ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

17-90-555

ПАТРИК
Анатолий Евгеньевич

УДК 531.19

СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ: ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СОСЕДЕЙ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1990

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель-
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник ЗАГРЕБНОВ
Валентин Анатольевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор РЕБЕНКО
Алексей Лукич

доктор физико-математических наук,
профессор ГОНЧАР
Николай Семенович

Ведущая организация-
Институт проблем передачи информации АН СССР, Москва

Автореферат разослан " _ " ____________ 1990 г.

Защита диссертации состоится " _ " ____________ 1991 г. на заседании Специализированного совета К 047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно познакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук А. Е. ДОРОХОВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Последние два десятилетия физика неупорядоченных систем была одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений статистической механики. Среди многочисленных моделей неупорядоченных спиновых систем можно выделить два больших подкласса. Это модели спиновых стекол и ферромагнетиков в случайном внешнем поле.

Многочисленные теоретические исследования спиновых стекол берут свое начало с известных работ Эдвардса, Андерсона и Шеррингтона, Киркпатрика, в которых были предложены и исследовались наиболее известные в настоящее время модели спиновых стекол. Основным рабочим инструментом для исследования равновесных свойств (термодинамики) моделей данного типа является так называемый метод реплик. Однако, уже в работах Шеррингтона и Киркпатрика отмечалось, что несмотря на то, что указанный метод дает качественно правильное описание основных черт поведения исследуемых моделей, количественные предсказания этого метода определенно неверны. Позднее данный метод был усовершенствован в серии работ Паризи. Тем не менее, несмотря на попытки исследования применимости метода реплик, его математический статус (за исключением случая высокой температуры) до сих пор не ясен. Поэтому представляется актуальным исследование различных моделей спиновых стекол методами, отличными от метода реплик. В настоящей диссертации таким методом является исследование глауберовой динамики спиновых стекол.

Еще одна, широко известная в настоящее время, модель спинового стекла была сформулирована в работах Хопфилда и изначально определялась как модель ассоциативной памяти. Уже численные эксперименты показали, что данная модель успешно воспроизводит многие свойства биологических запоминающих устройств (головного мозга человека и животных). Среди этих свойств необходимо отметить следующие: способность к распознаванию искаженных образов (например, способность человека читать текст при наличии большого числа грамматических ошибок); быстрота распознавания образов (несмотря на медленную работу каждого отдельного элемента - нейрона, нейронная сеть превосходит современный суперкомпьютер при распознавании зрительных образов); безадресный способ хранения информации и ассоциативность памяти (полный образ может быть воспроизведен при предъявлении различных стимулов, в том числе, например, его фрагмента); значительная устойчивость по отношению к внешним неблагоприятным воздействиям (отмирание нейронов не способно существенно нарушить нормальное функционирование памяти).

Работы Хопфилда вызвали многочисленные теоретические исследования по указанному предмету. Основным рабочим инструментом являлся по-прежнему метод реплик. Исключения составляют лишь немногочисленные работы по исследованию динамики модели Литтла-Хопфилда, основанные либо на довольно грубых аппроксимациях, либо посвященные исследованию нескольких первых шагов эволюции перекрытия образа со спиновой конфигурацией (главное перекрытие). Поэтому исследование динамики различных моделей нейронных сетей представляется весьма актуальным.

Исследование свойств различных моделей ферромагнетиков в случайном внешнем поле уже длительное время привлекает внимание физиков и математиков. Достаточно упомянуть, например, многолетнюю дискуссию (в которой принимали участие Имри, Ма, Фрелих, Брикмонт, Купиайнен, Фишер, Спенсер, Айзенман и др.) по поводу нижней критической размерности модели Изинга в случайном внешнем поле. До сих пор в этой области существуют нерешенные концептуальные проблемы. Одной из таких проблем является отсутствие определения предельного гиббсовского распределения в системах со случайным гамильтонианом. Поэтому попытка дать определение предельного гиббсовского распределения для подобных систем и иллюстрация его содержательности на примере простейшей нетривиальной модели ферромагнетика (модели Изинга со взаимодействием эквивалентных соседей - модель Кюри-Вейсса) в случайном внешнем поле, приведенные в диссертации, представляются актуальными.

Одним из наиболее важных понятий теории случайных систем

является понятие самоусреднения термодинамических величин. Это понятие было введено в теорию неупорядоченных систем И. М. Лифшицем. В работе Пастура и Фиготина самоусредняемость была доказана для плотности свободной энергии широкого класса случайных спиновых систем. Однако термодинамического формализма для адекватного описания наблюдаемых в случае отсутствия самоусредняемости создано не было. Поэтому анализ причин нарушения самоусредняемости некоторых наблюдаемых и введение нового понятия: условного самоусреднения термодинамических величин представляется весьма актуальным.

Цель работы заключается в изучении параллельной динамики некоторых моделей нейронных сетей (спиновых стекол) и в получении явных выражений для эволюции главных перекрытий, а также в описании предельных гиббсовских распределений, введении понятия условного самоусреднения в теорию случайных спиновых систем и их иллюстрации на примере модели ферромагнетика Кюри-Вейсса в случайном внешнем поле.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Предложен новый метод исследования динамики нейронных сетей (спиновых стекол), основанный на вероятностном подходе к описанию эволюции главных и остаточных перекрытий.

2. На основе предложенного метода получен ряд новых результатов, касающихся динамики некоторых моделей нейронных сетей. А именно, получены явные рекуррентные соотношения, описывающие эволюцию главного перекрытия модели Литтла-Хопфилда и модели симметричной сильно разбавленной нейронной сети.

3. На основе предложенного метода получено математически строгое доказательство результатов, касающихся динамики многослойных нейронных сетей с направленными связями (многослойный перцептрон).

4. Предложен метод исследования нейронных сетей, позволяющий рассматривать нейроны с более чем двумя дискретными состояниями.

5. Предложено определение предельных гиббсовских распределений для случайных систем статистической механики.

Приведены иллюстрации на примере модели Кюри-Вейсса-Изинга в случайном внешнем поле.

6. Введено понятие условного самоусреднения термодинамических наблюдаемых. Продемонстрирована его эффективность для исследования предельных значений термодинамических наблюдаемых модели Кюри-Вейсса-Изинга в случайном внешнем поле.

Практическая и теоретическая ценность. Разработанный в диссертации метод может быть использован для исследования параллельной динамики широкого класса моделей нейронных сетей (спиновых стекол). Полученные в диссертации результаты позволяют понять основные свойства различных вариантов модели Литтла-Хопфилда и могут служить основой для дальнейших исследований в этом направлении.

Предложенные в диссертации понятия гиббсовского распределения и условного самоусреднения являются основой для более глубокого понимания термодинамического поведения случайных систем статистической механики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на: V-й Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 1989 г.); Международном симпозиуме по математическому моделированию (Альбена, Болгария, 1990 г.); Школе для молодых ученых: Динамические системы, хаос и т.п. (Лейпциг, ГДР, 1990 г.); Школе-семинаре "Математические методы анализа сложных систем со случайными компонентами" (Миасс, 1989 г.), а также на семинарах "Статистическая механика" механико- математического факультета Московского государственного университета; на семинарах по статистической физике Львовского отделения статистической физики Института теоретической физики АН УССР; на семинарах Центра теоретической физики - Люмини, Марсель; на семинаре "Стохастические модели", Университет, Гейдельберг; на семинаре "Теория нейронных сетей", Университет, Лейпциг и на семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, Дубна.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах 1-7.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения и двух глав. Общий объем диссертации 98 страниц машинописного текста. Список литературы содержит 84 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении дается обзор развития основных проблем в том, или иной степени затронутых в диссертации; краткий обзор известных в настоящее время результатов, а также описаны структура диссертации и ее основные результаты.

В первой главе диссертации формулируется новый метод, на основе которого производится исследование глауберовой динамики (при нулевой и ненулевой температурах) трех моделей нейронных сетей. Первая - это модель многослойной нейронной сети (многослойный перцептрон), которая определяется следующим образом. Модель состоит из L слоев, каждому из которых присвоен некоторый номер l: $0 \le l \le L-1$. Каждый слой содержит N спиновых переменных (моделирующих нейроны) $s_i(l)=\pm1$; $i=1,2,\ldots,N$. Каждый спин слоя l соединен связями со всеми спинами соседних слоев l-1; l+1. Связи являются направленными: состояние слоя l (конфигурация $\underset{\sim}{s}(l)\equiv\{s_i\}_{i=1}^{N}$) полностью определяется состоянием (только) предшествующего слоя l-1 согласно следующему правилу.

$$S_i(l)=\mathrm{sign}\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{M}\xi_i^{(p)}(l)\,\xi_j^{(p)}(l-1)\,s_j(l-1)+\varphi_i(l)\right] \qquad (1)$$

Здесь $\left\{\xi_i^{(p)}(l)\right\}_{i=1,p=1,l=0}^{N\quad M\quad L-1}$ -поле независимых одинаково распределенных случайных величин (моделирующее запоминаемые образы), $\Pr(\xi_i^{(p)}(l)=\pm1)=\frac{1}{2}$. Поле $\{\varphi_i(l)\}_{i=1,l=0}^{N\quad L-1}$ - это независимые одинаково распределенные величины, плотность распределения которых (относительно меры dx на $\mathbb{R}^1$) $p(x)=\dfrac{\beta}{2\cosh^2\beta x}$, моделирующие температурный шум ($\beta=\frac{1}{\theta}$ - обратная температура).

В начальный момент на нулевом слое (l=0) создается конфигурация $\{s_i(0)\}_{i=1}^{N}$, имеющая макроскопическое перекрытие с одним из запомненных образов $\left\{\xi_i^{(q)}(0)\right\}_{i=1}^{N}$:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{(q)}(0)s_i(0)=m^{(q)}(0)>0.$$

Затем, слой за слоем, производится реконструкция конфигураций на остальных слоях согласно правилу (1). Задача состоит в определении эволюции главного перекрытия $m_N^{(q)}(l)\equiv\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{(q)}(l)s_i(l)$ в, так называемом "α"-пределе: $N\to\infty$, $M\to\infty$, $\frac{M}{N}\to\alpha$.

Вторая - это модель Литтла-Хопфилда. Модель представляет собой систему N спиновых переменных (моделирующих нейроны) $s_i=\pm1$; $i=1,2,\dots,N$; взаимодействие между которыми определяется правилом Хебба $J_{ij}^{(M)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{(p)}\xi_j^{(p)}$; $i,j=1,2,\dots,N$; $i\neq j$. Эволюция системы происходит согласно следующему правилу (глауберова динамика):

$$s_i(t+1)=\mathrm{sign}\left[\frac{1}{N}\sum_{j(\neq i)}\sum_{p=1}^{M}\xi_i^{(p)}\xi_j^{(p)}s_j(t)+\varphi_i(t)\right];\quad i=1,2,\dots,N \qquad (2)$$

Здесь $\left\{\xi_i^{(p)}\right\}_{i=1,\,p=1}^{N\quad M}$ - поле независимых одинаково распределенных случайных величин, $\Pr(\xi_i^{(p)}=\pm1)=\frac{1}{2}$, моделирующее M запомненных образов $\underset{\sim}{\xi}^{(p)}\equiv\left\{\xi_i^{(p)}\right\}_{i=1}^{N}$, $p=1,2,\dots,M$. Определение величин $\varphi_i(t)$ такое же, как и в (1). В начальный момент времени задается конфигурация $\left\{s_i(0)\right\}_{i=1}^{N}$, имеющая макроскопическое перекрытие с одним из запомненных образов $\underset{\sim}{\xi}^{(p)}$: $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{(q)}s_i(0)=m^{(q)}(0)>0$. Задача состоит в определении эволюции главного перекрытия $m_N^{(q)}(l)\equiv\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{(q)}(l)s_i(l)$ в "α"-пределе: $N\to\infty$, $M\to\infty$, $\frac{M}{N}\to\alpha$. Глауберова динамика (2) генерируется гамильтонианом

$$H_N=-\frac{1}{N}\sum_{j\neq i}^{N}\sum_{p=1}^{M}\xi_i^{(p)}\xi_j^{(p)}s_is_j$$

Третья - это модель симметричной сильно разбавленной нейронной сети, которая определяется аналогично модели Литтла-Хопфилда. Отличие состоит в том, что динамика системы определяется правилом

$$s_i(t+1)=\mathrm{sign}\left[\frac{1}{2C}\sum_{j(\neq i)}C_{ij}\sum_{p=1}^{M}\xi_i^{(p)}\xi_j^{(p)}s_j(t)+\varphi_i(t)\right];\ i=1,2,\dots,N \qquad (3)$$

Здесь поле случайных величин $\left\{C_{ij}\right\}_{i\neq j}^{N}$ задается следующим образом. Сначала определим поле независимых одинаково распределенных случайных величин $\left\{\tilde{C}_{ij}\right\}_{i\neq j}^{N}$, $\tilde{C}_{ij}\in\{0;1\}$, $\Pr\left[\tilde{C}_{ij}=1\right]=\frac{C}{N}$, после чего симметризуем его: $C_{ij}=\max\left[\tilde{C}_{ij};\tilde{C}_{ji}\right]$. Эволюция главного перекрытия данной модели изучается в пределе: $N\to\infty$; затем $M\to\infty$; $C\to\infty$; $\frac{M}{C}\to\alpha$.

В разделе I.1, на математически строгом уровне, показано, что эволюция главного перекрытия $m^{(q)}(l)$ модели (1) описывается следующей системой рекуррентных соотношений ($m^{(q)}(t=0)=m^{(q)}(0)$; $D(t=0)=1$)

$$m^{(q)}(t+1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha D(t)}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\, e^{-\frac{y^2}{2\alpha D(t)}}\tanh\beta\left(y+m^{(q)}(t)\right)$$

$$D(t+1)=1+\frac{1}{2\pi\alpha}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,\frac{\beta}{\cosh^2\beta y}\,e^{-\frac{\left(y-m^{(q)}(t)\right)^2}{2\alpha D(t)}}\right]^2$$

Для нулевой температуры ($\varphi_i(t)=0$) рекуррентные соотношения принимают вид

$$m^{(q)}(t+1)=\mathrm{erf}\left[\frac{m^{(q)}(t)}{\sqrt{\alpha D(t)}}\right];\quad \mathrm{erf}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x dz\, e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$D(t+1)=1+\frac{1}{\pi\alpha}\exp\left[-\frac{\left(m^{(q)}(t)\right)^2}{\alpha D(t)}\right]$$

Содержание раздела I.1 можно рассматривать, как математически строгое доказательство результатов известных ранее.

В разделе I.2 получена система рекуррентных соотношений, описывающих эволюцию главного перекрытия для модели (3).

$$m^{(q)}(t+1)=\sum_{\delta=\pm1}\frac{1+\delta m^{(q)}(t-1)}{2\sqrt{2\pi\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\, e^{-\frac{y^2}{2\alpha}}\tanh\beta\left(m^{(q)}(t)+\delta g(t)+y\right),$$

$$g(t+1)=\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\sum_{\delta=\pm1}\frac{1+\delta m^{(q)}(t-1)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\, e^{-\frac{y^2}{2\alpha}}\frac{\beta}{2\cosh^2\beta\left(y-m^{(q)}(t)-\delta g(t)\right)}$$

В случае нулевой температуры данные соотношения принимают вид ($g(0)=0$; $m^{(q)}(t=0)=m^{(q)}(0)$).

$$m^{(q)}(t+1)=\sum_{\delta=\pm1}\frac{1+\delta m^{(q)}(t-1)}{2}\,\mathrm{erf}\left[\frac{m^{(q)}(t)+\delta g(t)}{\sqrt{\alpha}}\right]$$

$$g(t+1)=\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\sum_{\delta=\pm1}\frac{1+\delta m^{(q)}(t-1)}{2}\exp\left[-\frac{\left(m^{(q)}(t)+\delta g(t)\right)^2}{2\alpha}\right]$$

Из рекуррентных соотношений для нулевой температуры следует, что существует $\alpha^c\approx1.55$ такое, что $\lim\limits_{t\to\infty} m^{(q)}(t)=0$ при $\alpha\geq\alpha^c$ для любого значения начального перекрытия $m^{(q)}(0)$. То есть, при $\alpha\geq\alpha^c$ эта модель не может работать как ассоциативная память.

В разделе I.3 получены рекуррентные соотношения, описывающие эволюцию главного перекрытия для модели Литтла-Хопфилда. В случае нулевой температуры данные соотношения имеют вид

$$m^{(q)}(t+1)=\sum_{\{\delta_\tau=\pm1\}_{\tau=0}^{t-1}}P_1(\delta_0;\delta_1;\dots;\delta_{t-1})\,\mathrm{erf}\left[\frac{m^{(q)}(t)+\alpha\sum_{\tau=0}^{t-1}a_{t-\tau}(t)\delta_\tau}{\alpha D(t)}\right];$$

$$a_0(t+1)=1;\quad a_{t+1-\tau}(t+1)=2p_t(x=0)\,a_{t-\tau}(t);$$

$$p_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha D(t)}}\sum_{\delta=\pm1;\{\delta_\tau=\pm1\}_{\tau=0}^{t-1}}P_2(\delta;\delta_0;\delta_1;\dots;\delta_{t-1})\exp\left[-\frac{\left(x-\delta m^{(q)}(t)+\alpha\sum_{\tau=0}^{t-1}a_{t-\tau}(t)\delta_\tau\right)^2}{2\alpha D(t)}\right]$$

$$D(t+1)=1+\left(2p_t(x=0)\right)^2D(t)+4p_t(x=0)\cdot\sum_{\tau=0}^{t}a_{t-\tau}(t)\,C_{t+1,\tau};$$

$$C_{t+1,\tau}=\sum_{\{\delta_\tau=\pm1\}_{\tau=0}^{t+1}}\delta_{t+1}\delta_\tau\,P_1(\delta_0;\delta_1;\dots;\delta_{t+1});$$

$$P_1(\delta_0;\dots;\delta_{t+1})=\frac12\left\{1+\delta_{t+1}\,\mathrm{erf}\left[\frac{m^{(q)}(t)+\alpha\sum_{\tau=0}^{t-1}a_{t-\tau}(t)\delta_\tau}{\sqrt{\alpha D(t)}}\right]\right\}P_1(\delta_0;\dots;\delta_t);$$

$$P_2(\delta;\delta_0;\dots;\delta_{t+1})=\frac12\left\{1+\delta_{t+1}\,\mathrm{erf}\left[\frac{\delta m^{(q)}(t)+\alpha\sum_{\tau=0}^{t-1}a_{t-\tau}(t)\delta_\tau}{\sqrt{\alpha D(t)}}\right]\right\}P_2(\delta;\delta_0;\dots;\delta_t);$$

с начальными условиями

$$D(0)=1;\quad m^{(q)}(t=0)=m^{(q)}(0);\quad P_1(\delta_0)=\frac{1+\delta_0 m^{(q)}(0)}{2};\quad P_2(\delta;\delta_0)=\frac{1+\delta\delta_0 m^{(q)}(0)}{4}.$$

Кроме того, в этом же параграфе исследован вопрос о том, какими свойствами должен обладать аттрактор динамики (2), в области которого находится начальная конфигурация, для того, чтобы рекуррентные соотношения (4) в пределе $t\to\infty$ приводили к формулам, полученным на основе термодинамического исследования модели (2) методом реплик (анзац симметричных реплик). Эти свойства сводятся к требованиям инвариантности: для любой конфигурации $s(t)$, принадлежащей аттрактору, имеем

1. $$m^{(q)}(t+1)=m^{(q)}(t)$$

2. $$\nu^{(p)}(t+1)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{(p)}s_i(t+1)=\nu^{(p)}(t)$$

   для всех $p(\neq q)=1,2,\dots,M$.

3. $$\text{"}d\text{"}-\lim\frac{1}{\sqrt M}\sum_{p(\neq q)}\xi_i^{(p)}\frac{1}{\sqrt N}\sum_{j(\neq i)}\xi_j^{(p)}s_j(t)\overset{d}{=}\mathcal{N}(0;D)$$

В последнем (четвертом) параграфе первой главы предлагается метод исследования нейронных сетей, содержащих нейроны с более чем двумя возможными дискретными состояниями. Рассматриваются две модели:

-модель нейронной сети Поттса-Хопфилда, определяемая гамильтонианом

$$H_N(\underset{\sim}{s}_N)=-\sum_{i\neq j}^{N}\frac1N\sum_{\mu=1}^{M}\left(\delta(\xi_i^{(\mu)};s_i)-\frac1q\right)\left(\delta(\xi_j^{(\mu)};s_j)-\frac1q\right)\qquad(4)$$

где $\sigma_i: 1\to\{1,2,\dots,q\}\equiv Q$; $\{\xi_i^{(\mu)}\}_{i=1}^{N}$; $\mu=1,2,\dots,M$; независимые одинаково распределенные случайные величины; $\xi_i^{(\mu)}\in Q$;

$Pr(\xi_i^{(\mu)}=p\in Q)=\frac{1}{q}$; а $\delta(\bullet;\bullet)$ – символ Кронеккера.

–модель нейронной сети (модель часов), определяемая гамильтонианом

$$H_N(\underset{\sim}{\sigma}_N)=-\sum_{i\neq j}^{N}\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{M}\cos\frac{2\pi}{q}\left[\theta_i^{\mu}-\sigma_i\right]\cos\frac{2\pi}{q}\left[\theta_j^{\mu}-\sigma_j\right] \tag{5}$$

где $\sigma_i: i\to Q$; $\{\theta_i^{(\mu)}\}_{i=1}^{N}$; $\mu=1,2,\ldots,M$; независимые одинаково распределенные случайные величины; $\theta_i^{(\mu)}\in Q$; $Pr(\theta_i^{(\mu)}=p\in Q)=\frac{1}{q}$.

Гамильтонианы моделей (4) и (5) можно переписать ввиде

$$H_N(\underset{\sim}{\sigma}_N)\equiv-\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(\sigma_i;\{\sigma_j\}_{j(\neq i)}),$$

после чего динамика этих моделей определяется следующим образом

$$\sigma_i(t)\to\sigma_i(t+1):-\varepsilon_i(\sigma_i(t+1);\{\sigma_j(t)\}_{j(\neq i)})=\min_{\sigma_i\in Q}-\varepsilon_i(\sigma_i;\{\sigma_j(t)\}_{j(\neq i)})$$

Как обычно, величиной, представляющей наибольший интерес, является главное перекрытие, которое определяется, как

$m_N^{(\nu)}(t=n)=\frac{q}{q-1}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta(\xi_j^{\nu},\sigma_j(t=n)-\frac{1}{q})$ в случае модели (4) и как

$m_N^{(\nu)}(t=n)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cos(\theta_j^{\nu}-\sigma_j(t=n))$ в случае модели (5). В качестве начального условия рассматривается случайная конфигурация $\{\sigma_j(t=0)\}_{j=1}^{N}$ такая что $\lim\limits_{N\to\infty} m_N^{(\mu)}(t=0)=\delta_{\mu\nu}m^{(\nu)}(0)>0$, $\{\sigma_j(t=0)\}_j$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, которые независимы от всех случайных величин $\{\xi_i^{(\mu)}\}_{i=1}^{N}$, $\mu\neq\nu$ и $\{\theta_i^{(\mu)}\}_{i=1}^{N}$ $\mu\neq\nu$ в случае моделей (4) и (5) соответственно.

Основны результатом является формула первого шага динамики величины $m_N^{(\nu)}(t=n)$ для модели (4):

$$m^{(\nu)}(t=1)=\frac{q}{q-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,e^{-y^2/2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y+\sqrt{\frac{q(q-1)}{2}}m_q(1)}dt\,\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]^{q-1}-\frac{1}{q}\right\} \tag{6}$$

Аналогичная формула для модели (5) получена только для q=3,4. При q=3 она совпадает с формулой (6), а при q=4 с

соответствующей формулой для модели Литтла-Хопфилда. Указаны причины этих совпадений.

Вторая глава диссертации посвящена рассмотрению двух вопросов: распространению определения предельного гиббсовского распределения на решеточные спиновые системы со случайным гамильтонианом и исследованию несамоусредняющихся термодинамических наблюдаемых.

Пусть задана некоторая спиновая система, гамильтониан которой $H_N\left[\underset{\sim}{s}_N;\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}\right]$ зависит от некоторого случайного поля $\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}$, определенного на вероятностном пространстве (Ω,Σ,ν). В случае, когда $\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}$ интерпретируется как, например, случайное внешнее поле имеем $\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}=\left\{h_i(\bullet)\right\}_{i\in Z}$, где Z решетка, в узлах которой находятся спины. Если мы фиксируем реализацию $\left\{\eta_x(\omega)\right\}_{x\in X}$, $\omega\in\Omega$ указанного поля, то для данной реализации мы будем иметь "обычный" гамильтониан $H_N\left[\underset{\sim}{s}_N;\left\{\eta_x(\omega)\right\}_{x\in X}\right]$, засисящий только от динамических переменных $\underset{\sim}{s}_N$, для которого предельные гиббсовские распределения определяются обычным образом. Поэтому, если для ν-почти всех реализаций $\omega\in\Omega$ соответствующему гамильтониану $H_N\left[\underset{\sim}{s}_N;\left\{\eta_x(\omega)\right\}_{x\in X}\right]$ отвечает единственное предельное гиббсовское распределение $\mathbb{P}\left[\bullet;\left\{\eta_x(\omega)\right\}_{x\in X}\right]$, то предельное гиббсовское распределение для гамильтониана $H_N\left[\underset{\sim}{s}_N;\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}\right]$ естественно определить как случайную меру $\mathbb{P}\left[\bullet;\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}\right]$.

Отметим, что в данном случае $\mathbb{P}\left[\bullet;\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}\right]$ почти наверное (п. н.), т. е. с ν-вероятностью 1, есть слабый предел последовательности гиббсовских распределений в конечных объемах Λ:

$\mathbb{P}\left[\bullet;\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}\right]=\lim\limits_{\Lambda\uparrow Z}\mathbb{P}_\Lambda\left[\bullet;\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}\right]$ ν-п. н. .

В случае, когда для любого $\omega\in W$, $W\in\Sigma$, $\nu(W)>0$ гамильтониану

$H_N\left[\underset{\sim}{s}_N;\left\{\eta_x(\omega)\right\}_{x\in X}\right]$ соответствует более одного предельного распределения, можно попытаться видоизменить определение следующим образом. Предположим, что для любого подмножества $T\subset\mathbb{Z}$, $|T|<\infty$ и любого множества $A_T\subset\{-1;1\}^{|T|}$ существуют (по распределению) следующие пределы

$\lim\limits_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}} \mathbb{P}_\Lambda\left[\left\{\underset{\sim}{s}_\Lambda : \underset{\sim}{s}_\Lambda\upharpoonright T\in A_T\right\}\right]\overset{d}{=}\mu_T(A_T)$ и случайные величины $\mu_T(A_T)$ определены на вероятностном пространстве (Ω',Σ',ν'). Если для почти всех (по мере ν') $\omega\in\Omega'$ имеют место:

(а) аддитивность $\left[\mu_T(A_T\cup B_T)=\mu_T(A_T)+\mu_T(B_T)\right.$, для любых непересекающихся A_T и $\left.B_T\right]$,

(б) согласованность $\left[\text{т. е. для любых конечных } T,R;\ T\subset R\right.$ выполняется $\left.\mu_R\left[A_T\cup\{-1;1\}^{|R\setminus T|}\right]=\mu_T(A_T)\right]$,

построенного таким образом семейства конечномерных распределений $\left\{\mu_T(\bullet)\right\}_{T\subset\mathbb{Z}}$, то, согласно теореме А. Н. Колмогорова о продолжении меры, для каждого, из указанных, $\omega\in\Omega'$ существует единственная вероятностная мера $\mathbb{P}(\bullet;\omega)$, заданная на $\left(\Omega_1\equiv\{-1;1\}^{\mathbb{Z}};\mathcal{B}(\Omega_1)\right)$ такая, что $\mathbb{P}\left[\left\{\underset{\sim}{s}:\underset{\sim}{s}\upharpoonright T\in A_T\right\};\omega\right]=\mu_T(A_T)$ для всех T и A_T.

<u>Определение 1</u>. Случайную меру $\mathbb{P}(\bullet;\bullet)$ на $\mathcal{B}(\Omega_1)$, определенную (как случайный элемент) на вероятностном пространстве (Ω',Σ',ν') мы назовем предельным гиббсовским распределением, соответствующем спиновой системе со случайным гамильтонианом $H_N\left[\underset{\sim}{s}_N;\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}\right]$.

В разделе II.1 диссертации показано, что данное определение имеет смысл и является содержательным для модели Изинга со взаимодействием эквивалентных соседей в случайном внешнем поле. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$H_N=-\frac{J}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}s_j\right)^2-\sum_{i=1}^{N}h_i s_i$$

Второй проблемой, рассмотренной в главе П диссертации является вопрос о несамоусредняемости термодинамических наблюдаемых. Пусть, как и ранее, спиновая система задана

гамильтонианом $H_N\left[\underset{\sim}{s}_N;\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}\right]$. Рассмотрим некоторую наблюдаеую $g_N(\bullet)$, например, плотность свободной энергии или намагниченность. Пусть значение этой величины для фиксированного ω и неслучайного гамильтониана $H_N\left[\underset{\sim}{s}_N;\left\{\eta_x(\bullet)\right\}_{x\in X}\right]$ есть $g_N(\omega)$. Если для ν-почти всех ω при $N\to\infty$ существует предел последовательности $\left\{g_N(\omega)\right\}_N$, независящий от ω, то говорят, что имеет место самоусредняемость наблюдаемой $g_N(\bullet)$. В случае, когда это свойство не выполняется, полезным является следующее определение.

<u>Определение 2</u>. Пусть $\left\{g_N(\omega)\right\}_{N\geq 1}$ последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве (Ω,Σ,ν) и $g(\bullet)$ случайная величина, определенная на вероятностном пространстве (Ω',Σ',ν'). Мы будем говорить, что данная последовательность является условно самоусредняющейся, если:

(i) $g_N(\bullet)\overset{d}{\to}g(\bullet)$ по распределению при $N\to\infty$.

(ii) существует разбиение $\mathcal{D}=\{D_1;D_2;\ldots;D_k\}$ множества Ω' такое, что $g(\bullet)=\sum\limits_{i=1}^{k}g_i I_{D_i}(\bullet)$, где I_D индикатор множества D и $\bigcup\limits_{i=1}^{k}D_i=\Omega'$.

Соответственно, мы будем говорить, что термодинамическая наблюдаемая $g_N(\bullet)$ – величина условно самоусредняющаяся, если таковой является последовательность $\left\{g_N(\bullet)\right\}_N$.

При $k=1$, условно самоусредняющиеся величины являются просто самоусредняющимися.

В разделе П.2 диссертации показано, что для определенных значений параметров намагниченность модели (5) не является самоусредняющейся величиной, но является условно самоусредняющейся. В этом же параграфе обсуждается физический смысл введенного понятия.

Автор искренне благодарен своему научному руководителю В. А. Загребнову.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Патрик А. Е., Модель Кюри-Вейсса-Изинга в случайном внешнем поле: общий формализм. Acta Physica Polonica A, vol. A77, N4, pp. 527-541, (1990).

2. J.M.G. Amaro de Matos, A.E.Patrick, V.A.Zagrebnov, The limiting Gibbs States for the Curie-Weiss Version of the Ising Model in a Random Field. Preprint Nr. 539, SFB-123, pp.1-18, University of Heidelberg, 1989.

3. J.M.G. Amaro de Matos, A.E.Patrick, V.A.Zagrebnov, Gibbs Measures for the Curie-Weiss Random Field Ising Model. In: Probability Theory and Mathematical Statistics (Proceedings of the V-th Vilnius Conference), B.Grigeleonis,Yu.V.Prokhorov et al eds.,VSP BV, The Netherland, Utrecht 1990.

4. A.E.Patrick, V.A.Zagrebnov, Dynamics of Multi-Layered Perceptron Model a Rigorous Result. Journal de Physique (Paris), vol. 51, pp. 1129-1138, (1990).

5. A.E.Patrick, V.A.Zagrebnov, On the Parallel Dynamics for the Little-Hopfield Model. Preprint, CPT-89/P.2311, pp.1-13, Marseille, 1989.

6. A.E.Patrick, V.A.Zagrebnov, Parallel Dynamics for an Extremely Diluted Neural Network. Preprint Nr. 597, SFB-123, pp. 1-9, University of Heidelberg, 1990.(to be published in J.Phys.A.)

7. A.E.Patrick, P.Picco, J.Ruiz, V.A.Zagrebnov, Main Overlap Dynamics for Multistate Neural Networks. Preprint Nr. , SFB-123, pp. , University of Heidelberg, 1990.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 декабря 1990 года.