ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

17-92-433

АБДУЛЛОЕВ
Хабибулло Одинаевич

УДК 530.145;538.221;539.1

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ В МАГНИТНЫХ СИСТЕМАХ

Специальности: 05.13.16 - применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов для научных исследований;
01.04.07 - физика твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1992

Работа выполнена на физическом факультете Таджикского государственного университета и Лаборатории Вычислительной Техники и Автоматизации Объединенного Института Ядерных Исследований.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
профессор В.К.Федянин
доктор физико-математических наук
профессор А.В.Крянев
доктор физико-математических наук
ведущий научный сотрудник А.С.Ковалев

Ведущая организация - Научно-исследовательский вычислительный центр РАН; г. Пущино.

Защита диссертации состоится "11" декабря 1992г. в 10^{30} на заседании специализированного Совета Д 047.01.04 по защите докторских диссертаций при Лаборатории Вычислительной Техники и Автоматизации Объединенного Института Ядерных Исследований, 141980, Дубна, Моск.обл., ЛВТА ОИЯИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "10" ноября 1992г.

Ученый секретарь специализированного Совета
кандидат физико-математических наук Иванченко З.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ: Математические аспекты исследования нелинейных явлений в магнитных системах являются одним из самых быстроразвивающихся направлений современной физики. Особенно последние десятилетия очень интенсивно используются методы математического моделирования в различных областях физики, в частности, в физике конденсированного состояния, твердого тела, плазмы, гидро-, аэродинамики,в нелинейной оптике,в биологических науках и др., что тесно связано с изучением нелинейных возбуждений солитонного типа. Обычные подходы здесь основаны на феноменологических теориях, рассматривающих магнетик как сплошную среду, и базируются на описании спиновых волн в магнетиках посредством нелинейных дифференциальных уравнений, таких как нелинейное уравнение Шредингера,синус-уравнение Гордона, уравнение Ландау-Лифшица. Локализованные решения этих уравнений описывают магнитные солитоны.

Имеющиеся экспериментальные данные содержат указания о том, что эти классические модели не всегда оказываются достаточно точными и не учитывают ряд эффектов (такие как, например сокращение длины классического спина). Так как решением квантовой задачи является решение векового операторного уравнения, т.е. диагонализации квантового гамильтониана и нахождение собственных значений и векторов, а решение классической задачи есть решение нелинейных уравнений, поэтому обычно стараются специальным образом перейти к классическому описанию квантовой задачи с сохранением ее свойств, тем самым сталкиваются с актуальной проблемой выявления и изучения точек соприкосновения классической и квантовой теории нелинейных свойств магнетиков. С другой стороны, основой теоретического изучения большого класса магнетиков являются квантовые модели Гейзенберга. Естественно возникает вопрос об отношении коллективных нелинейных эффектов в классических и квантовых моделях, т.е. о формулировании достаточно последовательной "процедуры сведения" квантовых решеточных моделей Гейзенберга к классическим полевым моделям. Как известно, проблема нелинейных явлений в анизотропных магнетиках представляется одной из наименее изученных на сегодняшний день в физике твердого тела, поэтому подход к ней требует учета всех спиновых степеней свободы и должен быть основан на более общих представлениях о спиновой системе. Развитию математических методов решений этих проблем и получению макроскопических моделей и уравнений посвящена первая часть диссертации.

Однако несмотря на наличие такого мощного инструмента аналитических исследований нелинейных дифференциальных уравнений, как метод обратной задачи рассеяния, достаточно полное исследование многих нелинейных неинтегрируемых, многомерных и диссипативных систем возможно только благодаря использованию численных методов. Другая часть диссертации посвящена численному моделированию полученных новых полуклассических моделей, описывающих магнитные системы со спином S=1.

Целью диссертационной работы является теоретическое исследование и математическое моделирование различных анизотропных магнетиков Гейзенберга, с различными значениями спина S. Процедура перехода к квазиклассическому описанию магнетика Гейзенберга строится на основе построения пробных функций, обобщенных когерентных состояний на группе SU (2s+1), учитывающих размерность пространства спиновых состояний, получения соответствующих уравнений и их численного моделирования. Построены нелинейные уравнения в действительной и комплексной параметризации и исследованы полученные уравнения описывающие нелинейную динамику ферромагнетиков.

Научная новизна работы состоит в общей постановке физической задачи, подходе и методах ее решения. В качестве метода математического описания квазиклассического поведения квантовых спиновых систем с произвольным спином построены обобщенные когерентные состояния на группе SU (2s+1). Построены гимильтоновы уравнения движения для SU (3), SU(4) когерентных состояний как в действительной, так и в комплексной параметризации. Впервые установлено условие квазиклассического приближения для анизотропных магнетиков Гейзенберга $\delta \cdot S \gg 1$ (δ– степень анизотропии). Усреднение квантового гамильтониана по SU(2) КС позволило выявить область применимости уравнения Ландау-Лифшица . Исследованы квантовые и классические вакуумы модели Гейзенберга. Показано, что для моделей со спином $S \gg 1$ вакуум легкоплоскостного магнетика является боголюбовским конденсатом магнонов. Найдены уравнения, описывающие малоамплитудные спиновые волны в магнетиках со спином S=1 как с обменной, так и с одноионной анизотропией. Показано наличие высокочастотной моды в магнонном спектре S=1 магнетиков.

Построены, когерентные состояния в физической, наглядной параметризации в качестве пробных функций для исследования S=1 магнетиков. Получена система уравнений, описывающие спин-квадрупольные волны в магнетике с обменной анизотропией.

Исследование основного сотояния легкоосных магнетиков со спином S=3/2 в отсутствии одноионного взаимодействия показало, что для них классическое описание основного состояния является полным. Найдены дополнительные высокочастотные моды в магноном спектре легкоосного магнетика со спином S=3/2.

Численными методами проведено исследование систем уравнений, описывающих малоамплитудные волны в S=1 лекоосных магнетиках и показано, что как в случае обменной, так и в случае одноионной анизотропии, стационарные нелинейные волны оказываются захваченными SU(2) сечением спинового фазового пространства. В этом смысле SU(2) сечение в спиновом фазовом пространстве является "классическим" аттрактором.

Научное и практическое значение работы определяется установлением новых закономерностей физических свойств, характерных для широкого круга объектов. Указаны области применимости различных вариантов процедуры сведения от квантового описания к классическому, которые могут быть использованы для широкого класса магнетиков.

Построенные в качестве математического метода квазиклассического описания магнетиков ОКС – на группе SU (2s+1) могут явиться инструментом для дальнейшего исследования широкого класса магнетиков с произвольным спином. КС в действительной параметризации, дающее удобное, физическое описание спин - квадрупольной динамики магнетиков, имеет важное значение в получении квазиклассического описания магнетиков со спином $S \gg 1$. Полученные системы уравнений, описывающие малоамплитудные волны в ЛО моделях S=1/2, 1, 3/2 магнетиков с обменной и одноионной типами анизотропией, могут быть базой для дальнейших теоретических исследований и численного моделирования. Обнаруженные дополнительные моды колебаний и сокращение длины классического спина в основном состоянии магнетиков, может представлять интерес для экспериментаторов, измеряющих магнонные спектры системы.

Теоретические результаты, полученные в диссертации, стимулируют постановку новых экспериментов в различных областях физики конденсированного состояния,магнитоупорядоченных твердых тел (волны зарядовой плотности, спиновые волны в ферромагнетиках и т.д.), гидродинамики и т.д.

Полученные в диссертации уравнения могут быть использованы в исследовании различных магнетиков, типа $CsNiF_3$.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Построены обобщенные когерентные состояния на группе SU(2s+1),позволяющие провести адекватное полуклассическое описание различных моделей ферромагнетиков с произвольным значением спина.

2. Получено условие квазиклассического приближения для анизотропных магнетиков Гейзенберга $\delta \cdot S \gg 1$. Найдена область применимости уравнения Ландау-Лифшица $\delta \ll 1$, т.е. оно аддекватно описывает квазиклассическое поведение квантовой системы в области малой анизотропии.

3. Получено уравнение, описывающее слабонелинейные спиновые волны в легкоосной модели со спином S=1 и найдены их солитоноподобные решения. Проведено исследование квантовых и классических вакуумов магнитных систем. Показано, что вакуум легкоплоскостного магнетика Гейзенберга при больших S является боголюбовским конденсатом магнонов.

4. Получены и исследованы классические вакуумные состояния для S=1 магнетиков и выяснено, что для ферромагнетиков с обменной анизотропией феноменологическое описание Ландау-Лифшица основного состояния является полным. Но в основном состоянии магнетиков с одноионной анизотропией имеет место сокращение длины классического спина, т.е. на основное состояние существенно влияет квадрупольные взаимодействия.

5. На основе построенных обобщенных спиновых когерентных состояний группы SU(3) проведено исследование ферромагнетиков со спином S=1, как для случая обменной, так и для случая одноионной типов анизотропии. Показано существование дополнительной высокочастотной моды колебаний в магнонном спектре ферромагнетиков со спином S=1. Получены уравнения, описывающие спиновые волны в магнетиках со спином S=1 как для случая обменной, так и для одноионной типов анизотропии.

6. Построены когерентные состояния, позволяющие провести исследование S=1 магнетиков в удобной, физической параметризации. На основе этих когерентных состояний получена система

уравнений, описывающая динамику спин-квадрупольных волн в магнетике Гейзенберга с обменной анизотропией.

7. Проведено численное исследование систем уравнений, описывающих малоамплитудные, слабонелинейные волны в S=1 легкоосных магнетиках как с обменной так и с одноионной типами анизотропиии. С помощью численных и аналитических методов показано, что нелинейные волны оказываются захваченными "классическим" SU(2) сечением, т.е. последнее представляет собой особого рода классический аттрактор в спиновом фазовом пространстве.

8. Получены и исследованы классические основные состояния магнетиков со спином S=3/2 с обменной анизотропией как в комплексной так и в действительной параметризации. При исследовании линейных колебаний вблизи основного состояния легкоосного магнетика обнаружены две дополнительные высокочастотные моды колебаний.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на научных семинарах ЛВТА и ЛТФ ОИЯИ, ТГУ (г.Душанбе), ФТИ АН Таджикистана, на IV Международном совещании "Солитоны и приложения". (Дубна , 1989), на III международной рабочей группе "Нелинейность и турбулентность в физике" (Киев, 1987), на международной конференции "NEEDS - 92" (Дубна, 1992), на международных конференциях "Нелинейность и хаос" (Ташкент, 1990), "Солитоны и хаос" (Брюссель, 1990), " Нелинейные эволюционные уравнения и динамические системы" (Дубна, 1990, Галиполи, 1991), на III - рабочем совещании "Теория солитонов и приложения" (Пущино, 1987), на всесоюзной конференции "Межчастичные взаимодействия в растворах" (Душанбе, 1990), на 26-28-ой научной конференции факультета физико-математических и естественных наук УДН им.П.Лумумбы (г.Москва 1990-1992 гг) и на ежегодной научной апрельской конференции ТГУ (г.Душанбе, 1980-1992 гг)

Структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка цитированной литературы. по теме диссертации опубликовано 30 работ, в том числе монография.

Краткое содержание работы. Во введении обсуждается состояние и актуальность проблем,которым посвящена диссертация, дается краткий обзор наиболее существенных результатов, полученных по изучаемым проблемам в момент написания диссертации, сформулирована цель диссертации и оригинальные результаты, полученные в диссертации.

Глава первая посвящена квазиклассическому описанию анизотропной модели Гейзенберга. Сравниваются два варианта процедуры сведения на примере модели Гейзенберга с одноосной анизотропией широко известное и часто используемое преобразований Холштейна-Примакова, позволяющее "бозонировать" исходный гамильтониан и спиновые когерентные состояния. Выбираем, гамильтониан следующего вида:

$$\hat{H} = -J\sum_j \left\{ \frac{1}{2}\left(\hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- + \hat{S}_{j+1}^+ \hat{S}_j^-\right) + \delta\, \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z \right\}. \qquad (1)$$

Проведен симметрийный анализ изотропного легкоосного (ЛО) и легкоплоскостного (ЛП) магнетиков и показано, что они имеют SU(2),U(1) симметрию соответственно. Здесь в качестве пробных функций выступают когерентные состояния группы Гейзенберга-Вейля

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a}|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \qquad (2)$$

Проведены бозонизация исходного квантового гамильтониана (1) с помощью преобразований Холштейна-Примакова (ХП)

$$\hat{S}_j^+ = \sqrt{2S}\left(1 - \frac{a_j^+ a_j}{2S}\right)^{1/2} a_j,$$

$$\hat{S}_j^- = \sqrt{2S}\, a_j^+ \left(1 - \frac{a_j^+ a_j}{2S}\right)^{1/2},$$

$$\hat{S}_j^z = S - a_j^+ a_j. \qquad (3)$$

В низкотемпературном пределе, разлагая корни в ряд, подставляя в (1) после упорядочения - операторов и перехода к С - числам посредством глауберовских КС (2) получим уравнение

$$i\frac{\dot{\alpha}}{JSa_0} = \alpha_{xx} - \Delta\alpha + \frac{\alpha|\alpha|^2}{S}\left(\Delta - \frac{1}{4Sa_0^2}\right) + \frac{3}{8Sa_0^2}\frac{\alpha|\alpha|^4}{2S^2} + \frac{\alpha|\alpha_x|^2}{S} - \frac{\bar{\alpha}\alpha_x^2}{2S} + \frac{\bar{\alpha}_{xx}\alpha^2}{2S}. \qquad (4)$$

Для перехода от квантовой системы к классической необходимо усреднение (1) по спиновым когерентным состояниям (ОКС)

$$|\psi_j\rangle = \left(1 + |\psi_j|^2\right)^{-S} e^{\psi_j \hat{S}_j^+}|S,-S\rangle \qquad (5)$$

приводит к уравнению:

$$i\frac{\dot{\alpha}}{JSa_0} = \alpha_{xx} - \Delta\alpha + \Delta\frac{\alpha|\alpha|^2}{S}\left(1 + \frac{|\alpha|^2}{2S}\right) - \frac{\bar{\alpha}\alpha_x^2}{S}. \qquad (6)$$

Где в (6) для сравнения обоих моделей сделана следующая подстановка $\psi \to \alpha/\sqrt{2S}$.

Исследуется возможность соответствия этих моделей на примере ЛО модели Гейзенберга. При сравнении модели ПХП и СКС (4) и (6), получены условия применимости ПХП (а также СКС) есть не $S \gg 1$, а $\delta \cdot S \gg 1$ и системы ХП и СКС в случае ЛО могут быть сведены друг к другу только в низшем порядке по взаимодействию (в третьем порядке по полю).

Получен классический гамильтониан, найдены основные состояния и магнонные спектры. Проведено сравнение классических аналогов как для ЛО, так и для ЛП моделей. Отмечается, что обсуждаемые в данной главе классические уравнения справедливы лишь при достаточно малой анизотропии $\delta \ll k^2 a_0^2$. В противном случае использование SU(2) когерентных состояний вряд ли можно считать оправданным. Найдены выражения для дисперсии легкоплоскостных магнонов.

$$\omega = \pm |k| \sqrt{k^2 + 2\delta}\,, \tag{7}$$

и установлено, что такую же формулу в случае глауберовых КС дает модель с усеченным рядом ПХП – и с осью квантования, лежащей в ЛП.

Исследовано квазиклассическое поведение начальных пакетов спиновых волн (Шредингеровских систем) в рамках ЛО модели Гейзенберга вблизи стационарных состояний. Динамику таких пакетов можно описать нелинейным уравнением Шредингера

$$i\dot{\Psi} + \Psi_{rr} + \frac{D-1}{r}\Psi_r - \frac{dU(\varphi)}{d(|\Psi|^2)}\cdot\Psi = 0. \tag{8}$$

Изучено поведение во времени среднеквадратичного радиуса:

$$B(t) = \langle r^2 \rangle = N^{-1}\int |\Psi|^2 r^2 d^D r =$$

$$= \left(\int |\Psi|^2 d^D r\right)^{-1} \int |\Psi|^2 r^2 d^D r\,, \tag{9}$$

где D – размерность пространства.

Имея в виду уравнение (8), будем иметь

$$\ddot{B}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(N\langle r^2\rangle\right) = 8\int (\partial_k \bar{\Psi})(\partial_k \Psi)\, d^D r +$$

$$+ 4D\int\left(\frac{dU(\varphi)}{d(|\Psi|^2)}|\Psi|^2 - U\right) d^D r. \tag{9}$$

В качестве примера, рассмотрим потенциал вида

$U(\varphi) = -\frac{1}{n}\varphi^n$, тогда

$$\ddot{B}(t) = 8E - \frac{4}{n}\left\{D(n-1) - 2\right\} 2^{D-1}\pi \int \varphi^n r^{D-1} dr. \tag{10}$$

Отсюда, модель (10) при $D=1$, $n=2$ обладает устойчивыми стационарными пакетами спиновых волн. В остальных моделях этого класса в зависимости от начального состояния пакеты либо коллапсируют, либо раздуваются.

Во второй главе исследуется модель ферромагнетика Гейзенберга с обменной анизотропией

$$\hat{H} = -J\sum_j \left\{ \hat{\vec{S}}_j \hat{\vec{S}}_{j+1} + \delta\, \hat{S}^z_j \hat{S}^z_{j+1} \right\}. \tag{11}$$

Показано, что в случае анизотропии типа "легкой оси" ($\delta > 0$) как для S=1/2, так и для S=1 магнетиков, вакууму модели (11) соответствует собственная функция

$$|\Psi\rangle = \prod_j |0\rangle_j\,. \tag{12}$$

Поскольку квантовая задача для модели (11) с анизотропией типа "легкая плоскость" ($\delta < 0$) не является точно решаемой, то в пределе $S \gg 1$ использовано преобразование Холштейна-Примакова (3), для бозонизации спинового гамильтониана (11). В импульсном представлении выделен конденсат в боголюбовском приближении, для чего совершен поворот в пространстве алгебры SU(1,1) (т.е. аналог U-V – преобразований Боголюбова). В результате получен ограниченный снизу дискретный спектр энергии и боголюбовская дисперсия

$$\omega(k) = k a_0^2 \sqrt{\tfrac{3}{4}k^2 + |\Delta|}\,, \tag{13}$$

где $\Delta = 2\delta / a_0^2$. Таким образом показано, что вакуум ЛП магнетика Гейзенберга есть боголюбовский конденсат магнонов.

В качестве метода математического описания квазиклассического поведения магнетиков с произвольным спином S, построена матрица обобщенных спиновых когерентных состояний (ОСКС) в фундаментальном представлении группы SU(2s+1).

$$|\Psi\rangle = \exp\left\{\sum_j^{2S}\left[\xi_j \hat{T}_j^+ - \xi_j^- \hat{T}_j^-\right]\right\}|0\rangle =$$

$$=\left\{\left(1+\sum_j^{2S}|\Psi_j|^2\right)^{-1/2}\left\{|0\rangle+\sum_j^{2S}\Psi_j|j\rangle\right\}\right., \qquad (14)$$

где $|\xi|^2=\sum_i^{2S}|\xi_i|^2$, $|\xi|<\frac{\pi}{2}$, $\Psi_i=\frac{\xi_i}{|\xi|}tg|\xi|$,

$\hat{T}_j^{+}$ и $\hat{T}_j^{-}$ – генераторы фундаментального представления группы SU(2s+1), $|0\rangle=(0,\dots,0.1)^T$, $|j\rangle=(0,\dots,0.1,\ 0,\dots,0)^T$ Эти когерентные состояния соответствуют точкам проективного пространства CP^{2S} =SU(2s+1)/SU(2s)*U(1).

Квантовая система со спином S=1 в фундаментальном представлении описывается SU(3)/SU(2)*U(1) когерентными состояниями

$$|\xi\rangle=\left(1+|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\right)^{-1/2}\left\{|0\rangle+\xi_1|1\rangle+\xi_2|2\rangle\right\}, \qquad (15)$$

и живет в четырехмерном пространстве спиновых состояний, а SU(2) ОСКС

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{1+|\Psi|^2}\left\{|0\rangle+\sqrt{2}\,\Psi|1\rangle+\Psi^2|2\rangle\right\}, \qquad (16)$$

описывают поведение системы в SU(2) сечении этого пространства

$$\xi_1=\sqrt{2}\,\Psi,\qquad \xi_2=\xi_1^2/2 \qquad (17)$$

Показано, что SU(3) КС учитывают эффект, "сокращения длины" классического спина

$$S^2+q^2=1, \qquad (18)$$

где

$$q^2=\langle\hat{S}^+\hat{S}^z\rangle\langle\hat{S}^z\hat{S}^-\rangle+\langle\hat{S}^-\hat{S}^z\rangle\langle\hat{S}^z\hat{S}^+\rangle+$$
$$+\langle\hat{S}^+\hat{S}^+\rangle\langle\hat{S}^-\hat{S}^-\rangle+\left(1-\langle\hat{S}^z\hat{S}^z\rangle\right)^2.$$

На основе рассмотрения соответствующего Фейнмановского интеграла построен классический лагранжиан

$$L=i\hbar\,\frac{\sum_{i=1}^{2}\left(\dot{\Psi}_i\bar{\Psi}_i-\Psi_i\dot{\bar{\Psi}}_i\right)}{1+|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2}-\mathcal{H}(\Psi_i,\bar{\Psi}_i) \qquad (19)$$

и скобки Пуассона, соответствующие этой лагранжевой функции. Построены гамильтоновы уравнения для SU(3) КС.

В качестве инструмента исследования квазиклассического поведения S=1 магнетиков построено КС в удобной, физической параметризации действительных функций.

$$|\Psi\rangle=e^{-i\varphi\hat{S}^z}e^{-i\theta\hat{S}^y}e^{-i\gamma\hat{S}^{z'}}e^{-2ig\hat{Q}^{xy}}|u\rangle, \qquad (20)$$

где $\hat{Q}^{xy}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ – квадрупольный момент.

Параметры θ – определяет ориентацию вектора спина, относительно оси OZ, φ – ротационную динамику вектора спина и γ – вращение квадрупольного момента. параметр g – характеризует изменение длины вектора классического спина и квадрупольного момента. В параметризации (20) также имеет местотождество (18), где

$S^2=\cos^2 g$, $q^2=\sin^2 g$. На основе КС (20) получены гамильтоновы уравнения движения. Далее исследованы динамика спиновых волн и стационарных солитонов в одномерном анизотропном ферромагнетике. Получены системы уравнений и дисперси-онные соотношения как легкоосного так и легкоплоскостного ферромагнетика в случае обменной анизотропии. Обнаружено, что как в случае ЛО так и ЛП вакуума распространяются низкочастотные спиновые волны с дисперсией совпадающей с SU(2) моделью и независимо от них существуют стоячие высокочастотные волны.

В третьей главе проводится исследование магнетика Гейзенберга (11) со спином S=1. Получено квазиклассическое описание модели (11) с помощью средних от спиновых операторов, после чего получим классический гамильтониан

$$H=\int\left\{\frac{a_0^2}{2}\left(\langle\hat{\vec{S}}\rangle\right)^2-\langle\hat{S}^+\rangle\langle\hat{S}^-\rangle-(1+\delta)\left(\langle\hat{S}^z\rangle\right)^2\right\}dx \tag{21}$$

Показано, что основные состояния легкоосного магнетика

$$\xi_1=\xi_2=0, \tag{22}$$

равно и легкоплоскостного

$$\xi_1=\sqrt{2}\ , \quad \xi_2=1 \tag{23}$$

совпадают с классическими, т.е. лежат в SU(2) сечении четырехмерного спинового фазового пространства. Более того, совпадают также и соответствующие им когерентные состояния

$$|0\rangle_\gamma=|0\rangle_{SU(2)}.$$

При исследовании магнонных спектров выявлено существование дополнительных высокочастотных мод колебаний

$$\omega=4(1+\delta)\ , \tag{24}$$

в случае легкоосной модели, и

$$\omega=32\ , \tag{25}$$

в случае легкоплоскостной.

Найдена система уравнений, описывающая слаболинейные спиновые волны легкоосного S=1 магнетика с обменной анизотропией, которая в малоамплитудном приближении сводится к системе

$$\begin{aligned} &i\dot{\xi}_1-\xi_{1xx}+2\delta\xi_1-4\bar{\xi}_1\xi_2+2(1-\delta)|\xi_1|^2\xi_1=0,\\ &i\dot{\xi}_2+4(1+\delta)\xi_2-2\xi_1^2=0. \end{aligned} \tag{26}$$

Установлены первые три интеграла движения системы (26). Показано,что выбранная модель (21) сохраняет длину классического спина, т.е.

$$\frac{\partial(\langle\vec{S}\rangle)^2}{\partial t}=0.$$

Стационарные локализованные решения системы (26) имеют вид

$$\xi_1=\frac{b}{ch\left(\sqrt{2\delta-\omega}\,x\right)}e^{i\omega t}\ , \qquad \xi_2=\frac{\xi_1^2}{2-\omega+\delta} \tag{27}$$

солитонов подобных нелинейному уравнению Шредингера.

В случае действительной параметризации рассматриваемая модель (21) описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \sin\theta\cdot\dot{\varphi}&=2\delta\cos 2g\sin\theta\cos\theta-a_0^2\left(\cos 2g\cdot\theta_{xx}-\right.\\ &\left.-4\sin 2g\, g_x\theta_x-\cos 2g\sin\theta\cos\theta\cdot\varphi_x^2\right),\\ \dot{\theta}&=a_0^2\left(\cos 2g\sin\theta\cdot\varphi_{xx}+2\cos 2g\cos\theta\,\theta_x\varphi_x-\right.\\ &\left.-4\sin 2g\sin\theta\,\varphi_x g_x\right),\\ \dot{g}&=0,\\ \dot{\gamma}&=2\cos 2g-a_0^2\left[2\sin 2g\left(g_{xx}+2ctg\theta\, g_x\theta_x\right)-\right.\\ &\left.-\cos 2g\left(ctg\theta\cdot\theta_{xx}-\varphi_x^2-\theta_x^2-4g_x^2\right)\right] \end{aligned} \tag{28}$$

которая при g =0 совпадает с уравнением Ландау-Лифшица. Найдены классические вакуумы в настоящей параметризации. Дополнительные высокочастотные моды колебаний в магнонном спектре совпадают с (24) и (25) в комплексной параметризации соответственно.

Проведено численное исследование системы (26). Подробно излагается методика численных экспериментов и обсуждаются схемы,по которым проводилось численное моделирование данной системы для локализованных стационарных решений (26) вблизи

SU(2) сечения.

Для моделирования возмущенных стационарных решений интересно рассмотреть поведение величин

$$\Delta_1(t) = \Delta_1(0)\, e^{\lambda_{sup} t},$$

$$\Delta_2(t) = \Delta_2(0)\, e^{\lambda_{SU(2)} t},$$

характеризующих выход системы из SU(2) сечения, где Δ_1 - максимальное отклонение системы из SU(2) сечения, а Δ_2 - интегральное (усредненное) значение отклонения системы из SU(2) сечения. Характеристические показатели

$$\lambda_{sup} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\| \xi_2'(t) - \xi_1'^2(t)/2 \|}{\| \xi_2'(0) - \xi_1'^2(0)/2 \|},$$

$$\lambda_{SU(2)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\int | \xi_2'(t) - \xi_1'^2(t)/2 |\, dx}{\int | \xi_2'(0) - \xi_1'^2(0)/2 |\, dx}$$

соответственно описывают сходимость системы к SU(2) сечению по $\sup|\xi_2 - \xi_1^2/2|$ и интегральную характеристику сходимости системы к SU(2) сечению в целом.

Численными и аналитическими методами показано, что линейные волны рассматриваемой модели заполняют все четырехмерное спиновое фазовое пространство квантовой системы. Исследование решений вида (27) системы (26) показывает, что характеристические показатели отрицательны. Таким образом, нелинейные стационарные волны оказываются захваченными SU(2) сечением спинового фазового пространства. В этом смысле SU(2) сечение является двухмерным "классическим аттрактором" в четырехмерном спиновом фазовом пространстве системы. Проводится исследование "модифицированной" системы уравнений

$$i\dot{\xi}_1 - \xi_{1xx} + 2\delta\xi_1 - 4\bar{\xi}_1\xi_2 + 2(1-\delta)|\xi_1|^2\xi_2 = 0,$$

$$i\dot{\xi}_2 + 4(1+\alpha\delta)\xi_2 - 2\xi_1^2 = 0, \qquad (29)$$

которая описывает стационарные солитоны, находящиеся точно в SU(2) сечении, и в этом смысле она эффективно учитывает отброшенные члены более высокого порядка точности.

Проведенные аналитические и численные исследования стационарных решений системы (29) показывают, что и в этом случае SU(2) сечение является аттрактором в указанном смысле.

<u>В четвертой главе</u> проведено исследование легкоосной модели S=1 ферромагнетика Гейзенберга с учетом одноионной анизотропии.

$$\hat{H} = -J\sum_j \left\{ \hat{\vec{S}}_j \hat{\vec{S}}_{j+1} + \delta\, \hat{S}_j^z \hat{S}_j^z \right\}. \qquad (30)$$

Получен ее квазиклассический аналог, выражающийся через средние и парные корреляторы от спиновых операторов по SU(3) ОСКС

$$H = \int \left\{ \frac{a_0^2}{2} \left(\langle \hat{\vec{S}} \rangle_x\right)^2 - \langle \hat{S}^+ \rangle \langle \hat{S}^- \rangle - \left(\langle \hat{S}^z \rangle\right)^2 - \delta \langle \hat{S}^z \hat{S}^z \rangle \right\} dx. \qquad (31)$$

Показано, что в отличии от модели с обменной анизотропией, для квадрата классического спина имеет место уравнение

$$\frac{\partial (\langle \vec{S} \rangle)^2}{\partial t} = 4\delta \frac{\bar{\xi}_1^2\xi_2 - \xi_1^2\bar{\xi}_2}{(1+|\xi_1|^2+|\xi_2|^2)^2}. \qquad (32)$$

Основные состояния модели (31) совпадают с классическими, т.е. находятся в SU(2) сечении, совпадают также и соответствующие им когерентные состояния. Выявлено существование дополнительной высокочастотной моды $\omega = 4\delta$ в магнонном спектре модели (31). Получена система уравнений, описывающая слабонелинейные спиновые волны в легкоосном ферромагнетике с одноионной анизотропией.

$$i\frac{1}{\omega_0}\dot{\xi}_1 = -a_0^2\xi_{1xx} + \delta\xi_1 - 4\bar{\xi}_1\xi_2 + 2|\xi_1|^2\xi_1,$$

$$i\frac{1}{\omega_0}\dot{\xi}_2 = 4\xi_2 - 2\xi_1^2. \qquad (33)$$

Решения этого уравнения в виде нелинейных спиновых волн (плоских волн) порождают дисперсию.

$$\omega=\omega_1=\frac{\omega_2}{2}=\omega_0\,\frac{k^2a_0^2+2|\delta|-4|\delta|\,|\xi_2|^2}{1+2(1-|\delta|)\,\xi_2}\,. \tag{34}$$

Установлены три первых интеграла движения системы (33). Найдены стационарные локализованные решения системы уравнений (33) в виде

$$\Psi_1=\frac{b}{ch(\sqrt{\delta-\omega/\omega_0}\,x)}\,e^{i\omega t},\quad \Psi_2=\frac{\Psi_1^2}{2-\omega/\omega_0}\,. \tag{35}$$

Проведено численное исследование стационарных решений (35) системы (33) и обнаружено, что нелинейные волны оказываются захваченными SU(2) сечением функционального спинового фазового пространства, в отличии от линейных волн, заполняющих все четырехмерное спиновое фазовое пространство. Таким образом,как и в случае обменной анизотропии, для стационарных состояний SU(2) сечение является особого рода классическим аттрактором.

В пятой главе рассматривается полуклассическое описание магнетиков со спином S=1 в действительной параметризации. Будем исследовать анизотропный магнетик,находящийся в магнитном поле, гамильтонианом

$$\hat{H}=-J\sum_j\left\{\hat{\vec{S}}_j\hat{\vec{S}}_{j+1}+\delta\,\hat{S}^z_j\hat{S}^z_{j+1}+A\hat{S}^x_j\right\} \tag{36}$$

усредняя (36) по когерентным состояниям (20) и переходя к континуальному пределу получим классический гамильтониан следующего вида

$$\mathcal{H}=-\frac{J}{a_0}\int\Big\{\cos^2 2g\,(1+\delta\cos^2\theta)-\frac{a_0^2}{2}\big(4\sin^2 2g\cdot g_x^2+\cos^2 2g\,\theta_x^2+\cos^2 2g\,\sin^2\theta\cdot\varphi_x^2\big)+A\cos 2g\,\sin\theta\cos\varphi\Big\}dx. \tag{37}$$

Построен лагранжиан, соответствующий классическим системам

$$L=\hbar\cos 2g\,(\dot\gamma+\cos\theta\,\dot\varphi)-\mathcal{H}(\theta,\varphi,\gamma,g). \tag{38}$$

Также построены скобки Пуассона для классических сопряженных функций $\alpha=\cos 2g$, γ и $\Phi=\cos 2g\cos\theta$, φ

$$\{B,C\}=\left(\frac{\delta B}{\delta\alpha}\frac{\delta C}{\delta\gamma}-\frac{\delta C}{\delta\alpha}\frac{\delta B}{\delta\gamma}\right)+\left(\frac{\delta B}{\delta\Phi}\frac{\delta C}{\delta\varphi}-\frac{\delta C}{\delta\Phi}\frac{\delta B}{\delta\varphi}\right). \tag{39}$$

Варьируя лагранжиан (38) с учетом (37) мы придем к системе уравнений полностью описывающей спиновую динамику ферромагнетика с обменной анизотропией находящейся во внешнем магнитном поле.

Для ферромагнетика с одноионной анизотропией динамические системы уравнений имеют вид:

$$\frac{1}{\omega_0}\dot\varphi=\bar\delta\,\frac{\cos\theta}{\cos 2g}\,(\sin 2g\cos 2\gamma-1)+\frac{a_0^2}{2}\Big(\cos 2g\cos\theta\cdot\varphi_x^2-$$
$$-\frac{1}{\sin\theta}\big(\cos 2g\,\theta_{xx}-4\sin 2g\cdot g_x\theta_x\big)\Big)+A\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi,$$

$$\frac{1}{\omega_0}\dot\theta=a_0^2\big(4\sin 2g\sin\theta\cdot g_x\varphi_x-\cos 2g\sin\theta\cdot\varphi_{xx}-$$
$$-2\cos 2g\cos\theta\;\theta_x\cdot\varphi_x\big)-\bar\delta\,tg 2g\sin 2\gamma\sin\theta\cos\theta+$$
$$+A\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{\omega_0}\dot g=\frac{\bar\delta}{2}\sin 2\gamma\,\sin^2\theta, \tag{40}$$

$$\frac{1}{\omega_0}\dot\gamma=-2\cos 2g+\bar\delta\left[\frac{\cos^2\theta}{\cos 2g}(1-\sin 2g\cos 2\gamma)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}tg 2g\cos 2\gamma\sin^2\theta\right]+a_0^2\big(2\sin 2g\cdot g_{xx}-$$

$$-\cos 2g \cdot \mathrm{ctg}\,\theta \cdot \theta_{xx} + 4\cos 2g \cdot g_x^2 + \cos 2g \cdot \theta_x^2 +$$

$$+ \cos 2g \cdot \varphi_x^2 + 4\sin 2g\, \mathrm{ctg}\,\theta \cdot g_x \cdot \theta_x) - A\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \quad ,$$

который полностью описывает нелинейную динамику магнетиков с одноионной анизотропией при наличии магнитного поля.

Исследовано основное состояние классического аналога гамильтониана (36). Получены магнонные спектры легкоплоскостной модели с обменной анизотропией.

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 (K^2 a_0^2 + A)(K^2 a_0^2 + 2|\bar\delta| + A) \quad , \tag{41}$$

$$\omega_2 = \omega_0 (2 + A).$$

При исследовании основного состояния классического аналога гамильтониана (40) обнаружено, что при определенных значениях константы одноионной анизотропии имеет место сокращение классического спина. В случае анизтропии типа ЛО, когда $A \geq 2\bar\delta$, минимум гамильтониана достигается при

$$\varphi = 0\,,\quad g = 0\,,\quad \gamma = \frac{\pi}{4}\,,\quad \theta = \frac{\pi}{2}\,.$$

Вектор спина лежит вдоль $\hat{S}^x$ и совпадает с направлением поля. Если же $A^2 < A_0^2$,

$$A_0^2 = \frac{\bar\delta}{2}\left(\sqrt{16 + 24\bar\delta + \bar\delta^2} - (4 + \bar\delta)\right),$$

то в основном состоянии $\varphi = 0,\ \gamma = 0,\ \sin 2g = \frac{A^2}{4\bar\delta^2}$,

$$\sin\theta = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{4\bar\delta + A^2}{4\bar\delta - A^2}}\,.$$

Для $A < \bar\delta$ основное состояние есть

$$\varphi = 0\,,\quad \gamma = \frac{\pi}{4}\,,\quad g = 0\,,\quad \sin\theta = \frac{A}{\bar\delta}\,.$$

Из (42) видно, что при определенных значениях внешнего

магнитного поля и поля одноионной анизотропии в основном состоянии имеет место сокращение длины классического спина.

Для ЛП ферромагнетика, если учесть внешнее магнитное поле, то основное состояние определяется значением этого поля. В этом случае приходится решать уравнение для g

$$4\cos 2g \sin 2g - |\bar\delta| \cos 2g + 2A\cos 2g = 0\,,$$

а остальные параметры имеют значение

$$\varphi = 0\,,\quad \gamma = \frac{\pi}{2}\,,\quad \theta = \frac{\pi}{2}\,.$$

Решая уравнение для g получим

$$\sin 2g \to 0 \quad \text{,если} \quad A \to \infty$$

$$\sin 2g \to \frac{|\bar\delta|}{4} \quad \text{,если} \quad A \to 0\,.$$

Как видно, чем больше величина внешнего магнитного поля, тем меньше сокращение длины классического спина. Поэтому сокращение спина экспериментально можно обнаружить при слабом внешнем магнитном поле.Получены магнонные спектры ЛП модели при $|\bar\delta| = (J - J_0)/J_0 < 4$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 K^2 a_0^2 \left(1 + \frac{A}{\cos g}\right)\left[|\bar\delta|(1 + \sin g) + A\cos g \cdot K^2 a_0^2\right],$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 \left\{2\sin g \cdot K^2 a_0^2 + |\bar\delta|\left(\frac{8|\bar\delta|}{2\sin^2 g} - 2\sin g\right)\right\}\,, \tag{43}$$

где тоже существует высокочастотная мода колебаний. Первая мода колебаний похожа на боголюбовскую дисперсию ЛП магнетиков, а вторая есть дисперсия линеаризованного уравнения Клейна-Гордона

<u>В шестой главе</u> на основе обобщенного когерентного состояния группы SU(2s+1) с помощью которого исследуется магнетики с произвольным спином S.

$$|\Psi\rangle = \left(1 + \sum_{i=1}^{2S} |\Psi_i|^2\right)^{-1/2}\left\{|0\rangle + \sum_{i=1}^{2S} \Psi_i |i\rangle\right\}\,, \quad \begin{array}{l} |0\rangle = (0,\dots,1) \\ |i\rangle = (0,\dots,1,\dots 0) \end{array} \tag{44}$$

построены гамильтоновы уравнения движения на пространстве $CP^{2S} = SU(2S+1)/SU(2S) \otimes U(1)$, для произвольного спина S.

$$i\dot{\Psi}_k=\left(1+\sum_{i=1}^{2S}|\Psi_i|^2\right)\left[(1+|\Psi_k|^2)\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\bar{\Psi}_k}+\sum_{j=1}^{2S}\alpha_{jk}\Psi_k\bar{\Psi}_j\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\bar{\Psi}_j}\right], \quad (45)$$

где

$$\alpha_{jk}=\begin{cases}1, & j\neq k\\ 0, & j=0\end{cases}.$$

Изучена квантовая модель Гейзенберга для магнитных систем со спином S=3/2, где оно соответсвует пространству $SU(4)/SU(3)\otimes U(1)$ и ОКС выглядит следующим образом

$$|\Psi\rangle=\left(1+|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2+|\Psi_3|^2\right)^{-1/2}\left\{|0\rangle+\Psi_1|1\rangle+\Psi_2|2\rangle+\Psi_3|3\rangle\right\}. \quad (46)$$

Квантовая система со спином S=3/2 живет в 6-мерном пространстве спиновых состояний, а гамильтониан усреднений по спиновым КС группы SU(2) описывает ее поведение в некотором двумерном сечении этого пространства. Нетрудно показать, что это сечение есть

$$\Psi_3=\frac{\Psi_1^3}{3\sqrt{3}}, \quad \Psi_2=\frac{\Psi_1^2}{\sqrt{3}}, \quad \Psi_1=\sqrt{3}\,\xi. \quad (47)$$

Получено ее полуклассическое описание с помощью средних, парных и тройных корреляторов спиновых операторов. Показано несохранение длины классического спина. Исследованы основные состояния классических гамильтонианов типа (22) и выявлено, что они совпадают с результатами феноменологического описания.

Получены магнонные спектры легкоосной модели и выявлено существование дополнительной высокочастотной моды колебаний.

Получены динамические системы уравнений для магнонных систем в действительной параметризации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ.

1. Х.О.Абдуллоев, А.В.Маханьков, Ф.Х.Хакимов "Классические нелинейные модели в теории конденсированных сред." Душанбе, из-во "Дониш",1989г, 179 с.

2. Х.О.Абдуллоев, А.В.Маханьков .О преобразованиях Холштейна-Примакова для магнитных систем и самолокализации спиновых волн . Препринт ОИЯИ, Р 17-88-165, Дубна 1988.

3. Х.О.Абдуллоев, А.В.Маханьков О квазиклассическом описании анизотропного магнетика Гейзенберга . Препринт ОИЯИ Р 17-87-461, Дубна, 1987.

4. Х.О.Абдуллоев, А.В.Маханьков, Ф.Х.Хакимов Преобразование Холштейна-Примакова для модели Гейзенберга с одноосной анизотропией . Известия АН Тадж.ССР, 1989, т.109, N.3, стр.80-84.

5. Kh.O.Abdulloev, A.V.Makhankov. Quasiclassical description of easy-plane Heisenberg model and dynamics of wave packets. W.S.Singapore, 1990, pp. 387-391.

6. Х.О.Абдуллоев, А.В.Маханьков. Квазиклассическое поведение начальных пакетов спиновых волн в рамках легкоплоскостной модели Гейзенберга. Известия АН Тадж.ССР, 1991, N.2,242-247.

7.Х.О.Абдуллоев, А.В.Маханьков, Ф.Х.Хакимов. Локализация спиновых волн в легкоплоскостной модели Гейзенберга. Известия АН Тадж.ССР, 1989, т.109, 3, стр.80-83.

8. Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов. Численное решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Шредингера в теории спиновых волн. В сб.Тезисы докладов 26-ой научной конференции факультета физико-математических и естественных наук. М.из-во УДН, 1990, с.37.

9. Х.О.Абдуллоев, В.Г.Маханьков, Ф.Х.Хакимов. О классе решений векторного нелинейного уравнения Шредингера ДАН Тадж.ССР,1986, N9. т.29, стр.527-531.

10. Kh.O.Abdulloev, M.Aguero, A.V.Makhankov, V.G.Makhankov, Kh.Kh.Muminov. Generalized spin coherent states as a tool to study quasiclassical behaviour of the Heisenberg ferromagnet. Proceeding of the IV International Workshop, Dubna 1989; W.S.Singapore, 1990, pp.244-265.

11. Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, В.Г.Маханьков, Х.Х.Му-

минов. Нелинейная динамика анизотропного легкоплоскостного магненитика со спином S=1. Препринт ОИЯИ Р 17-90-298, Дубна, 1990 г.

12. Х.О.Адуллоев, А.В.Маханьков, Х.Х.Муминов. Вакуум ферромагнетика Гейзенберга как боголюбовский конденсат магнонов. Препринт ОИЯИ Р 17-90-310, Дубна, 1990 г.

13. Х.О.Абдуллоев, Х.Х.Муминов. Обобщенные когерентные состояния и цепочка Гейзенберга для спина S=1. ДАН Таджикистан, 1990, т.333, N10, стр. 656-659.

14. Х.О.Абдуллоев, Х.Х.Муминов. Описание магнетика Гейзенберга при пространственном повороте со спином S=1. ДАН Тадж.ССР, 1990, т.33, N9, стр.593-595.

15. Х.О.Абдуллоев, Х.Х.Муминов, Ф.Х.Хакимов. Вакуум легкоплоскостной модели Гейзенберга как боголюбовский конденсат магнонов. ДАН Тадж.ССР, 1990, т.33, N6, стр. 377-380.

16. Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов. Динамика спиновых волн легкоплоскостного магнетика Гейзенберга со спином S=1. ДАН Тадж.ССР, 1991, т.34, 3, стр. 153-156.

17. Kh.O.Abdulloev, V.G.Makhankov, F.Kh.Khakimov, Kh.T.Kholmurodov. Numerical simulation of the model Proccedings of the III International workshop, 1988, Kiev; Naukova Dumka, 1989, pp.16-18.

18. Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов. Об одной системе уравнений в теории спиновых волн. ДАН Тадж.ССР, 1991, т.34, N,6, стр.327-329.

19. Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов. Гамильтоновы уравнения движения в пространстве SU(3)/SU(2)xU(1). ДАН Тадж.ССР, 1991, т.34, N7, стр.431-434.

20. Х.О.Абдуллоев, В.Г.Маханьков, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов. Системыуравнений для ферромагнетиков с обменной и одноионной анизотропией. ФТТ, 1992, т.34, N2, стр.429-432.

21. Х.О.Абдуллоев, В.Г.Маханьков, А.Т.Максудов , Х.Х.Муминов. Общие динамические уравнения в пространстве SU(2s+1)/SU(2s)xU(2) илегкоосный магнетик со спином S=3/2. ФТТ, 1992, т.34, N2,стр.544-547.

22. Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов. О соотвествии квантовых и классических моделей в теории конденсированных сред. Материалы Всесоюзного семинара "Межчастичные взаимодействия в растворах", 1990, стр.51-58.

23. Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов. Несохранение квадрата классического спина в нелинейной динамике ферромагнетике Гейзенберга. Вестник ТГУ, Душанбе, 1991, стр. 88-92

24. Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов. О возбуждении новой моды при учете одноионной анизотропии в теории спиновых волн. ДАН Тадж.ССР, 1991, т.34, N12.

25. Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов, Зияд Рустам. Описание магнитной цепочки со спином S=3/2, с обменной анизотропией. Вестник ТГУ, 1991, стр. 158-163.

26.Kh.O.Abdulloev, A.T.Maksudov, Kh.Kh.Muminov. Noncon-servation of classical spin square in the Heisenberg model ferromagnet. International Workshop Nonlinearity with Disorder. Tashkent, 1990, 1-7 oktober.

27. Kh.O.Abdulloev, A.T.Maksudov, V.G.Makhankov, Kh.Kh.Muminov. Dynamical equations for spin chaiin in the SU(S2+1)/SU(2S)xU(1) space and easy axis magnet.Preprint JINR E17-91-221, Dubna, 1991.

28. Kh.O.Abdulloev, V.G.Makhankov, A.T.Maksudov, Kh.Kh.Muminov. On semiclassical behaviour of the S=1 uniaxical Heisenberg magnet. Preprint JINR, E17-91-219, Dubna, 1991.

29. Kh.O.Abdulloev, V.G.Makhankov, A.T.Maksudov, Kh.Kh.Muminov. Dynamical eguations for spin chain in the SU=3/2 easy axis magnet. Physia Scripta, 1992, N.2, p.340.

30. Х.О.Абдуллоев,Зияд Рустам, Ф.Х.Хакимов. Решение системы уравнений с обменной и одноионной анизотропией в одномерном ферромагнетике в виде стационарных солитонов. УДН, 1992. В сб. тезисы докладов 2-ой научной конференции факультета физико-математических и естественных наук. М. УДН, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 октября 1992 года.