^{(0)}$, F' удовлетворяли уравнениям:

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= N + K^{(0)}F^{(0)} \\ F' &= K'F^{(0)} + K^{(0)}F' + K'F' \, , \end{aligned} \tag{9}$$

то можно показать, что уравнение для $F^{(0)}$ имеет единственное решение при любом $N \neq 0$. В уравнении для F' можно поступить так же как в уравнении (7), т.е. отбросить $K'F'$, решить это уравнение, а затем написать уравнение для поправки F'' и т.д. Исследование уравнения для $F^{(0)}$ облегчается тем, что оно имеет простую форму

$$\begin{aligned} F^{(0)}(x) = N + \frac{g^2}{12}\Big\{ &\frac{1}{x^2}\int_0^x dy\, y^4\,\frac{F^{(0)}(y)}{(y+M^2)^2} - \frac{2}{x}\int_0^x dy\, y^3\,\frac{F^{(0)}(y)}{(y+M^2)^2} - \\ &- 2x\int_x^\infty y\, dy\, \frac{F^{(0)}(y)}{(y+M^2)^2} + x^2\int_x^\infty dy\,\frac{F^{(0)}(y)}{(y+M^2)^2}\Big\} \, , \end{aligned} \tag{10}$$

где $x=p^2$, $y=q^2$. Легко убедиться, что это интегральное уравнение может быть последовательным дифференцированием сведено к неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка. Для того, чтобы решение этого дифференциального уравнения удовлетворяло также интегральному уравнению (10), накладываются граничные условия в нуле и на бесконечности. Показано, что эти граничные условия могут быть удовлетворены, и притом единственным образом, т.е. существует единственное решение уравнения (10).

Так как постоянная N фиксируется условием нормировки, отсюда следует, что главная часть перенормированной вершинной функции определяется единственным образом. Решение уравнения (10) имеет следующую асимптотику при $x \to \infty$

$$F(x) \approx \frac{4N}{g^2 x} + x^{-3/8}\{ C \exp[-4 e^{i\frac{\pi}{4}} (g^2 x)^{1/4}] + \text{c.c.} \} \, . \tag{11}$$

Формула (11) позволяет нам обосновать поворот в плоскости p_0 на угол $\frac{\pi}{2}$, так как $F(x)$ убывает на бесконечности во всей комплексной плоскости x . Рассматривая второе из уравнений (9), мы убеждаемся, что F' не меняет асимптотики вершинной функции ни в нуле, ни на бесконечности. Таким образом, мы получили, что уравнение (7) для перенормированной вершинной функции имеет единственное решение в виде ряда $F(x) = \sum_{i=0} F^{(i)}(x)$, где каждая функция $F^{(i)}(x)$ является решением достаточно простого интегрального уравнения. Вопрос о сходимости этого ряда остается открытым. Разложение вершинной функции при малых g^2 подробно исследовано для случая нулевой массы скалярной частицы. При этом решение уравнения (10) выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию. В разложении решения при малых g^2 присутствуют члены, пропорциональные $g^2\log g^2$. Таким образом, точка $g^2=0$ является точкой ветвления, что и является причиной неприменимости теории возмущений.

Результаты глав III и IV свидетельствуют в пользу предположения, что в неперенормируемых теориях можно получить вполне определенные выражения, хотя ряд по константе связи не существует.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /3,9,13,14/. В обсуждении использовались также результаты работы /8/.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, Москва (1957).
2. F.J.Dyson. Phys. Rev., 85, 631 (1952).
3. Б.А. Арбузов. ДАН СССР, 128, 1149 (1959).
4. Л.Д. Ландау, А.А. Абрикосов, И.М. Халатников. ДАН СССР, 95, 1177 (1954).
5. P.J.Redmond. Phys. Rev., 112, 1404 (1958).
6. Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, Д.В. Ширков. ЖЭТФ, 37, 805 (1959).
7. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
8. Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталев. ЖЭТФ, 46, 1266 (1964).
9. B.A.Arbuzov, A.T.Filippov, O.A.Khrustalev. Phys. Lett., 8, 205 (1964).
10. T.D.Lee. Phys. Rev., 128, 9899 (1962); Phys. Rev. Lett., 12, 569 (1964).

11. G.Feinberg, A.Pais. Phys. Rev., 131, 2724 (1963); 133, 477 (1964).
12. N.N.Khuri, A.Pais. Rev. Mod. Phys., 36, 590 (1964).
A.Pais, T.T.Wu. Phys. Rev., 134, B1303 (1964).
13. B.A.Arbuzov, A.T.Filippov. Phys. Lett, 13, 95 (1964).
14. Б.А. Арбузов, А.Т. Филиппов. Препринт ОИЯИ, Р-1910, Дубна (1964).
15. S.Edwards. Phys. Rev., 90, 284 (1953).
16. G.C.Wick. Phys. Rev., 96, 1124 (1954).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1965 г.