

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С 324

Ф-288

Р.Н. Фаустов

1931

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук

А.Н. Тавхелидзе

Дубна 1965

Р.Н. Фаустов

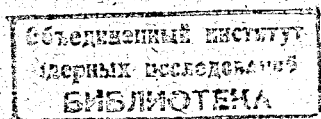
1931

**КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук

А.Н. Тавхелидзе



В диссертации рассматривается применение квазипотенциального метода^{/1/} к исследованию связанного состояния двух частиц в квантовой электродинамике.

Теория связанного состояния двух заряженных частиц (водород, мюоний, позитроний, мезоатомы) является одной из простейших и наиболее полно разработанных областей применения квантовой механики^{/2/}. Для таких систем поправочные члены, учитывающие движение и структуру атомного ядра, релятивистские и квантовоэлектродинамические эффекты, малы и могут быть вычислены с большой точностью^{/2,3/}. С другой стороны, уровни энергии этих систем можно с высокой степенью точности исследовать экспериментально. Благодаря этому, оказывается возможной проверка справедливости квантовой механики и квантовой электродинамики^{/3/}.

Диссертация содержит 3 главы. В § 1 введения дается краткая характеристика различных методов, применяемых для описания двухчастичных систем. Указаны основные достоинства и недостатки этих методов. Рассмотрены следующие методы:

- 1) нерелятивистское уравнение Шредингера и релятивистское уравнение Дирака^{/1,4/};
- 2) уравнение Швингера-Бете-Солпитера^{/2/};
- 3) метод Фока-Тамма-Данкова^{/2/};
- 4) метод, основанный на комбинации свойств аналитичности (дисперсионных соотношений) и условия унитарности^{/5/}.

В § 2 введения приведены некоторые формулы квантовой механики системы двух частиц. В случае стационарной задачи, когда сохраняется полная энергия E_α системы двух частиц, уравнение Шредингера для вектора состояния этой системы имеет вид^{/4/}

$$(E_\alpha - H) \psi_\alpha = 0, \quad (1)$$

где оператор H — полный гамильтониан системы. Предположим, что оператор H можно разбить на две части

$$H = H_0 + V, \quad (2)$$

где H_0 — оператор Гамильтона свободных, не взаимодействующих частиц, а оператор V — потенциал, описывающий взаимодействие частиц. Вектор состояния не взаимодействующих частиц при этом удовлетворяет уравнению

$$(E_\alpha - H_0) |\alpha\rangle = 0. \quad (3)$$

В случае задачи рассеяния функцию Грина уравнения (1) можно формально записать в виде:

$$G = (E_\alpha - H + i\epsilon)^{-1}, \quad (4)$$

где способ устранения сингулярности с помощью малой мнимой добавки $i\epsilon$ соответствует выбору решения в виде расходящейся рассеянной волны. Аналогично функция Грина уравнения (3)

$$G_0 = (E_\alpha - H_0 + i\epsilon)^{-1}. \quad (5)$$

Из сравнения равенств (4) и (5), с учетом определения (2) следует, что

$$V = G_0^{-1} - G^{-1}. \quad (6)$$

Таким образом, потенциал V может быть выражен в виде разности обратных функций Грина свободных и взаимодействующих частиц. Обычно в теории рассеяния вводится амплитуда рассеяния, определяемая с помощью соотношения

$$\langle \alpha | T | \beta \rangle = - \langle \alpha | V | \psi_\beta \rangle. \quad (7)$$

На энергетической поверхности амплитуда рассеяния просто связана с элементами S -матрицы:

$$\langle \alpha | S | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle - i2\pi\delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \alpha | T | \beta \rangle. \quad (8)$$

Амплитуда рассеяния удовлетворяет уравнению Липмана-Швингера

$$\langle \alpha | T | \beta \rangle = \langle \alpha | V | \beta \rangle + \sum_\gamma \frac{\langle \alpha | V | \gamma \rangle \langle \gamma | T | \beta \rangle}{E_\beta - E_\gamma}. \quad (9)$$

Оператор T может быть выражен через функции Грина G и G_0 из соотношения

$$G = G_0 + G_0 T G_0. \quad (10)$$

Соответственно потенциал V может быть определен через оператор T равенством

$$V = T(1 + G_0 T)^{-1}, \quad (11)$$

эквивалентным (6).

В случае наличия связанных состояний в системе двух частиц мы имеем задачу на собственные значения:

$$(H_0 + V) |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle. \quad (12)$$

Глава III посвящена рассмотрению задачи о связанном состоянии двух частиц в квантовой электродинамике на основе квазипотенциального метода /1/.

В § 3 приведена краткая формулировка квазипотенциального метода. Исключение нефизической переменной относительного времени в ковариантной волновой функции двух частиц приводит к использованию двухвременной функции Грина двух частиц. В импульсном пространстве двухвременная функция Грина \bar{G} определяется через четырехвременную функцию Грина G с помощью соотношения /1/

$$\bar{G}(\vec{p}, \vec{q}; E) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon d\epsilon' G(\vec{p}, \vec{q}, \epsilon, \epsilon'; E), \quad (13)$$

где \vec{p} и \vec{q} - импульсы частиц в системе центра масс, а E - полная энергия (см. рисунок).

На основе функций Грина \bar{G} и G можно, используя равенство (10), построить соответствующие амплитуды рассеяния \bar{T} и T , связанные соотношением

$$\bar{T} = \bar{G}_0^{-1} \overline{G_0 T G_0} \bar{G}_0^{-1}, \quad (14)$$

где $\bar{G}_0 = -iS_1 \cdot S_2$, $S_{1,2}$ - полные одночастичные функции Грина. Тогда квазипотенциал V определяется через амплитуду рассеяния \bar{T} с помощью равенства, аналогичного (11),

$$V = \bar{T} (1 + \bar{G}_0 \bar{T})^{-1}. \quad (15)$$

При этом волновая функция связанного состояния удовлетворяет уравнению (12).

В Приложении А показано, что на энергетической поверхности $E^2 = (\sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + M^2})^2$, $p^2 = q^2$ амплитуда рассеяния \bar{T} совпадает с амплитудой рассеяния T на массовой поверхности и дает таким образом физическую амплитуду рассеяния.

В § 4 рассмотрена перенормировка квазипотенциального уравнения /6/. При этом показано, что в теориях, где расходятся лишь собственно-энергетические и вершинные части (например, в квантовой электродинамике), в квазипотенциале не возникает других расходимостей, кроме тех, которые характерны для S -матрицы /3,5/.

В § 5 дается другой возможный метод определения квазипотенциала V . В этом методе амплитуда рассеяния \tilde{T} в выражении (15) определяется через амплитуду рассеяния T с помощью равенства

$$\tilde{T}(\vec{p}, \vec{q}; E) = T(\vec{p}, \vec{q}, \epsilon = 0, \epsilon' = 0; E). \quad (16)$$

Проведено сравнение обоих методов построения квазипотенциала на примере простой модели, где две скалярные частицы взаимодействуют с помощью обмена скалярными "фотонами" /7/. Показано, что для уровней энергии связанного состояния двух частиц в этой модели получаются одинаковые выражения по теории возмущений. При этом, однако, вычисления во втором методе, основанном на равенстве (16), оказываются значительно проще.

В § 6 рассмотрены некоторые особенности, которые возникают при построении квазипотенциального уравнения для системы двух фермионов из-за наличия спинорной матричной структуры /8,9/. Из равенств (14) и (15) видно, что квазипотенциал V выражается через \tilde{G}_0^{-1} , т.е. необходимо, чтобы $\det \tilde{G}_0 \neq 0$. При использовании полных одночастичных функций Грина это условие выполняется. Однако, когда в качестве $S_{1,2}$ в низшем приближении используются "голые" пропагаторы фермионов, для \tilde{G}_0 получается выражение:

$$(2\pi)^4 \tilde{G}_0(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\frac{\Lambda_+^{(1)} \Lambda_+^{(2)}}{E - \epsilon_m - \epsilon_M} - \frac{\Lambda_-^{(1)} \Lambda_-^{(2)}}{E + \epsilon_m + \epsilon_M} \right] \beta^{(1)} \beta^{(2)},$$

$$\Lambda_{\pm}^{(1)} = \frac{\epsilon_m \pm (\alpha^{(1)} k + \beta^{(1)} m)}{2\epsilon_m},$$

$$\Lambda_{\pm}^{(2)} = \frac{\epsilon_M \pm (\alpha^{(2)} k + \beta^{(2)} M)}{2\epsilon_M},$$

$$\epsilon_m = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad \epsilon_M = \sqrt{k^2 + M^2}$$

и, как нетрудно убедиться, $\det \tilde{G}_0 = 0$.

Это является, вообще говоря, следствием того, что мы перешли к трехмерному евклидову пространству импульсов, сохранив четырехкомпонентные величины четырехмерного пространства Лоренца. Поэтому естественно перейти также к двухкомпонентным величинам трехмерного евклидова пространства. Этого можно достигнуть, определяя квазипотенциал следующим образом:

$$V = \tilde{T}_+ (1 + \tilde{F}_+ \tilde{T}_+)^{-1}, \quad (18)$$

где

$$\tilde{T}_+(\vec{p}, \vec{q}) = \bar{u}_1(\vec{p}) \bar{u}_2(-\vec{p}) \tilde{T}(\vec{p}, \vec{q}) u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}),$$

$$\tilde{F}_+(p) = \frac{1}{E - \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p^2 + M^2}},$$

а $u_{1,2}$ - спиноры для состояний с положительной энергией (спинорные и поляризационные индексы опущены). Уравнение для волновой функции связанного состояния имеет вид:

$$(E - \sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p^2 + M^2}) \psi(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(p, q) \psi(q) dq. \quad (19)$$

Величины ψ , V и \tilde{T}_+ имеют индексы, каждый из которых может принимать два значения.

В § 7 получена величина сверхтонкого расщепления основного уровня энергии водорода, включая члены порядка $a^5 (m/M)^2$ (a - постоянная тонкой структуры, m - масса электрона, M - масса протона) /9/.

В настоящее время величина сверхтонкого расщепления основного уровня энергии водорода измерена с очень высокой точностью. Много работ /10-14/ было посвящено теоретическому вычислению поправок к хорошо известной формуле Ферми /2/. Однако до сих пор остается существенная неопределенность в той части поправок, которая связана с конечностью массы и структурой протона. Основные трудности возникают здесь из-за того, что протон в отличие от электрона не является точечной дираковской частицей, так как вследствие сильных взаимодействий обладает большим аномальным магнитным моментом. Учет аномального магнитного момента обычно производится феноменологически с помощью добавления к обычной дираковской вершине $e\gamma^\mu$ взаимодействия Паули $i(e g/2M) \sigma_{\mu\nu} k^\nu$. При этом, однако, уже вторая итерация этого взаимодействия (двухфотонный обмен между электроном и протоном) дает логарифмически расходящийся результат. Чтобы избежать этого, в работах /10,11/, вводилось обрезание, что, конечно, не является последовательным. Впервые на возможность использования формфакторов при вычислении поправок, связанных со структурой протона, указал Земах /12/. В этой работе, в частности, было проведено нерелятивистское вычисление вклада электромагнитных формфакторов протона и сверхтонкое расщепление.

В работе /13/ при вычислении вклада двухфотонного обмена были использованы модельные формфакторы, убывающие как $1/k^4$. При этом, однако, не был учтен вклад формфакторов в однофотонный обмен.

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные вплоть до $k^2 = 175 f^{-2}$ показывают, что формфакторы убывают примерно как $1/k^2$.

Простейшей функцией такого вида, нормированной в нуле на 1, является

$$f(k_\lambda^2) = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - \kappa_\lambda^2}, \quad \kappa_\lambda^2 = \kappa_0^2 - k^2.$$

Мы примем, что взаимодействие электромагнитного поля с протоном описывается эффективной вершиной вида

$$\Gamma_\mu(k_\lambda) = e\gamma_\mu + ig \frac{e}{2M} \sigma_{\mu\nu} k^\nu f(k_\lambda^2), \quad (20)$$

где $g = 1,79$ - аномальный магнитный момент протона.

Для вычисления поправок к формуле Ферми, связанных со структурой и конечностью массы протона, мы используем квазипотенциальное уравнение (19).

В интересующем нас приближении достаточно ограничиться членами до четвертого порядка включительно в разложении амплитуды рассеяния по заряду электрона. Кроме того, диаграммы двухфотонного обмена сведены к итерации двух диаграмм однофотонного обмена. Разлагая выражение (18) для квазипотенциала V в ряд по заряду электрона, получим последовательно

$$V = T_+^{(2)}, \quad (21)$$

$$V = T_+^{(4)} - T_+^{(2)} F_+^{(2)} T_+^{(2)},$$

За исходное приближение естественно взять кулоновский потенциал \bar{U} , входящий в $T_+^{(2)}$

$$V = \bar{U} + \Delta V^{(2)} + V^{(4)}. \quad (22)$$

При вычислении поправки ΔE к кулоновским уровням энергии необходимо учесть член второго порядка теории возмущений. Таким образом, мы имеем:

$$\Delta E = \langle\langle \Delta V^{(2)} \rangle\rangle + \langle\langle V^{(4)} + \Delta V^{(2)} F_+^{(2)} \Delta V^{(2)} \rangle\rangle, \quad (23)$$

где символ $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ обозначает матричный элемент по волновым функциям уравнения

(19) с кулоновским потенциалом.

Проводя соответствующие вычисления, мы получаем для величины сверхтонкого расщепления основного уровня энергии водорода выражение /9/

$$\Delta W_H = \frac{8\alpha^4 m^2}{3M} (1+g)(1 + \frac{\alpha}{2\pi})(1 + \frac{m}{M})^{-3} (1-\delta), \quad (24)$$

$$\delta = \frac{4\alpha mg}{\kappa(1+g)} + \frac{3\alpha m}{4\pi M(1+g)} [(4-g^2) \ln \frac{M}{m} - \frac{g^2}{4} -$$

$$-g^2 \ln \frac{\kappa}{M} + \frac{4g^2 \kappa}{\sqrt{4M^2 - \kappa^2}} \arctg \frac{\sqrt{4M^2 - \kappa^2}}{\kappa}], \quad \kappa < 2M.$$

В § 8 вычислена разность основных уровней триплетного и синглетного основных уровней позитрония /8/, включая члены порядка α^5 . Исследование связанного состояния электрона и позитрона (позитрония) представляет особый интерес. Это связано с тем, что, во-первых, позитроний в отличие от атома водорода является чисто электродинамической системой и, следовательно, допускает строгое описание в рамках квантовой электродинамики; во-вторых, благодаря наличию аннигиляционного канала, здесь имеется ряд эффектов, характерных для теории пар Дирака, которые отсутствуют в других подобных системах.

Общая схема вычислений в этой задаче аналогична рассмотренной в предыдущем параграфе. Уровни энергии позитрония можно разделить на синглетные (полный спин равен нулю) и триплетные (полный спин равен единице). В низшем приближении мы имеем кулоновские уровни энергии. В следующих приближениях появляется расщепление этих уровней. Разность триплетного и синглетного основных уровней при этом получается равной /8/

$$\Delta W_P = \frac{\alpha^4 m}{2} \left[\frac{7}{6} - \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{16}{9} + \ln 2 \right) \right]. \quad (25)$$

Член порядка α^4 был ранее получен в /105/. Поправка порядка α^5 была впервые вычислена в работе /16/ с помощью уравнения Бете-Солпитера.

В главе III дано обсуждение результатов и заключение.

В выражении (24) величины сверхтонкого расщепления основного уровня энергии водорода содержит параметр κ , имеющий порядок массы протона, и, поскольку точная величина его неизвестна, мы рассмотрим несколько значений отношения M^2/κ^2 .

Экспериментальное значение величины сверхтонкого расщепления основного уровня водорода равно /17/

$$\Delta W_{\text{H}}^{\text{hts}} (\text{exp}) = 1420405751, 800 \pm 0,028 \text{ гц.} \quad (26)$$

Для сравнения теоретического и экспериментального значения удобно ввести величину

$$\Delta = \frac{\Delta W_{\text{H}} (\text{exp}) - \Delta W_{\text{H}} (\text{theor})}{\Delta W_{\text{H}} (\text{exp})} \quad (27)$$

Используя для всех прочих параметров значения, приведенные в /18/, мы на основании (24), (26) и (27) получим следующие результаты.

Т а б л и ц а 1

M^2/K^2	δ	$\Delta W_{\text{H}} (\text{theor}) \text{ Мгц}$	$\Delta (\text{ppm})$
1,5	16,7	$1420,368 \pm 0,024$	27 ± 17
1	14,6	$1420,371 \pm 0,024$	25 ± 17
0,5	12	$1420,375 \pm 0,024$	22 ± 17
0,25	10,2	$1420,377 \pm 0,024$	20 ± 17

Из таблицы 1 видно, что имеется некоторое расхождение между теоретическим и экспериментальным значением $\Delta W_{\text{H}}^{\text{hts}}$, которое однако меньше приведенного в /18,13/. Ошибка в величине $\Delta W_{\text{H}} (\text{theor})$ связана в основном с неопределенностью в значении α , поэтому расхождение между $\Delta W_{\text{H}} (\text{exp})$ и $\Delta W_{\text{H}} (\text{theor})$ вызвано, по-видимому, неточным учетом сильных взаимодействий особенно в диаграммах двухфотонного обмена.

С другой стороны, для позитрония, который является чисто электродинамической системой, мы имеем полное согласие теории и эксперимента /19/:

$$\Delta W_{\text{P}} (\text{theor}) = 2,0337 \cdot 10^8 \text{ Мгц} \quad (28)$$

$$\Delta W_{\text{P}} (\text{exp}) = (2,0336 \pm 0,0002) \cdot 10^8 \text{ Мгц}$$

Это согласие служит важным подтверждением основных идей и методов квантовой электродинамики.

Основное преимущество квазипотенциального метода по сравнению с ковариант-

ным уравнением Бете-Солпитера состоит в близости квазипотенциального уравнения к обычному уравнению Шредингера, вследствие чего мы имеем дело с трехмерными волновыми функциями. Кроме того, построение квазипотенциала значительно облегчается, поскольку он определяется в терминах амплитуды рассеяния /1/.

Все вышесказанное позволяет сделать вывод, что квазипотенциальный подход в квантовой теории поля /1/ является эффективным методом в задаче об уровнях энергии связанного состояния двух частиц в квантовой электродинамике.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /6-9/ и докладывались на Всесоюзном совещании по физике частиц высоких энергий (Новосибирск, СО АН СССР, 1963 год); в Международной летней школе теоретической физики (Бангалур, Индия, 1963 год); в Международной зимней школе теоретической физики при ОИЯИ (Дубна, 1964 год); на Международной конференции по физике высоких энергий (Дубна, 1964 год).

Л и т е р а т у р а

1. А.А. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
2. Г. Бете, Э. Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Физматгиз, Москва, 1960.
3. А.И. Ахизер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Физматгиз, Москва, 1969.
4. П.А.М. Дирак. Принципы квантовой механики. Физматгиз, Москва, 1960.
5. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, Москва, 1967.
6. Р.Н. Фаустов, ДАН СССР, 156, 1329 (1964).
7. Nguyen Van Hieu, R.N. Faustov. Nucl. Phys., 53, 337 (1964).
8. Р.Н. Фаустов. Труды Международной зимней школы теоретической физики при ОИЯИ т. 2, стр. 108, Дубна, 1964; Препринт ОИЯИ, Р-1572, Дубна, 1964.
9. Р.Н. Фаустов. Препринт ОИЯИ, Р-1911, Дубна, 1964; Nucl. Phys. (в печати).
10. R. Arnowitt. Phys. Rev., 92, 1002 (1953).
11. W.A. Newcomb and E.E. Salpeter. Phys. Rev., 97, 1146 (1955).
12. A.C. Zemach. Phys. Rev., 104, 1771 (1956).
13. C.K. Iddings, P.M. Platzman. Phys. Rev., 113, 192 (1958); Phys. Rev., 115, 919 (1959).
14. D.A. Hokensmith, L.L. Foldy. Phys. Rev., 113A, 1514 (1964).
15. J. Pirene. Arch. Sci. Phys., 29, 121, 207, 265 (1947);
В.Б. Берестецкий, Л.Д. Лавда. ЖЭТФ, 19, 673, 1130 (1949).
16. R. Karplus, A. Klein. Phys. Rev., 87, 848 (1952).
17. S.B. Crampton, D. Kleppner, N.F. Ramsey. Phys. Rev. Lett., 11, 338 (1963).

18. W.E.Cleland et al. Phys. Rev. Lett., 13, 202 (1964).

19. V.W.Hughes, S.Marder, C.S.Wu. Phys. Rev., 106, 934 (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1964 г.

