



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р 897

17-90-282

РУСТАМОВ

Камран Ахмед оглы

УДК 517, 519.4: 530.145

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИКИ
КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Специальность: 01.04.02 - теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой
степени доктора физико-математических наук

Дубна 1990

Актуальность проблемы.

Современное развитие физики и техники, в первую очередь электроники, потребности в создании элементной базы вычислительных и лазерных систем и другие задачи, решение которых в значительной мере определяет уровень научно-технического прогресса, предъявляет все возрастающие требования к созданию адекватных математических моделей описания процессов в конденсированных средах. Такие модели должны достаточно полно учитывать особенности исследуемых явлений на микроскопическом уровне, иметь наглядную физическую структуру, в количественном смысле соответствовать результатам экспериментов и по возможности не приводить к серьезным техническим затруднениям при проведении конкретных расчетов.

Опыт развития физики и ряда других физико-математических наук приводит к выводу о необходимости использования алгебраических и теоретико-групповых методов для построения и исследования таких моделей. Здесь нужно отметить, что использование аппарата теории групп (правда, в основном лишь кристаллографических) в физике конденсированных сред имеет глубокие и прочные традиции и ознаменовано важными и интересными результатами.

Вместе с тем, ряд принципиальных вопросов, связанных с установлением соответствия между результатами феноменологического и микроскопического подходов, остается недостаточно исследованным (например, свойства симметрии макроскопических величин в параметрических теориях динамики кристаллической решетки, невыполнение соотношений Эйнштейна и Онсагера в некоторых теориях термоэдс в квантующем магнитном поле и другие). В ряде случаев попытки преодоления несоответствия результатов феноменологической и микроскопической теорий вынуждает исследователей прибегать к использованию заведомо искусственных конструкций. Перспективы логически замкнутого разрешения этих проблем также связаны с

Работа выполнена в Институте физики Академии наук
Азербайджанской ССР

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор	В. И. МАНЬКО
доктор физико-математических наук, профессор	В. Н. ПОПОВ
доктор физико-математических наук, профессор	Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Ведущая организация - Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР

Автореферат разослан " " 1990 г.

Защита состоится " " 1990 г. на заседании
Специализированного совета Д 047.01.01 Лаборатории
теоретической физики Объединенного института ядерных
исследований, г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Объединенного института ядерных исследований.

Ученый секретарь Совета,
кандидат физико-математических наук

В. И. ЖУРАВЛЕВ

применением алгебраических и теоретико-групповых методов, что обуславливает их важную роль в формулировке и исследовании динамических моделей конденсированных сред.

Один из главных экспериментальных подходов к изучению физических процессов, происходящих в конденсированных средах на микроскопическом уровне, состоит в исследовании отклика на воздействие с излучением той или иной природы. При этом решается задача об идентификации возбуждений в конденсированных средах (при наличии конкретных предположений о механизме взаимодействия излучения со средой, т. е. модели взаимодействия), либо проводится исследование собственно механизма взаимодействия. Роль последовательного применения теории групп в построении теории взаимодействия излучения со средой, в первую очередь аппарата коэффициентов Клебша-Гордана, тем значительнее, чем сложнее изучаемый процесс и микроскопическая структура исследуемого объекта.

В физике и технике наших дней лазерный луч, взаимодействующий с конденсированными средами, стал неотъемлемым и важным элементом. Это обстоятельство привело к появлению большого числа аналитических моделей взаимодействия электромагнитного поля со средой, полный анализ которых, включающий классификацию, построение точных решений, нахождение законов сохранения и т. д., также базируется на применении алгебраических и групповых методов.

Одной из классических областей физики конденсированных сред, традиционно связанной с использованием аппарата теории групп, является теория непрерывных фазовых переходов Л. Д. Ландау. Ряд принципиальных положений этой теории содержит зависимость возможности фазовых переходов от индекса подгруппы, как от основного параметра теории. Полное рассмотрение подобных положений предполагает, наряду с использованием аппарата кристаллографических групп, привлечение методов индуцированных и порожденных представлений групп, позволяющих получить необходимую унификацию математической картины описания фазовых переходов и выявить общие закономерности.

Цель настоящей работы состоит в разработке новых алгебраических и теоретико-групповых подходов в теории конденсированных сред для решения упомянутых выше принципиальных проблем.

Научная новизна работы. Новым вкладом являются:

- развитие последовательного теоретико-группового подхода в изучении макроскопических упругих свойств конденсированных сред, позволившего выявить качественные особенности микроскопического рассмотрения, продемонстрированного на примере предложенной модификации модели жестких ионов, в применении к шпинельным соединениям;

- вывод компактных формул построения правил отбора и угловой зависимости интенсивности в отношении многофононных процессов поглощения и рассеяния света, а также правил отбора для нейтронного рассеяния. Конкретные вычисления для процессов с участием фотонов, фононов, электронов и нейтронов в O_h^7 - симметричных телах;

- выявление групповых свойств нелинейной модели теплового воздействия лазерного излучения на конденсированные среды, классификация произвольного элемента, нахождение инвариантных решений и законов сохранения. Определение свойств симметрии модели взаимодействия света с двухуровневой системой с двукратно вырожденным состоянием, построение когерентных состояний и функций Грина. Построение точных решений для полной модели Раби (включающей и противовращательные члены) на основе изучения ее симметричных свойств;

- развитие группового подхода для обобщения модели Кейна, основанного на ее выявленной теоретико-групповой природе. Построение на этой основе законов дисперсии для носителей электрического заряда в широком классе соединений;

- разработка последовательного подхода в изучении алгебраических свойств матрично-дифференциальных моделей физики конденсированного состояния вещества, определение алгебраических свойств, построение когерентных состояний и функций Грина для моделей Кейна и Латтинджера, введение обобщенного коррелированного состояния для кейновских носителей электрического заряда;

- классификация непрерывных фазовых переходов по классам хромоморфности цветных групп на основе использования порожденных представлений и теоремы Фробениуса об индуцированных представлениях групп.

Научная и практическая ценность работы заключается в том, что в ней предложены и на конкретных примерах продемонстрированы эффективные подходы, обеспечивающие более глубокое проникновение в природу исследуемых вопросов и позволяющие определить способы разрешения принципиальных трудностей в расхождении результатов различных теоретических моделей, а также представляющие возможность сформулировать общие положения для широких классов процессов, получить качественные результаты и окончательные формулы в отношении таких важных проблем физики конденсированного состояния вещества, как описание межатомных взаимодействий, динамика носителей электрического заряда, анализ процессов взаимодействия с излучением и классификация непрерывных фазовых переходов.

Демонстрируемые в работе теоретические подходы и полученные результаты непосредственно могут быть использованы при решении конкретных задач физики конденсированного состояния вещества, в связи с чем в работе представлены оригинальные примеры.

В работе проанализированы различные модели - модифицированная модель жестких ионов, модели Латтинджера, Кейна и ее обобщение, модели развития горячего пятна и взаимодействия с электромагнитной волной двухуровневой системы с вырожденным состоянием, а также полная модель Раби,

включающая противовращательные члены.

Классификация возможных фазовых переходов по классам хромоморфности цветных групп и приведенная в работе соответствующая таблица предназначены для непосредственного использования при исследовании непрерывных фазовых переходов с изменением как точечной, так и пространственной групп симметрии в конденсированных средах.

Полученные в работе правила отбора позволяют проанализировать различные процессы с участием фононов, фотонов, электронов и нейтронов в твердых телах. Результаты конкретных вычислений для группы O_h^7 представлены в форме, удобной для практического использования.

Таким образом, представляемый теоретический материал может быть непосредственно использован в работах по изучению упругих, электрических, оптических, сегнетоэлектрических, термических и многих др. свойств конкретных соединений, представляющих интерес как для самой физики конденсированного состояния вещества, так и для всевозможных технических приложений.

Для защиты выдвигаются следующие основные результаты и выводы, полученные в диссертации:

1. Предложен последовательный теоретико-групповой подход к изучению упругих свойств твердых тел, позволивший выявить физические характеристики колебаний решетки, определяющих упругие константы. На основе компактных формул, выражающих качественные требования к микроскопической теории колебаний кристаллической решетки, сделаны выводы относительно динамической модели описания межатомных взаимодействий. Разработана свободная от предположения о центрально-симметричности короткодействующих сил между атомами модификация модели жестких ионов, на основе которой вычислены упругие постоянные для шпинельных соединений. Представленные для конкретных соединений количественные теоретические результаты находятся в согласии с показаниями экспериментальных измерений.

2. Выявлена теоретико-групповая структура модели Кейна, являющейся характерным представителем динамических моделей, описывающих энергетический спектр носителей электрического заряда в конденсированных средах. Следуя теоретико-групповым принципам построения, предложено расширение модели Кейна, на основе которого получены дисперсионные формулы для энергий носителей электрического заряда. Вычисленные значения эффективных масс электронов и тяжелых дырок для конкретных соединений имеют хорошее согласие с экспериментом.

3. Развита эффективный подход для изучения свойств симметрии моделей описания энергетического спектра носителей электрического заряда, основанный на проведении алгебраического анализа для матрично-дифференциальных уравнений. Для моделей Кейна и Латтинджера построены алгебры инвариантности, когерентные состояния и функции Грина. Приведен явный вид обобщенного коррелированного состояния (частным случаем таких функций являются сжатые состояния) для кейновских носителей электрического заряда.

4. Предложены компактные формулы для построения правил отбора при анализе трехфоновых процессов, нейтронного рассеяния, а также выражения, позволяющие в дополнение к общим правилам отбора выявить соотношения эквивалентности и угловые зависимости интенсивностей двухфоновых рассеяний света в кристаллах. С использованием этих формул вычислены правила отбора для непрямых оптических и междолинных переходов, двух- и трехфоновых процессов инфракрасного поглощения и комбинационного рассеяния света, а также рассеяния медленных нейтронов в кристаллах с группой симметрии O_h^7 , построены угловые зависимости для интенсивностей двухфоновых комбинационного рассеяния света.

5. Проведен полный групповой анализ, доказаны классификационные теоремы, построены инвариантные решения и законы сохранения для нелинейной модели развития горячего пятна. Для модели взаимодействия с электромагнитной волной двухуровневой системы с двухкратно вырожденным состоянием, а

также для полной модели Раби на основе построенной динамической алгебры инвариантов вычислены когерентные состояния и функции Грина.

6. Предложена классификация непрерывных фазовых переходов по классам хромоморфности цветных групп на основе использования порожденных представлений и теоремы Фробениуса об индуцированных представлениях групп, классических теоретико-групповых методов теории Л. Д. Ландау, дополненных критериями Дж. Бирмана, а также аппарата теории перестановочных цветных групп. Достигнутая при таком подходе существенная факторизация позволила представить в одной небольшой таблице возможные непрерывные фазовые переходы как для точечных, так и пространственных групп вплоть до четырехкратного и шестикратного изменения симметрии для эквитрансляционных и эквиклассных переходов, соответственно. В частности, справедливость теорем Ландау об отсутствии запрета непрерывных фазовых переходов в подгруппу индекса два и существовании полного запрета в случае подгруппы индекса три демонстрируются в таблице одной и двумя строками, соответственно. В первом случае для пространственных групп соотношения эквивалентности связываются 1191 возможных переходов, а во втором - 420.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались на VIII Всесоюзном совещании по теории полупроводников (Киев, 1975 г.), Всесоюзной конференции "Тройные полупроводники и их применение" (Кишинев, 1976 г.), Международных коллоквиумах по теоретико-групповым методам в физике (Кентербери, 1981 г. и Стамбул, 1982 г.), Всесоюзной конференции по физике полупроводников (Баку, 1982 г.), Международном семинаре по теоретико-групповым методам в физике (Звенигород, 1982 г.), V и VI Всесоюзных коллоквиумах "Современный групповой анализ. Методы и приложения" (Ленинград, 1987 г. и Баку, 1988 г.), Всесоюзном совещании по математическим проблемам квантовой

теории поля и статистической механики (Куйбышев, 1987 г.), Всесоюзном совещании по проблемам квантовой оптики (Дубна, 1987 г.), Международных симпозиумах по избранным проблемам статистической механики (Дубна, 1987 и 1989 г.г.), Исследовательских веркшопах по физике конденсированного состояния вещества, атомов и молекул (Триест, 1988 и 1989 г.г.), семинарах Института физики, НПО Космических исследований и ШАО Академии наук Азербайджанской ССР, физического факультета Сити Колледж Нью-Йорка, Высшей нормальной школы и Физического института университета г. Пиза, Физических факультетов римского и миланского университетов, а также на общелабораторных семинарах и семинарах по статистической механике Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований и т. д.

Публикации.

По материалам, изложенным в диссертации опубликовано 36 работ в виде материалов совещаний и семинаров, препринтов и статей в советских и иностранных изданиях.

Объем и структура диссертации.

Диссертация содержит 249 страниц и состоит из введения, шести глав, включающих 28 параграфов, заключения, двух приложений и списка литературы, насчитывающего 212 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность тематики диссертации, указывается ряд принципиальных вопросов физики конденсированного состояния вещества, успешное разрешение которого обуславливает развитие соответствующих алгебраических и теоретико-групповых методов исследования.

Обсуждаются основные научные положения, определяющие содержание и новизну полученных результатов.

Первая глава посвящена вопросам описания тепловых движений атомов в конденсированных средах на основе эффективного применения на разных уровнях аппарата теории групп. Приведен краткий обзор общих теоретических положений и различных моделей описания динамики кристаллической решетки. На примере соединений со структурой шпинели предлагается модифицированная модель жестких ионов.

Производится полный теоретико-групповой анализ колебаний кристаллической решетки в различных высокосимметричных точках и направлениях зоны Бриллюэна.

Обсуждаются вопросы проведения конкретных вычислений в рамках предлагаемой модификации модели жестких ионов. Предлагается последовательный теоретико-групповой подход в изучении макроскопических упругих свойств конденсированных сред. Полученные компактные формулы позволяют проанализировать физическую природу различных колебаний, определяющих упругие постоянные, выписать простое соотношение, которому из общих соображений симметрии должна удовлетворять микроскопическая модель, а именно

$$\langle e_1^{ak} | D_{,2}(\bar{q}) | \Gamma'_{15}(1 | 3) \rangle = 0,$$

где $\langle e_1^{ak} |$ - первая базисная функция векторного представления, соответствующего акустическим колебаниям, $D_{,2}(\bar{q}) = \partial D(\bar{q}) / \partial q_2 |_{q=0}$, $| \Gamma'_{15}(1 | 3) \rangle$ - третья базисная функция представления Γ'_{15} , $D(\bar{q})$ - динамическая матрица, зависящая от волнового вектора \bar{q} решеточных колебаний.

На основе предложенной модифицированной модели жестких ионов вычисление упругих постоянных доводится до конкретных чисел, находится значение температуры Дебая для $CdIn_2S_4$, что демонстрирует удовлетворительное согласие с результатами экспериментальных измерений.

Вторая глава посвящена теоретико-групповому подходу в построении законов дисперсии для энергий носителей электрического заряда в конденсированных средах. В начале главы обсуждается важность наличия подобной информации для изучения различных конкретных свойств материалов. Анализируются основные характеристики используемых исследователями теоретических подходов, одним из наиболее распространенных среди которых является модель Кейна, обладающая свойствами, во многом общими для различных моделей описания энергетического спектра носителей электрического заряда в конденсированных средах.

На основе общетеоретических положений о свойствах системы линейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно преобразований из группы вращений $O(3)$, а также реалистических предположений о трансформационных характеристиках различных энергетических зон выводится известный закон дисперсии Кейна для энергий электронов и легких дырок.

В целях описания энергетического спектра и тяжелых дырок осуществляется расширение динамической модели за счет ввода в предложенную общую схему анализа более широкого класса энергетических зон, которым соответствуют квантовые состояния, преобразующиеся по различным представлениям группы вращений $O(3)$. На этом пути получают искомые законы дисперсии, вычисляются волновые функции.

В последнем параграфе главы в дополнение к представленному анализу вводится и учет спин-орбитального взаимодействия.

Вычисленные численные значения эффективных масс носителей электрического заряда для Ge и Si сравниваются с показаниями физического эксперимента, что подтверждает эффективность как общего подхода, так и конкретных полученных уравнений.

Третья глава посвящена исследованию алгебраических свойств динамических моделей, описывающих энергетические спектры носителей электрического заряда в конденсированных средах.

В начале главы обсуждаются преимущества проведения подобных исследований, а также послужившие наводящими ранее известные в литературе результаты.

На основе предложенного эффективного подхода к решению обсуждаемой задачи выявляются довольно широкие алгебры инвариантности, допускаемые моделями Кейна и Латтинджера, которые являются характерными представителями из множества динамических моделей, описывающих элементарные возбуждения в твердых телах. Показывается, что рассматриваемые модели допускают двенадцати- и восьмимерные алгебры чисто матричных преобразований, соответственно. Кроме того, доказывается, что они допускают и десятимерные алгебры Пуанкаре, в связи с чем приводятся явные виды соответствующих операторов. Для обоих рассматриваемых моделей представляются явные виды операторов допускаемых алгебр Гейзенберга-Вейля.

На основе полученной информации об алгебраических свойствах уравнений Кейна и Латтинджера вычисляются явные виды когерентных состояний и функций Грина для этих моделей. Определенные таким образом когерентные состояния удовлетворяют стандартным для подобных функций соотношениям ортогональности и переполненности.

Далее, обсуждаются общие характеристики рассмотренных моделей и ряда других, описывающих различные явления в физике конденсированного состояния вещества, для изучения свойств симметрии которых формулируются основные положения алгебраического анализа матрично-дифференциальных уравнений, а также вопросы эффективного применения полученной информации. Для модели Кейна выписывается явный вид так называемых обобщенных коррелированных состояний, частным случаем которых являются как обычные коррелированные состояния, так и когерентные и сжатые состояния рассматриваемой системы.

Четвертая глава посвящена применению теории групп к получению качественных результатов о различных квантовых процессах с участием фотонов, фононов, электронов и нейтронов, происходящих в конденсированных средах. В начале главы изложены основные положения методики получения

качественной информации о квантовых переходах в системах, обладающих свойством симметрии относительно преобразований из определенной группы.

Предложены компактные формулы, позволяющие построить правила отбора для трехфоновых процессов инфракрасного поглощения и комбинационного рассеяния света, а также рассеяния медленных нейтронов в конденсированных средах. Кроме того, в конце главы, благодаря использованию техники коэффициентов Клебша-Гордана, выявлены и угловые зависимости для интенсивности двухфонового резонансного комбинационного рассеяния света в кристаллах с группой симметрии O_h^7 .

Конкретные результаты главы представляют перечень правил отбора для непрямых оптических и междолинных переходов, двух- и трехфоновых инфракрасного поглощения и комбинационного рассеяния света, рассеяния медленных нейтронов в конденсированных средах с группой симметрии O_h^7 , приводимых последовательно в отдельных параграфах и в Приложении I. Последний же параграф главы содержит изложение методики использования техники коэффициентов Клебша-Гордана в изучении процессов двухфонового резонансного комбинационного рассеяния света в исследуемых конденсированных средах, позволяющей выявить и угловые зависимости для парциальных интенсивностей рассеяния.

Пятая глава посвящена применению методов группового анализа к исследованию аналитических моделей взаимодействия электромагнитного излучения с конденсированными веществами. В начале главы обсуждаются положения, вызвавшие к жизни аналитические модели описания различных аспектов физики взаимодействия электромагнитного излучения с веществом. Далее, приводятся основные характеристики выбранных в качестве объектов изучения моделей развития горячего пятна и взаимодействия электромагнитного излучения с двухуровневой системой с двукратным вырождением состояния, а также полной модели Раби.

В § 5.2. представлен полный теоретико-групповой анализ модели развития горячего пятна. Доказаны классификационные теоремы, зависящие от вида правой части $\varphi(x, t)$ рас-

сматриваемого нелинейного дифференциального уравнения, характеризующей область проникновения приложенной электромагнитной волны в конденсированную среду. При этом установлено общее положение о том, что пространство решений рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения инвариантно относительно преобразований

$$t' = t \cdot \exp(C_{11} a) + \frac{d_1}{C_{11}} (\exp(C_{11} a) - 1);$$

$$x' = x \cdot \exp(C_{22} a) + \frac{d_2}{C_{22}} (\exp(C_{22} a) - 1);$$

$$f' = f \cdot \exp((C_{11} - 2C_{22}) a),$$

образующих группу тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x, t) = (C_{22} x + d_2)^{-2}$$

$$\cdot \Phi[(C_{11} t + d_1)^{1/C_{11}}, (C_{22} x + d_2)^{1/C_{22}}];$$

$$\varphi(t) = B (C_{11} t + d_1)^{-2C_{22}/C_{11}},$$

где $B, C_{11}, C_{22}, d_1, d_2$ - произвольные постоянные, Φ - достаточно гладкая функция своих переменных, параметр преобразования $a \in \mathbb{R}$.

Далее, для различных конкретных видов функции $\varphi(x, t)$ получены соответствующие группы Ли инвариантности уравнения, определены оптимальные системы подгрупп и получены выражения (в возможных случаях) для инвариантных решений уравнения, в числе которых и имеющие очевидную практическую ценность. В конце параграфа приведены выражения для найденных законов сохранения.

В следующем параграфе получены явные виды операций

инвариантности для аналитической модели взаимодействия электромагнитного излучения с двухуровневой системой с двукратным вырождением состояния. В целях достижения разрешимости данной задачи, на основе полученных операций инвариантности построены когерентные состояния, посредством которых вычислена функция Грина.

Последний параграф главы посвящен исследованию свойств симметрии полной модели Раби. На основе построенной алгебры инвариантности удается получить точные решения задачи, выписываются явные выражения для когерентных состояний и функции Грина.

Шестая глава диссертации посвящена теоретико-групповому анализу непрерывных фазовых переходов. В начале главы представляются основные положения теории непрерывных фазовых переходов, созданной Л. Д. Ландау, использующей аппарат кристаллографических групп. Констатируются основные критерии классического подхода.

В параграфе § 6.2. приводится конструктивное определение перестановочных цветных групп, вводятся в рассмотрение классы хромоморфизмов групп на основе анализа их так называемых перестановочных представлений. Обсуждаются конкретные особенности классов хромоморфности точечных и пространственных цветных групп.

Далее (§ 6.3), показывается изоморфность G - пространства функций плотности n - цветному пространству $X_F^{F'}$ ($n = [F : F']$), что означает хромоморфическую эквивалентность множества различных фазовых переходов одному переходу, характеризующемуся $F \rightarrow F'$. Последующее использование теоремы Фробениуса об индуцированных представлениях групп, а также положений теории порожденных представлений позволяет добиться существенной факторизации процедуры проверки критериев Ландау. Дополнение этих критериев требованием о точности активного в фазовом переходе представления, а также цепочечным критерием Бирмана позволяет создать эффективную для различных применений и прозрачную для анализа унифицированную таблицу возможных фазовых переходов до четырехкратного и шестикратного изменения

симметрии для эквитрансляционных и эквиклассных переходов, соответственно.

Благодаря предложенной процедуре факторизации в описании непрерывных фазовых переходов, для пространственных групп, например, возможные 1191 переходов с двукратным изменением симметрии оказываются эквивалентными одному типу, а 420 переходов с трехкратным изменением симметрии - двум. Так для этих двух видов переходов наиболее общим образом прослеживается справедливость отсутствия симметричного запрета в первом и наличие полного запрета во втором случае (теорема Ландау).

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

По материалам диссертации опубликованы следующие работы:

1. Gashimzade F. M., Rustamov K. A., Selection rules for the spinel structure. Phys. St. Sol.(b). 1975, v. 71, p. 125 - 134.
2. Гашимзаде Ф. М., Рустамов К. А., К динамике решетки шпинельных соединений. Тезисы докладов VIII Всесоюзного совещания по теории полупроводников. - Киев: Наукова Думка, 1975, с. 47 - 48.
3. Гашимзаде Ф. М., Рустамов К. А., Теоретико-групповой анализ нормальных колебаний $CdIn_2S_4$. Деп. ВИНТИ, 1974, № 2694 - 74, 22 с.
4. Рустамов К. А., К дисперсии фононов в шпинельных структурах в направлении $\Lambda(k, k, k)$. Деп. ВИНТИ, 1976, № 1327-76, 13 с.
5. Рустамов К. А., К дисперсии фононов в шпинельных структурах в направлении $\Lambda(k, 0, 0)$. Деп. ВИНТИ, 1976, № 2180-76, 14 с.
6. Рустамов К. А., Динамика решетки шпинельных соединений. Тезисы докладов III конференции молодых физиков. -

Ташкент: "ФАН", Уз. ССР, 1976, с. 88.

7. Рустамов К. А., Фоновый спектр шпинельных соединений. Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Тройные полупроводники и их применение". - Кишинев: "Штиинца", 1976, с. 181.
8. Гашимадзе Ф. М., Рустамов К. А., Штейншрайбер В. Я., Упругие постоянные соединений со структурой шпинели. ДАН Азерб. ССР, 1978, т. 34, № 3, с. 21 - 24.
9. Bagirov A. M., Rustamov K. A., Sulejmanov M. K., To the theory of approximation of experimental curves by smooth functions. Preprint of Dipartimento di Fisica Universita di Roma "La Sapienza", 1985, n. 435, 10 p.
10. Rustamov K. A., Babaev A. M., On the group-theoretical approach to the energy spectra problem of charge carriers in cubic solids. Preprint of Dipartimento di Fisica Universita di Roma "La Sapienza", 1985, n. 435, 10 p.
11. Рустамов К. А., Бабаев А. М., Об алгебре инвариантности уравнений Кейна. Препринт НПО Космических исследований, - Баку, 1986, № 6, 8 с.
12. Рустамов К. А., Бабаев А. М., О законах дисперсии носителей тока в кристаллах типа алмаза. Изв. ВУЗов "Физика", 1988, № 1, с. 12 - 17.
13. Rustamov K. A., On the algebraic properties of the Luttinger model. Proc.: XI Int. Colloquium on Group Theor. Meth. in Physics. Istanbul, 1982, p. 393 - 397.
14. Рустамов К. А., Рустамов Н. А., Групповой анализ модели Латтинджера. В сб. статей "Некоторые вопросы теории линейных и нелинейных операторных уравнений". - Баку: "Элм", 1985, В. 1, с. 122 - 126.
15. Рустамов К. А., Рустамов Н. А., О нелиевской алгебре, связанной с моделью Латтинджера. ДАН Азерб. ССР, 1988, № 6, с. 24 - 27.
16. Рустамов К. А., Интегродифференциальное представление для многокомпонентных моделей статистической физики, их алгебраические свойства. Внутризонные когерентные и сжатые состояния. Труды IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. - Дубна, 1987, Д17-88-95, с. 313 - 316.

17. Rustamov K. A., Dynamical algebra of invariance of integrodifferential equations of quantum theory. Int. J. of Theor. Physics, 1987, v. 26, n. 3, p. 307 - 309.
18. Rustamov K. A., Kane model, dynamical algebra and coherent states. Physica A, 1988, v. 152, p. 451 - 458.
19. Aliskenderov E. I., Rustamov K. A., Shumovsky A. S., Tran Quang, On the Jaynes-Cummings model with multiphoton transition in a cavity. J. Phys. A: Math. Gen., 1987, v. 20, p. 6265 - 6270.
20. Рустамов К. А., Бадалов В. Г., О бесконечномерной алгебре, генерируемой операциями второго порядка для уравнения $\square\phi = 0$. Препринт НПО Космических исследований. - Баку, 1986, № 10, 9 с.
21. Rustamov K. A., On the application of dynamical algebra of invariants of integrodifferential equations. Int. J. of Theor. Physics, 1989, No. 6, p. 695 - 699.
22. Рустамов К. А., Агаев Ф. Ф., О модифицированном алгоритме вычисления определяющих уравнений точечных и контактных симметрий для дифференциальных уравнений в частных производных. Циркуляр ШАО, - Баку, Изд. "Элм", 1988, № 82, с. 3 - 10.
23. Badalov V. G., Rustamov K. A., Invariant solutions and the conservation laws for the hot-point development model. Modern Phys. Lett., 1988, v. 1, n. 9 - 10, p. 335 - 339.
24. Kotzev I. N., Rustamov K. A., On the indicies of subgroups in continuous phase transitions. I. Abstracts of the X Int. Coll. on Group Theor. Meth. in Physics, Canterbury, England, 1981, p. 87.
25. Рустамов К. А., Коцев И. Н., О кратности изменения числа элементов симметрии при непрерывных фазовых переходах. Труды Всесоюзной конференции по физике полупроводников. - Баку, Изд. "Элм", 1982, т. 2, с. 267 - 268.
26. Kotzev I. N., Koptsik N. A., Rustamov K. A., "Chromomorphism" of color groups and classification of phase transitions. Proc.: International Seminar on Group Theoretical Methods in Physics, (Zvenigorod, 1982). - М.: Nauka, 1983, v. 1, p. 332 - 339.

27. Коцев И. Н., Рустамов К. А., Копчик В. А., "Хромоморфизм" цветных групп и классификация фазовых переходов. Изв. ВУЗов "Физика", 1983, № 3, с. 93 - 97.
28. Гашимзаде Ф. М., Рустамов К. А., Коэффициенты Клебша-Гордана и двухфононное резонансное комбинационное рассеяние в кубических кристаллах. Изв. ВУЗов "Физика", 1978, № 8, с. 75 - 80.
29. Коцев И. Н., Рустамов К. А., Об индексах подгрупп в непрерывных фазовых переходах. II. ДАН Азерб. ССР, 1983, т. 39, № 8, с. 29 - 31.
30. Рустамов К. А., Правила отбора для нейтронного рассеяния. ДАН Азерб. ССР, 1976, т. 32, № 9, с. 23 - 25.
31. Рустамов К. А., О непрерывных симметриях динамических моделей физики конденсированного состояния вещества. Современный групповой анализ. Методы и приложения. - Баку: "Элм", 1989, с. 202 - 204.
32. Rustamov K. A., Aliskenderov E. I., Shumovsky A. S., Ho Trung Dang, Jaynes-Cummings model interacting with squeezed light. Physica A, 1989, v. 158, p. 649 - 655.
33. Rustamov K. A., Algebraic analysis of the electromagnetic wave interaction with the two-level system with two-fold degenerate state. Mod. Phys. Lett. B, v. 3, 1989, p. 479 - 483.
34. Agaev F. F., Rustamov K. A., Particle movement in crystal field and the analysis of continuous symmetries with the use of computer algebra. Pros.: XII European crystallographic meeting. - Moscow, 1989, v. 1, p. 46.
35. Rustamov K. A., On the transformations of invariance and exact solutions of the Rabi model. Preprint ICTP, 1989, IC/89/334, 7 p.
36. Рустамов К. А., Алгебраический анализ многокомпонентных моделей статистической физики. Приложения. Труды семинара "Проблемы квантовой оптики". - Дубна, 1988, Р 17-88-689, с. 99 - 104.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 апреля 1990 года.