

Ц 701
В-124

27/8-6

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

1827



В.А. Вагин, В.И. Котов

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ВОЛН
В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ,
ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1964

1827

В.А. Вагян, В.И. Котов

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ВОЛН
В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ,
ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Направлено в ЖТФ

Объединенный институт
высоких исследований
БИБЛИОТЕКА

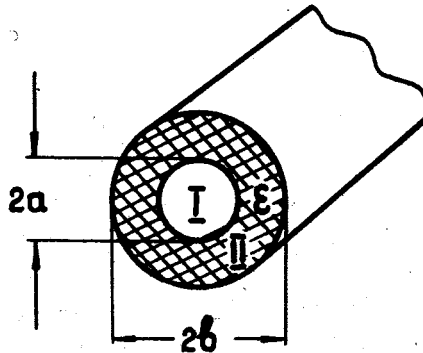
2720/2 чр

Введение

В последнее время большой интерес проявляется к исследованию гибридных электромагнитных волн в волноводных структурах. В первую очередь этот интерес вызван интенсивной разработкой методов сепарации заряженных частиц высоких энергий (см., например /1/. Кроме того гибридные волны могут найти свое применение при разработке многих приборов СВЧ.

Более или менее детальное изучение гибридных волн (как теоретическое /2,3/, так и экспериментальное /4-6/) проведено в диафрагмированных волноводах. В круглых волноводах с частичным заполнением диэлектриком подробно исследованы лишь симметричные ТМ и ТЕ волны (см., например /7/), а в работах /8,9/ дан вывод дисперсионного уравнения также и для несимметричных волн; анализ уравнения при этом не проводится.

В настоящей работе исследованы условия распространения и свойства гибридных волн в волноводе, частично заполненном диэлектриком. Основное внимание при этом уделяется случаю, когда фазовая скорость волны близка к скорости света, ибо с точки зрения сепарации заряженных частиц данный случай представляет наибольший интерес. Геометрия задачи и обозначения приведены на рис. 1.



Р и с. 1.

Геометрия задачи и обозначения.

Предположим, что поля в волноводе описываются выражениями

$$\vec{E} = \vec{E}(\rho) e^{i(\omega t - \kappa z + \nu \theta)}, \quad \vec{H} = \vec{H}(\rho) e^{i(\omega t - \kappa z + \nu \theta)}, \quad (1)$$

где ρ , θ , z — цилиндрические координаты, $\kappa = \frac{\omega}{v_\phi}$ — постоянная распространения, ω — круговая частота, v_ϕ — фазовая скорость волны, $\nu = 0, 1, 2, \dots$

Для нахождения компонент поля воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= ik \epsilon_j \vec{E}, & \text{rot } \vec{E} &= -ik \vec{H}, \\ \text{div } \vec{D} &= 0, & \text{div } \vec{H} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, а значок $j = 1, 2$, у ϵ указывает, в какой области ищется решение (см. рис. 1); при этом $\epsilon_1 = 1$, а $\epsilon_2 = \epsilon$.

Уравнения для определения компонент электрического и магнитного полей, получаемые из уравнений (2) с учетом (1), в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta_\rho \mathcal{E}_z + (h_1^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}) \mathcal{E}_z &= 0, \\ \Delta_\rho(\rho \mathcal{E}_\rho) + (h_1^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}) \rho \mathcal{E}_\rho &= 2ik \mathcal{E}_z, \\ \Delta_\rho(\rho \mathcal{E}_\theta) + (h_1^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}) \rho \mathcal{E}_\theta &= -2ik \mathcal{H}_z. \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta_\rho \mathcal{H}_z + (h_1^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}) \mathcal{H}_z &= 0, \\ \Delta_\rho(\rho \mathcal{H}_\rho) + (h_1^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}) \rho \mathcal{H}_\rho &= 2ik \mathcal{H}_z, \\ \Delta_\rho(\rho \mathcal{H}_\theta) + (h_1^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}) \rho \mathcal{H}_\theta &= 2ik \epsilon_j \mathcal{E}_z. \end{aligned} \quad (4)$$

где оператор $\Delta_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ и $h_1^2 = k^2 \epsilon_j - \kappa^2$.

Уравнения для \mathcal{E}_z и \mathcal{H}_z представляют собой обычные уравнения Бесселя. При $h_1 = 0$ они переходят в уравнения Лапласа. Поэтому в области I при $\nu_\phi = c$ (т.е. при $h_1^2 = k^2 - \kappa^2 = 0$) решения этих уравнений удобно выбрать в виде:

$$\mathcal{E}_z = A \gamma_1^{-\nu} I_\nu(h_1 \rho), \quad \mathcal{H}_z = i B \gamma_1^{-\nu} J_\nu(h_1 \rho), \quad (5)$$

где $\gamma_1 = \frac{h_1}{k}$ и $J_\nu(h_1 \rho)$ — функция Бесселя. При такой записи решения (5) остаются конечными при $\nu \rightarrow \infty$:

$$\xi_z = -A \frac{(k\rho)^\nu}{\nu 12^\nu}, \quad K_z = -iB \frac{(k\rho)^\nu}{\nu 12^\nu}. \quad (6)$$

В дальнейшем для краткости введем обозначение:

$$J_\nu^{(1)}(h_1 \rho) = \gamma_1^\nu J_\nu(h_1 \rho).$$

Остальные уравнения (3) и (4), определяющие компоненты ξ_ρ , ξ_θ и K_ρ , K_θ , представляют собой уравнения Бесселя с правой частью по отношению к соответствующей компоненте поля, умноженной на ρ . Решения этих уравнений вместе с решениями (5) будут содержать шесть постоянных, которые можно свести к двум, используя уравнения (2). Удобно выбрать в качестве независимых постоянные в выражениях для компонент ξ_θ и K_ρ . В результате поля в области I приобретают следующий симметричный вид:

$$\begin{aligned} \xi_z &= (P + \frac{\kappa}{k} Q) J_\nu^{(1)}(h_1 \rho), \\ \xi_\rho &= -i \left\{ P \frac{\kappa}{k} J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 \rho) + Q \left[\frac{\kappa^2}{k^2} J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 \rho) + \frac{\nu}{k\rho} J_\nu^{(1)}(h_1 \rho) \right] \right\}, \\ \xi_\theta &= P \frac{\kappa}{k} J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 \rho) + Q \left[J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 \rho) - \frac{\nu}{k\rho} J_\nu^{(1)}(h_1 \rho) \right], \\ K_z &= -i \left(P \frac{\kappa}{k} + Q \right) J_\nu^{(1)}(h_1 \rho), \\ K_\rho &= -P \left[\frac{\kappa^2}{k^2} J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 \rho) + \frac{\nu}{k\rho} J_\nu^{(1)}(h_1 \rho) \right] - Q \frac{\kappa}{k} J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 \rho), \\ K_\theta &= -i \left\{ P \left[J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 \rho) - \frac{\nu}{k\rho} J_\nu^{(1)}(h_1 \rho) \right] + Q \frac{\kappa}{k} J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 \rho) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

В работе /3/ была получена такая же структура полей в околоосевой области диафрагмированного волновода при использовании поперечных электрического $\vec{\Pi}_e$ и магнитного $\vec{\Pi}_h$ векторов Герца. При этом решение, соответствующее вектору $\vec{\Pi}_e$ было названо гибридной электрической модой HE (в нашем случае это решение совпадает с (7), если там положить $P=0$, а решение, определяемое вектором $\vec{\Pi}_h$ дает гибридную магнитную моду HM (в выражениях (7) нужно положить $Q=0$). Поля в околоосевой области диафрагмированного волновода, а также в области I рассматриваемой нами волноводной структуры представляются суммой этих двух типов решений. Соотношения между постоянными P и Q находятся из граничных условий.

Выражения для полей в области II имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z &= C_1 J_\nu(h_2 \rho) + D_1 N_\nu(h_2 \rho), & \mathcal{H}_z &= i[C_2 J_\nu(h_2 \rho) + D_2 N_\nu(h_2 \rho)], \\ \mathcal{E}_\rho &= \frac{\nu k}{h_2 \rho} \mathcal{H}_z - \frac{i k}{h_2} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \rho}, & \mathcal{H}_\rho &= -\frac{\nu k \epsilon}{h_2^2 \rho} \mathcal{E}_z - \frac{i k}{h_2} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial \rho}, \\ \mathcal{E}_\theta &= \frac{\nu k}{h_2 \rho} \mathcal{E}_z + \frac{i k}{h_2} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial \rho}, & \mathcal{H}_\theta &= \frac{\nu k}{h_2^2 \rho} \mathcal{H}_z - i \frac{k \epsilon}{h_2} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (8)$$

где C_1 , C_2 , D_1 , D_2 — независимые постоянные, а $N_\nu(h_2 \rho)$ — функция Неймана.

Для определения соотношений между амплитудами полей в областях I и II и получения дисперсионного уравнения воспользуемся следующими граничными условиями:

- 1) равенство нулю тангенциальных компонент E_z и E_θ на металлической стенке волновода при $\rho = b$;
- 2) равенство тангенциальных составляющих E_z , E_θ , H_z и H_θ на границе раздела двух сред при $\rho = a$.

Введем также функции

$$\begin{aligned} \psi_0(b, \rho) &= \begin{vmatrix} J_\nu(h_2 b) & N_\nu(h_2 b) \\ J_\nu(h_2 \rho) & N_\nu(h_2 \rho) \end{vmatrix}, & \psi_1(b, \rho) &= \begin{vmatrix} J_{\nu+1}(h_2 b) & N_{\nu+1}(h_2 b) \\ J_{\nu+1}(h_2 \rho) & N_{\nu+1}(h_2 \rho) \end{vmatrix}, \\ \phi_0(b, \rho) &= \begin{vmatrix} J'_\nu(h_2 b) & N'_\nu(h_2 b) \\ J'_\nu(h_2 \rho) & N'_\nu(h_2 \rho) \end{vmatrix}, & \phi_1(b, \rho) &= \begin{vmatrix} J'_{\nu+1}(h_2 b) & N'_{\nu+1}(h_2 b) \\ J'_{\nu+1}(h_2 \rho) & N'_{\nu+1}(h_2 \rho) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

которые подчиняются всем соотношениям для цилиндрических функций и, в частности, удовлетворяют:

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} = \frac{\nu}{h_2 \rho} \psi_0 - \psi_1, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi_0}{\partial \rho} = \frac{\nu}{h_2 \rho} \phi_0 - \phi_1. \quad (10)$$

Кроме того, в дальнейшем нами будут использованы следующие свойства этих функций:

$$\begin{aligned} \psi_0(b, b) &= 0, & \psi_1(b, b) &= -\frac{2}{\pi h_2 b}, \\ \phi_0(b, b) &= 0, & \phi_1(b, b) &= -\frac{2\nu}{\pi h_2^2 b^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользовавшись четырьмя граничными условиями из шести и учитывая (9), после громоздких, но довольно простых выкладок, можно выразить постоянные C_1, C_2, D_1, D_2 через $p = P J_\nu^{(1)}(h_1 a)$ и $q = Q J_\nu^{(1)}(h_1 a)$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{N_\nu(h_2 b)}{\psi_0(b, a)} \left(p + \frac{\kappa}{k} q \right), & C_2 &= -\frac{N'_\nu(h_2 b)}{\phi_0(b, a)} \left(p \frac{\kappa}{k} + q \right), \\ D_1 &= \frac{J_\nu(h_2 b)}{\psi_0(b, a)} \left(p + \frac{\kappa}{k} q \right), & D_2 &= \frac{J'_\nu(h_2 b)}{\phi_0(b, a)} \left(p \frac{\kappa}{k} + q \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Выищем выражения полей в области I и II в интересующем нас случае $\nu_\phi = c$ или $\gamma_1 = 0$. Подставляя (12) в (8) и полагая $\kappa = k$, получим компоненты поля в области II

$$\begin{aligned} \bar{E}_z &= (p+q) \frac{\psi_0(b, \rho)}{\psi_0(b, a)}, & \bar{H}_z &= i(p+q) \frac{\phi_0(b, \rho)}{\phi_0(b, a)}, \\ \bar{E}_\rho &= \frac{i}{\gamma_2} (p+q) \left[\frac{\nu}{h_2 \rho} \frac{\phi_0(b, \rho)}{\phi_0(b, a)} - \frac{1}{\psi_0(b, a)} \frac{\partial \psi_0(b, \rho)}{\partial (h_2 \rho)} \right], & \bar{H}_\rho &= -\frac{1}{\gamma_2} (p+q) \left[\frac{\nu}{h_2 \rho} \frac{\psi_0(b, \rho)}{\psi_0(b, a)} - \frac{1}{\phi_0(b, a)} \frac{\partial \phi_0(b, \rho)}{\partial (h_2 \rho)} \right], \\ \bar{E}_\theta &= \frac{1}{\gamma_2} (p+q) \left[\frac{\nu}{h_2 \rho} \frac{\psi_0(b, \rho)}{\psi_0(b, a)} - \frac{1}{\phi_0(b, a)} \frac{\partial \phi_0(b, \rho)}{\partial (h_2 \rho)} \right], & \bar{H}_\theta &= \frac{i}{\gamma_2} (p+q) \left[\frac{\nu}{h_2 \rho} \frac{\phi_0(b, \rho)}{\phi_0(b, a)} - \frac{1}{\psi_0(b, a)} \frac{\partial \psi_0(b, \rho)}{\partial (h_2 \rho)} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{где } \gamma_2 = \frac{h_2}{k}.$$

Выражения для компонент полей (7) в области I, учитывая свойства функций $J_\nu^{(1)}$ и $J_{\nu+1}^{(1)}$ (см. (5) и (6)) при $\gamma_1 = 0$ и переходя от коэффициентов P и Q к постоянным p и q , могут быть представлены в данном случае следующим образом:

$$\xi_z = (p + q) \left(\frac{\rho}{a} \right)^\nu,$$

$$\xi_\rho = -i \left\{ p \frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu+1} + q \left[\frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu+1} + \frac{\nu}{ka} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu-1} \right] \right\},$$

$$\xi_\theta = -p \frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu+1} + q \left[\frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu+1} - \frac{\nu}{ka} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu-1} \right], \quad (14)$$

$$\kappa_n = -i(p + q) \left(\frac{\rho}{a} \right)^\nu,$$

$$\kappa_\rho = -p \left[\frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu+1} + \frac{\nu}{ka} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu-1} \right] - q \frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu+1},$$

$$\kappa_\theta = -i \left\{ p \left[\frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu+1} - \frac{\nu}{ka} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu-1} \right] + q \frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu+1} \right\}.$$

Использование оставшихся граничных условий позволяет найти соотношение между постоянными p и q . Для случая $\gamma_1 = 0$ оно имеет следующий достаточно простой вид:

$$p \left[\frac{\epsilon \psi_1(b, a)}{\psi_0(b, a)} - \frac{h_2 a}{2(\nu+1)} \right] = q \left[(\epsilon - 1) \frac{\nu}{h_2 a} - \frac{\epsilon \psi_1(b, a)}{\psi_0(b, a)} + \frac{h_2 a}{2(\nu+1)} \right]. \quad (15)$$

Дисперсионное соотношение и его анализ

Граничные условия, приведенные выше, позволяют найти дисперсионное уравнение обычным способом. Оно имеет следующий вид:

$$\gamma_1^2 \gamma_2^2 \Phi \Psi + \frac{\nu}{ka} (\epsilon - 1) [(1 - \gamma_1^2) \Phi + \Psi] = 0, \quad (16)$$

где

$$\Phi = \frac{\phi_1(b, a)}{\gamma_2 \psi_0(b, a)} - \frac{J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 a)}{J_\nu^{(1)}(h_1 a)}, \quad \Psi = \frac{\epsilon \psi_1(b, a)}{\gamma_2 \psi_0(b, a)} - \frac{J_{\nu+1}^{(1)}(h_1 a)}{J_\nu^{(1)}(h_1 a)}.$$

Дисперсионное уравнение (16) при $\nu = 0$ распадается на два:

$$\Phi = 0 \quad \text{и} \quad \Psi = 0,$$

что соответствует известному факту - возможности независимого существования в таком волноводе симметричных E - и H -волн. При этом $\Phi = 0$ представляет со-

бой дисперсионное уравнение для Н-волн, а $\Psi = 0$ -соответственно для Е-волн (см. /7/). В случае, когда $v_{\phi} = c$ ($\gamma_1 = 0$) уравнение (16) переходит в следующее:

$$\Phi + \Psi = 0 ; \quad (17)$$

после несложных преобразований, учитывая, что при $\gamma_1 = 0$ выражение $\frac{J_{\nu}^{(\nu)}(\gamma)}{\gamma^{\nu+1}} = \frac{k a}{2(\nu+1)}$ его можно записать в виде

$$\epsilon \psi_1 \phi_0 + \psi_0 \phi_1 - \frac{h_2 a}{\nu+1} \psi_0 \phi_0 = 0 . \quad (18)$$

Проведем исследование уравнения (18). Для этого определим условия существования гибридной волны $\epsilon_{\nu m}$ (ν - азимутальное число, m - радиальное число, или номер корня дисперсионного уравнения) при $\gamma_1 = 0$. Соответствующие расчеты для случая $\nu = 1$ позволили найти зависимость $h_2 b$ от отношения a/b для заданного ϵ . Эта зависимость представлена на рис. 2 для $\epsilon = 10$ и четырех значений $m = 1, 2, 3, 4$. На этом же рисунке для нижней ветви ($m = 1$) даны аналогичные кривые при значениях $\epsilon = 2$ (пунктирная кривая а) и $\epsilon = 100$ (пунктирная кривая б). На рис. 3 представлены кривые $h_2 b$ от ϵ при нескольких значениях a/b для случая $m = 1$. Из графиков рис. 2 и 3 видно, что при малых значениях a/b и больших ϵ величина $h_2 b$ слабо зависит от ϵ . Это означает, что в данной области параметров a/b и ϵ отношение $\frac{b}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon-1}}$, где λ -длина волны.

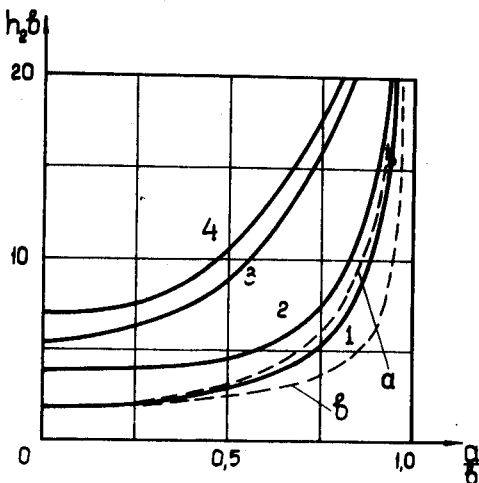
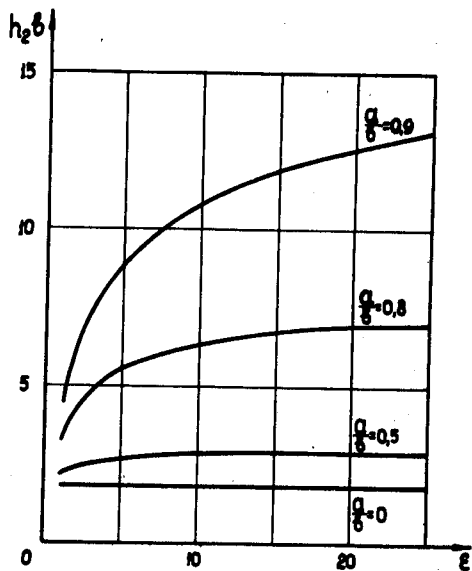


Рис. 2. Зависимость частоты от параметров волновода для $\nu = 1$ при $\epsilon = 10$ и $v_{\phi} = c$.



Р и с. 3.

Зависимость частоты от ϵ для фиксированных значений a/b при $\nu = 1, m = 1$.

В предельном случае, когда $\frac{a}{b} = 0$, величина $h_2 b$ является корнем одного из уравнений $J_\nu(h_2 b) = 0$ и $J'_\nu(h_2 b) = 0$, и гибридная волна $g_{\nu m}$ в этом предельном случае при нечетных m превращается в H -волну, а при четных m - в E -волну. Далее можно показать (см. Приложение А), что при малых значениях $h_2 a$ ($h_2 a \ll 1$) уравнение (18) распадается на два независимых уравнения:

$$(a) \quad J'_\nu(h_2 b) + N'_\nu(h_2 b) \frac{\pi \epsilon}{(\epsilon+1) \nu! (\nu-1)!} \left(\frac{h_2 a}{2}\right)^{2\nu} = 0, \quad (19)$$

$$(б) \quad J_\nu(h_2 b) + N_\nu(h_2 b) \frac{\pi}{(\epsilon+1) \nu! (\nu-1)!} \left(\frac{h_2 a}{2}\right)^{2\nu} = 0,$$

из которых, в частности, непосредственно следует указанный выше факт вырождения гибридных волн в H или E волны при $h_2 a \rightarrow 0$.

Найдем групповую скорость $v = c \beta$, где $\beta = \frac{dk}{d\kappa}$, при $v_\phi = c$. Для этого продифференцируем уравнение (16) по κ и затем положим $\gamma_1 = 0$. В результате получим следующее уравнение для групповой скорости:

$$\frac{d\gamma_1^2}{d\kappa} \Phi(\Psi - \frac{\nu}{ka}) + \frac{\nu}{ka} \frac{d}{d\kappa} (\Phi + \Psi) = 0. \quad (20)$$

Отсюда после громоздких и длинных преобразований, учитывая, что при $\gamma_1 = 0$

$$k \frac{d\gamma_1^2}{d\kappa} = k \frac{d\gamma_2^2}{d\kappa} = -2(\beta - 1), \quad \gamma_1 \frac{dh_1}{d\kappa} = (\beta - 1), \quad \gamma \frac{dh_2}{d\kappa} = \epsilon \beta - 1$$

и

$$k \frac{d\phi_1(b, a)}{d\kappa} = \frac{1}{\gamma_2^2} [-(\nu+1) \psi_1 + \psi_0 h_2 a + \phi_1 h_2 b] (\epsilon \beta - 1),$$

$$k \frac{d\psi_0(b, a)}{d\kappa} = \frac{1}{\gamma_2^2} [\nu \psi_0 - \psi_1 h_2 a + \phi_0 h_2 b] (\epsilon \beta - 1), \quad (21)$$

$$k \frac{d\phi_1(b, a)}{d\kappa} = \frac{1}{\gamma_2^2} [-(\nu+2) \phi_1 + \phi_0 h_2 a + (\frac{\nu^2}{h_2^2 b^2} - 1) h_2 b \phi_1] (\epsilon \beta - 1),$$

$$k \frac{d\phi_0(b, a)}{d\kappa} = \frac{1}{\gamma_2^2} [(\nu-1) \phi_0 - \phi_1 h_2 a + (\frac{\nu^2}{h_2^2 b^2} - 1) h_2 b \psi_0] (\epsilon \beta - 1),$$

найдем выражение для групповой скорости для случая $\beta_\phi = 1$ ($\beta_\phi = \frac{v_\phi}{c}$):

$$\beta_\Gamma = \frac{\eta + \zeta}{\epsilon \eta + \zeta}, \quad (22)$$

где

$$\zeta = 2\epsilon \frac{a}{b} \psi_1 \phi_1 - \frac{h_2^2 a^2}{(\nu+1)(\nu+2)} \frac{a}{b} \psi_0 \phi_0 + (\epsilon-1) \frac{\nu}{h_2 b} (\epsilon \psi_1 \phi_0 - \phi_1 \psi_0),$$

$$\eta = -\nu(\epsilon+1) \frac{a}{b} \psi_1 \phi_1 + \nu(\epsilon-1) \psi_0 \phi_0 + \frac{\nu}{\nu+1} \frac{a}{b} h_2 a (\psi_1 \phi_0 + \psi_0 \phi_1) +$$

$$+\nu(\epsilon+1) \phi_1 \phi_0 + \nu(\epsilon+1) \left(\frac{\nu^2}{h_2^2 b^2} - 1 \right) \psi_1 \psi_0 - \frac{\nu}{\nu+1} h_2 a \left(\frac{\nu^2}{h_2^2 b^2} - 1 \right) \psi_0^2 - \frac{\nu}{\nu+1} h_2 a \phi_0^2.$$

Рассмотрим зависимость групповой скорости β_Γ от параметра a/b при заданном значении ϵ . В предельном случае ($\frac{a}{b} = 0$) величина $\beta_\Gamma = \frac{1}{\epsilon}$. Это находится в соответствии со значением групповой скорости в круглом волноводе, полностью заполненным диэлектриком, для которого, как известно, выполняется соотношение $\beta_\Gamma \beta_\phi = \frac{1}{\epsilon}$. Действительно, если $\frac{a}{b} = 0$, то, как нетрудно убедиться (см. (9)), $\psi_0 = -\psi_1 = 0$ при четном значении m , а ϕ_0 и ϕ_1 при этом отличны от нуля; при нечетном m $\phi_0 = \phi_1 = 0$, а ψ_0 и ψ_1 имеют конечное значение. Поэтому в этом случае $\zeta = 0$, а величина η отлична от нуля и равна:

$$\eta = \begin{cases} \nu(\epsilon+1) \phi_0 \phi_1, & - (m \text{ - четное}) \\ \nu(\epsilon+1) \left(\frac{\nu^2}{h_2^2 b^2} - 1 \right) \psi_0 \psi_1, & - (m \text{ - нечетное}), \end{cases}$$

что приводит в соответствии с формулой (22) к значению $\beta_\Gamma = \frac{1}{\epsilon}$. В другом предельном случае, когда a/b приближается к единице, значение β_Γ также стремится к 1; при этом величина $h_2 b$ неограниченно возрастает. Полученные численным расчетом графики зависимости β_Γ от a/b при некоторых заданных значениях ϵ для случая $\nu = 1$ и $m = 1$ показаны на рис. 4. Заметим, что в отличие от диафрагмированного волновода, где существуют как прямые, так и обратные гибридные волны [4,5], в рассматриваемой волноводной структуре существуют только прямые волны.

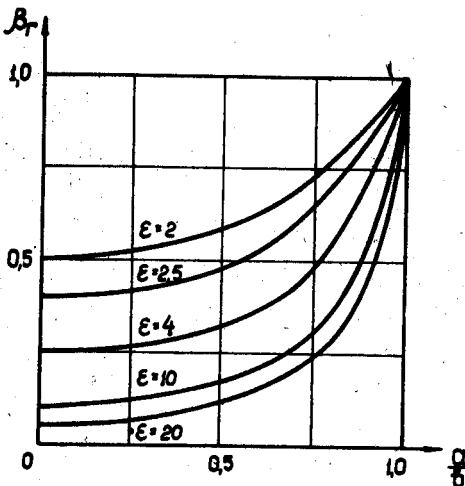


Рис. 4. Групповая скорость в зависимости от a/b при $\nu_\phi = \epsilon$ и $\nu = 1$, $m = 1$ для различных значений ϵ .

Поток энергии вдоль оси волновода равен

$$S = \frac{c}{8\pi} \int_{\sigma} (E_{\rho} H_{\theta}^* - E_{\theta} H_{\rho}^*) d\sigma, \quad (23)$$

где σ — сечение волновода и $d\sigma = \rho d\rho d\theta$. Найдем отдельно поток энергии в первой среде S_I и во второй S_{II} для случая $\beta_{\phi} = -1$. Подставляя выражения для компонент поля (14) в (23), для потока энергии в среде I получим:

$$S_I = \frac{c a^2}{4} \left[(p+q)^2 \frac{(ka)^2}{4(\nu+1)(\nu+2)} - pq \frac{\nu}{(ka)^2} \right], \quad (24)$$

где p и q связаны соотношением (15).

Для определения S_{II} используем следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial \phi_0(b, \rho)}{\partial (h_2 \rho)} \right)^2 + \frac{\nu^2}{h_2^2 \rho^2} \phi_0^2(b, \rho) = \frac{\nu}{h_2 \rho} \frac{\partial \phi_0^2(b, \rho)}{\partial (h_2 \rho)} + \phi_1^2(b, \rho), \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_0(b, \rho)}{\partial (h_2 \rho)} \right)^2 + \frac{\nu^2}{h_2^2 \rho^2} \psi_0^2(b, \rho) = \frac{\nu}{h_2 \rho} \frac{\partial \psi_0^2(b, \rho)}{\partial (h_2 \rho)} + \psi_1^2(b, \rho).$$

Учитывая (25) и используя выражения для компонент поля (13), нетрудно показать, что в среде II:

$$E_{\rho} H_{\theta}^* - E_{\theta} H_{\rho}^* = \frac{(p+q)^2}{\epsilon-1} \left\{ \frac{\nu}{h_2 \rho} \frac{\partial}{\partial (h_2 \rho)} \left[\frac{\phi_0^2(b, \rho)}{\phi_0^2(b, a)} - (\epsilon+1) \frac{\psi_0(b, \rho) \phi_0(b, \rho)}{\psi_0(b, a) \phi_0(b, a)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\psi_1^2(b, \rho)}{\psi_0^2(b, a)} \right] + \left[\frac{\phi_1^2(b, \rho)}{\phi_0^2(b, a)} + \epsilon \frac{\psi_1^2(b, \rho)}{\psi_0^2(b, a)} \right] \right\}. \quad (26)$$

Далее, используя свойства функций ψ_0 , ψ_1 , ϕ_0 и ϕ_1 (11) и учитывая уравнение (18), окончательно получим выражение для потока энергии в среде II:

$$S_{11} = \frac{c(p+q)}{4(\epsilon-1)} \left\{ \frac{2}{\pi^2 h_2^2 \phi_0^2(b,a)} \left(1 - \frac{\nu^2}{h_2^2 b^2} \right) + \frac{2\epsilon}{\pi^2 h_2^2 \psi_0^2(h,a)} - \right. \\ \left. - \frac{a^2}{2} \left[\frac{\phi_1^2(b,a)}{\phi_0^2(b,a)} + \epsilon \frac{\psi_1^2(b,a)}{\psi_0^2(b,a)} + (\epsilon-1) \right] \right\}. \quad (27)$$

Фокусирующие свойства гибридных волн

Взаимодействие гибридных волн с ультрарелятивистскими частицами в структурах, аналогичных исследуемой (например, в диафрагмированном волноводе), обладает рядом интересных и полезных свойств. Как известно, мода с $\nu=1$ при $v_\phi=c$ имеет весьма ценные характеристики для целей сепарации: поперечно-отклоняющая сила \vec{F}_\perp , действующая на ультрарелятивистские частицы, однородна по всей апертуре $2a$. Эта сила может быть выражена только через z -компоненту электрического поля (см., например /1/)

$$\vec{F}_\perp = -\frac{e}{k} \nabla_\perp E_z, \quad (28)$$

где e - заряд частицы $\nabla_\perp = \vec{i}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{i}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}$, \vec{i}_ρ и \vec{i}_θ - единичные векторы. Учитывая (28), (1) и (14), для моды с азимутальным числом ν сила \vec{F}_\perp может быть представлена следующим образом:

$$\vec{F}_\perp = \frac{e\nu(p+q)}{ka} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\nu-1} (\vec{i}_\rho \cos \nu \theta - \vec{i}_\theta \sin \nu \theta). \quad (29)$$

Отсюда видно, что по своему действию на заряженную частицу \vec{F}_\perp эквивалентна силе линзы с 2ν -полками. В частности, для моды с $\nu=2$ в декартовых координатах имеем:

$$\begin{cases} F_x = -\frac{2e(p+q)}{ka} \left(\frac{x}{a} \right), \\ F_y = -\frac{2e(p+q)}{ka} \left(\frac{y}{a} \right). \end{cases} \quad (30)$$

Такая сила будет осуществлять по направлению x дефокусировку частиц, а в y - направлении - фокусировку, т.е. волновод будет действовать на частицу подобно квадрупольной линзе с эквивалентным градиентом $G = \frac{2(p+q)}{ka^2}$.

(31)

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Рассмотрим случай, когда $h_2 a \ll 1$, и будем искать, какой вид принимает уравнение (16), если значение $h_2 b$ близко к корню уравнения $J'_\nu(h_2 b) = 0$. Тогда $J_\nu(h_2 b)$, $N_\nu(h_2 b)$ и $N'_\nu(h_2 b)$ имеют определенные конечные значения и функции ψ_0 и ψ_1 могут быть представлены в следующем виде:

$$\psi_0 = -J_\nu(h_2 b) \frac{(\nu-1)! 2^\nu}{\pi (h_2 a)^\nu}, \quad (A,1)$$

$$\psi_1 = -J_\nu(h_2 b) \frac{\nu! 2^{\nu+1}}{\pi (h_2 a)^{\nu+1}}.$$

Подставляя выражения для этих функций в уравнения (16) и производя простые преобразования, получим следующее уравнение:

$$h_2 a \phi_1(b, a) + 2\nu \epsilon \phi_0(b, a) = 0. \quad (A,2)$$

Функции ϕ_0 и ϕ_1 для $h_2 a \ll 1$ равны, соответственно:

$$\phi_0 = -J'_\nu(h_2 b) \frac{(\nu-1)! 2^\nu}{\pi (h_2 a)^\nu} - N'_\nu(h_2 b) \frac{(h_2 a)^\nu}{\nu! 2^\nu}, \quad (A,3)$$

$$\phi_1 = -J'_\nu(h_2 b) \frac{\nu! 2^{\nu+1}}{\pi (h_2 a)^{\nu+1}} - N'_\nu(h_2 b) \frac{(h_2 a)^\nu}{(\nu+1)! 2^{\nu+1}}.$$

Подставляя ϕ_0 и ϕ_1 в этом виде в уравнение (A,2) и опуская члены более высокого порядка малости относительно $h_2 a$, окончательно получим уравнение (19a):

$$J'_\nu(h_2 b) + N'_\nu(h_2 b) \frac{\epsilon \pi}{(\epsilon+1) \nu! (\nu-1)!} \left(\frac{h_2 a}{2} \right)^{2\nu} = 0. \quad (A,4)$$

Аналогично можно найти уравнение (19б), если предположить, что $h_2 b$ близки к корням уравнения $J_\nu(h_2 b) = 0$.

Л и т е р а т у р а

1. В.А. Вагия, В.И. Котов, И.Н. Семенюшкин. УФН, 82, 707, 1964.
2. M. Yves Garault. Compt. rend., 254, 843, 1962; 254, 1391, 1962; 255, 2920, 1962.

3. H.Hahn. Rev. Sci. Instr., 34, 1094, 1963.

4. R.P.Larsen, P.A.Altenueller, G.A.Loew.

Международная конференция по ускорителям. Дубна, 1963; М., Атомиздат, 804, 1964.

5. M.Bell, P.Bramham, R.D.Fortune, E.Keil, B.W.Montague.

Международная конференция по ускорителям. Дубна, 1963; М., Атомиздат, 798,

6. R.Hirel. Nucl. Instr. and Meth., 26, 90, 1964.

1964.

7. А.И. Ахвезер, Я.Б. Файнберг. УФН, 44, 321, 1951.

8. H.Buchholz. Ann. Phys., 43, 313, 1943.

9. А.А. Метрикин. Радиотехника, 18, 29, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 сентября 1964 г.