ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 539.126+539.
21+517.946

17-87-66

На правах рукописи

ПРИКАРПАТСКИЙ
Анатолий Каролевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫМИ МЕТОДАМИ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1987

Работа выполнена в Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Б.М.Барбашов
доктор физико-математических наук, профессор Д.Я.Петрина
доктор физико-математических наук, профессор И.П.Павлоцкий

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Институт теоретической физики АН УССР, Киев.

Защита диссертации состоится " " ____ 1987 г. в _____ часов на заседании специализированного Совета Д 047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований (141980, Дубна, Московская обл.).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан " " _____ 1987 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета В.И.Журавлев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В фундаментальной работе "Проблемы динамической теории в статистической физике" (М: Гостехиздат, 1946) Н.Н.Боголюбовым был предложен в случае классической статистической механики метод производящих функционалов для изучения n -частичных, $n \in \mathbb{Z}_+$, функций распределения динамических систем многих частиц, который оказался чрезвычайно эффективным в применении к конкретным физическим проблемам. Достаточно отметить, что такие установившиеся результаты в классической статистической механике, как разложения Майера-Урселла, представление "коллективных" переменных и др. стали частными случаями общего метода производящих функционалов Боголюбова.

Особенно эффективной для приложений оказалась квантовая интерпретация метода производящих функционалов, которая дает возможность предъявить для широкого класса динамических систем статистической механики явные функционально-операторные выражения для функций распределения как в равновесном, так и неравновесном случаях. При этом очень важную роль в анализе свойств производящих функционалов играют соответствующие функциональные уравнения Н.Н.Боголюбова, решениями которых они являются.

Дальнейшее развитие методов и подходов Н.Н.Боголюбова с использованием естественного в квантовом случае формализма представлений базисной алгебры Ли токов наблюдаемых операторов привело к созданию единой алгебраической теории метода производящих функционалов Боголюбова в квантовой статистической физике. Использование так называемого представления Вигнера для производящего функционала функций распределения привело к доказательству гамильтоновости функциональных уравнений Боголюбова в неравновесной статистической механике, а также к их явным функционально-операторным решениям. Результаты такого типа имеют большое значение в теории кинетических процессов, нелокальной гидродинамике и других областях физики и механики.

С точки зрения общей теории динамических систем, как квантовых, так и классических, являющихся вполне интегрируемыми гамильтоновыми потоками, важную проблему представляет построение эффективных алгоритмов и критериев интегрируемости. Как показано в диссертации, алгебраические методы квантовой статистической физики дают эффективное решение этой проблемы для широкого класса динамических систем теоретической и математической физики произвольной размерности физического пространства.

Целью диссертационной работы явилось дальнейшее развитие методов и подходов Н.Н.Боголюбова в статистической механике систем многих частиц, которое привело к построению общей алгебраической теории квантового метода производящих функционалов Боголюбова для функций распределения многочастичных динамических систем, а также к эффективному описанию критериев интегрируемости нелинейных динамических систем теоретической и математической физики.

Сущность этой теории и ее приложений в том, что

а) на основе алгебраического аппарата теории представлений нерелятивистской алгебры Ли токов разработана общая теория квантового метода производящих функционалов Боголюбова в статистической физике в равновесном и неравновесном случаях; даны ее применения в физических задачах;

б) установлена универсальность алгебры Ли токов как единой алгебраической структуры симметрий вполне интегрируемых динамических систем теоретической и математической физики;

в) изучены свойства факторизации квантового производящего функционала Боголюбова в статистической физике и установлена ее связь со специальными ассоциированными моделями классической статистической механики; дано приложение свойства факторизации к интегрируемым квантовым нелинейным динамическим системам типа системы Шредингера.

<u>Научная новизна и практическая ценность</u>. Построена новая общая алгебраическая теория квантового метода производящих функционалов Н.Н.Боголюбова в статистической физике. Впервые доказана гамильтоновость неравновесных функциональных уравнений Боголюбова относительно специальной симплектической структуры Ли-Пуассона - Власова. Изучены свойства поляронного газа в кристалле. Впервые предложено эффективное аналитическое преобразование производящего функционала Боголюбова к так называемым "коллективным" переменным в большом каноническом ансамбле Гиббса. Даны явные функционально-операторные выражения для производящих функционалов Боголюбова функций распределения как в равновесной, так и неравновесной классической статистической механике.

Впервые установлена универсальность нерелятивистской квантовой алгебры Ли токов как единой алгебраической структуры симметрий вполне интегрируемых нелинейных динамических систем. Изучены свойства факторизации квантового производящего функционала Боголюбова для интегрируемых квантовых динамических систем типа системы Шредингера. Предложена новая квантовая интегрируемая одномерная динамическая система типа системы Шредингера, представляющая интерес для статистической механики и теории квантованных полей.

<u>Основные результаты, выносимые на защиту</u>:

I. Предложен новый алгебраический подход к изучению квантового метода производящих функционалов Боголюбова для динамических систем

статистической механики на основе теории представлений базисной алгебры Ли токов наблюдаемых операторов. Выведены квантовые функциональные уравнения Боголюбова.

2. Построено вигнеровское представление производящего функционала Боголюбова в неравновесной статистической механике, впервые доказана гамильтоновость функциональных уравнений Боголюбова относительно специальной симплектической структуры Ли-Пуассона-Власова на орбитах коприсоединенного представления квазиклассической алгебры Ли наблюдаемых операторов.

3. Дано эффективное аналитическое преобразование производящего функционала Боголюбова в классической равновесной статистической механике к так называемым "коллективным" переменным в большом каноническом ансамбле Гиббса.

4. Изучены на основе найденных явных функционально-операторных решений функционального уравнения Боголюбова кластерные разложения производящего функционала функций распределения в равновесном и неравновесном случаях.

5. Исследованы функции распределения равновесной модели поляронного газа в кристалле на основе метода производящих функционалов Боголюбова, найдены эффективные экранированные потенциалы взаимодействия частиц.

6. Установлена универсальность нерелятивистской алгебры Ли токов в теории интегрируемых бесконечномерных динамических систем. Именно, алгебра Ли токов допускает два типа представлений: I) операторное представление в гильбертовом пространстве; 2) представление векторными полями на бесконечномерных многообразиях М. Последнее представление такое, что эта алгебра Ли токов на М изоморфна алгебре Ли симметрий данной произвольной динамической системы $u_t = K[u]$ на М. На основе этого факта доказывается, что такая динамическая система вполне интегрируема, если она гамильтонова.

7. Изучена факторизация квантового производящего функционала Боголюбова в случае квантовых вполне интегрируемых динамических систем многих частиц на оси $\mathbb{R}^1$; установлена связь с производящими функционалами специальных ассоциированных классических многочастичных систем в равновесном случае.

8. Предложен эффективный алгебраический алгоритм построения критериев интегрируемости нелинейных "одномеризованных" динамических систем на бесконечномерных функциональных многообразиях.

Совокупность полученных в диссертации результатов представляет собой новое и перспективное направление, основанное на алгебраическом подходе в современной квантовой статистической механике и теории нелинейных динамических систем.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 22 работах. Они докладывались на II Советско-итальянском симпозиуме по математическим методам в статистической механике (Львов, 1985), на II Всесоюзной конференции по термодинамике необратимых процессов (Черновцы, 1984), на II и IУ Всесоюзных школах по теории операторов в функциональных пространствах (Рига, 1983; Челябинск, 1986), на Всесоюзной школе "Нелинейные волны" (Калининград, 1984), на Рабочем совещании "Теория солитонов и ее приложения" (Дубна, 1985), а также на научных семинарах Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР, Объединенного института ядерных исследований, Института теоретической физики АН УССР и Института математики АН УССР.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, включающих 9 параграфов, общим объемом 103страницы. Список литературы включает 121 название.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано краткое описание современного состояния исследований в области теоретического описания динамических систем статистической механики на основе метода производящих функционалов Н.Н.Боголюбова для функций распределения как в квантовом, так и в классическом случаях. Сформулированы основные цели диссертации и описаны полученные результаты.

Первая глава посвящена разработке нового алгебраического подхода к построению теории квантового метода производящих функционалов Н.Н.Боголюбова для функций распределения динамических систем статистической механики на основе теории представлений нерелятивистской квантовой алгебры Ли токов, а также некоторым приложениям к актуальным физическим задачам.

В §1 дается описание формализма представлений квантовой алгебры Ли токов $\mathcal{G}$, заданной в представлении вторичного квантования в виде:

$$[\rho(f_1),\rho(f_2)]=0\,,\quad [\rho(f),J(g)]=i\rho(g\cdot\nabla f),$$
$$[J(g_1),J(g_2)]=iJ(g_2\cdot\nabla g_1-g_1\cdot\nabla g_2). \tag{1}$$

Здесь $\rho(f)=\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, f(x)\rho(x)$, $J(g)=\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\; g(x)\, J(x)$,
$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^1)$, $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ – гладкие функции Шварца,

$$\rho(x)=\psi^+(x)\psi(x) \tag{2}$$

– оператор плотности числа частиц,

$$J(x)=\frac{1}{2i}[\psi^+(x)\nabla\psi(x)-\nabla\psi^+(x)\;\psi(x)] \tag{3}$$

– оператор плотности потока частиц, где $\psi^+(x)$ и $\psi(y)$ – вторично-квантованные операторы рождения и уничтожения одночастичных состояний в точках $x\in\mathbb{R}^3$ и $y\in\mathbb{R}^3$ соответственно, действующие в гильбертовом пространстве Фока и удовлетворяющие каноническим перестановочным соотношениям $[\psi(x),\psi^+(y)]_\pm=\delta(x-y)$ – ферми – "+", или бозе – "-" типа.

Здесь показывается, что квантовая алгебра Ли токов $\mathcal{G}$ (1) – это алгебра Ли фундаментальной в природе банаховой группы Ли $G=\mathcal{S}\rtimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$, т.е. полупрямого произведения абелевой группы Шварца $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^1)$ и группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Развивается в применении к проблемам статистической механики общая теория унитарных неприводимых представлений банаховой группы Ли токов $G=\mathcal{S}\rtimes\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$, которая основывается на квантовом производящем функционале Н.Н.Боголюбова вида

$$\mathcal{L}(f)=\mathrm{tr}\,(\mathcal{P}\exp[i\rho(f)])\,, \tag{4}$$

где $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^1)$, $\mathcal{P}$ – статистический оператор исходной квантовой динамической системы, заданной оператором Гамильтона $H:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$. Показывая в §2, что оператор Гамильтона H принадлежит универсальной обертывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, устанавливается, что из бесчисленного множества унитарных представлений группы токов G важными с точки зрения приложений в статистической механике являются представления с циклическим вектором $\Omega\in\mathcal{H}_\lambda$, где $\mathcal{H}_\lambda$ -гильбертово пространство представления. Относительно таких представлений справедлива теорема Х.Араки, утверждающая, что циклические унитарные представления группы G фиксируются (с точностью до унитарной эквивалентности) непрерывным функционалом E на G, удовлетворяющим условию положительности. Тогда функционал $E(a)=(\Omega,\pi(a)\Omega)$, где π – представление группы $G\ni a$ в $\mathcal{H}_\lambda$. При наложении на производящий функционал $E(a)$, $a\in G$ дополнительных условий, среди которых выделяются условия ослабления корреляций Н.Н.Боголюбова и условие Кубо-Мартина-Швингера, устанавливается, что циклический вектор представления $\Omega\in\mathcal{H}_\lambda$ является основным состоянием исходной равновесной динамической системы, причем

$$\mathcal{L}(f)=(\Omega,\pi\exp[i\rho(f)]\,\Omega), \tag{5}$$

где $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_H$. Из определяющих условий $H \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ и $(\Omega, H\Omega) = 0$, где гамильтониан нормирован нулевой энергией основного состояния $\Omega \in \mathcal{H}_H$, немедленно получаем фундаментальные квантовые функциональные уравнения Боголюбова в равновесной статистической механике:

$$[\nabla_x - i\nabla f(x)]\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta \mathcal{L}(f)}{\delta f(x)} = \mathbb{A}\Big(x;\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}\Big)\,\mathcal{L}(f); \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}(f)}{\partial \beta} - \frac{\hbar^2}{8m}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \; i\nabla f(x)\cdot\mathbb{A}\Big(x;\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}\Big)\,\mathcal{L}(f) + \\
&+ \frac{\hbar^2}{8m}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x)}\Big[\nabla_x + \Big(\nabla\frac{\delta}{\delta\rho(x)}\Big)\Big]\,\big(\rho^{-1}\mathbb{A}(x;\rho)\big)\,\cdot \\
&\cdot\,\mathcal{L}(f)\Big|_{\rho=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}} = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\;\varepsilon(x)\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta\mathcal{L}(f)}{\delta f(x)} + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\int_{\mathbb{R}^3} d^3y\; V(x-y):\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x)}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(y)}:\mathcal{L}(f).
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ – плотность энергии основного состояния, $V(x-y)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$ – двухчастичный потенциал взаимодействия исходной динамической системы, $m \in \mathbb{R}^1_+$ – масса одной частицы, оператор $\mathbb{A}(x;\rho): \mathcal{H}_H \to \mathcal{H}_H$ – самосопряжен в $\mathcal{H}_H$ и удовлетворяет соотношению

$$[\nabla\rho(x) + 2i\,J(x)]\,\Omega = \mathbb{A}(x;\rho)\,\Omega$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$, $:\;:$ – операция нормального упорядочения.

Изучение квантовых функциональных уравнений (6) и (7) дает возможность предъявить для производящего функционала $\mathcal{L}(f)$, $f \in \mathcal{S}$, функций распределения явные функционально-операторные выражения, особенно эффективные при $\hbar \to 0$. В общем случае функциональные уравнения (6) и (7) эквивалентны бесконечной квантовой цепочке уравнений Н.Н.Боголюбова для функций распределения исходной квантовой динамической системы.

Как следствие при $\hbar \to 0$ (или $\beta \to 0$, где $\beta \in \mathbb{R}^1_+$ – "обратная" температура) из (6) в случае динамической равновесной

бозе-системы получаем классическое функциональное уравнение Боголюбова:

$$\begin{aligned}
&[\nabla_x - i\nabla f(x)]\;\frac{1}{i}\;\frac{\delta\mathcal{L}(f)}{\delta f(x)} = \\
&= -\beta\int_{\mathbb{R}^3} d^3y\;\nabla_x V(x-y):\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x)}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(y)}:\mathcal{L}(f).
\end{aligned} \tag{8}$$

Его явное функционально-операторное решение имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f) = W(f)/W(0), \\
&W(f) = \exp\Big[-\beta V\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}\Big)\Big]\;\mathcal{L}_0(f),
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathcal{L}_0(f) = \exp\big(z\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\{\exp[if(x)] - 1\}\big)$ – производящий функционал невзаимодействующей системы частиц, $z \in \mathbb{R}^1_+$ – активность частиц,

$$V\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}\Big) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\int_{\mathbb{R}^3} d^3y\;V(x-y):\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(x)}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(y)}: . \tag{10}$$

Предметом исследования §3 является квантовый метод производящих функционалов Н.Н.Боголюбова в случае неравновесной статистической физики. В этом случае показано, что производящий функционал $E(\alpha) = (\Omega, \pi(\alpha)\Omega)$, $\alpha \in G$, $\Omega \in \mathcal{H}_H$, дается выражением: $E(\alpha) = \mathcal{L}(f;g)$, где

$$\mathcal{L}(f;g) = \operatorname{tr}\big(\mathcal{P}\exp[i\rho(f)]\,\exp[iJ(g)]\big), \tag{11}$$

где $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^1)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ и $\mathcal{P}: \mathcal{H}_H \to \mathcal{H}_H$ – статистический оператор, удовлетворяющий уравнению Лиувилля – Неймана:

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\,[\mathcal{P}, H], \quad \operatorname{tr}\mathcal{P} = 1, \tag{12}$$

$t \in \mathbb{R}^1$ – эволюционная переменная.

В квазиклассическом случае $\hbar \to 0$ производящий функционал (11) переходит в следующий:

$$\mathcal{L}(f) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{P}\exp[iW(f)]\right), \tag{13}$$

где $W(f)=\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3p\, f(x,p)\, W(x,p)$, $\quad f\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3;\ \mathbb{R}^1)$,

$$W(x,p)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\alpha \exp(i\alpha p)\,\psi^+\!\left(x+\frac{\hbar\alpha}{2}\right)\psi\!\left(x-\frac{\hbar\alpha}{2}\right) \tag{14}$$

– так называемый квантованный оператор Вигнера. При переходе к вигнеровскому представлению для алгебры наблюдаемых операторов, в §3 доказывается, что производящий функционал (13) удовлетворяет неравновесному функциональному уравнению Н.Н.Боголюбова:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(f)}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q \left\{T(p),\ \frac{1}{i}\frac{\delta\mathcal{L}(f)}{\delta f(q)}\right\}^{(1)} + \tag{15}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_1\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_2 \left\{V(x_1-x_2),\ :\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(q_1)}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(q_2)}:\right\}^{(2)}\mathcal{L}(f),$$

где $q=(x,p)\in\mathbb{R}^6$, $T(p)=p^2/2m$, $\{\cdot,\cdot\}^{(j)}$, $j\in\mathbb{Z}_+$ – каноническая скобка Пуассона на $\mathbb{R}^{3j}\times\mathbb{R}^{3j}$ и которое является гамильтоновой динамической системой вида:

$$\frac{\partial\mathcal{L}(f)}{\partial t} = \{\{\mathcal{H},\ \mathcal{L}(f)\}\}. \tag{16}$$

Здесь $\{\{\cdot,\cdot\}\}$ – специальная скобка Ли-Пуассона-Власова на пространстве функционалов, индуцированная скобкой Ли-Пуассона на орбитах коприсоединенного представления квазиклассической алгебры Ли наблюдаемых операторов в представлении Вигнера, $\mathcal{H}=\mathrm{tr}(\mathcal{P}\,\mathbb{H})$, где оператор Гамильтона $\mathbb{H}:\mathcal{F}_H\to\mathcal{F}_H$ в представлении Вигнера имеет вид:

$$\mathbb{H} = \int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q\, T(p)\,W(q) + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_1\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_2\, V(x_1-x_2) : W(q_1)\,W(q_2): \tag{17}$$

Замечая, что для производящего функционала $\mathcal{L}(f)$ (13) справедливо разложение

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(n!)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_1\ldots\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_n\, F_n(q_1,q_2,\ldots, q_{n-1},q_n)\prod_{j=1}^{n}\{\exp[if(q_j)]-1\}, \tag{18}$$

где для всех $n\in\mathbb{Z}_+$

$$F_n(q_1,q_2,\ldots,q_n) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{P}: W(q_1)\ldots W(q_n):\right) \tag{19}$$

– n – частичные функции распределения неравновесной динамической системы, из (15) и (18) получаем неравновесную бесконечную цепочку Н.Н.Боголюбова для функций распределения (19). С другой стороны, из (15) и (13) находим, что для производящего функционала (18) имеется явное функционально-операторное выражение:

$$\mathcal{L}(f) = \exp\left[(t-t_0)\,V\left\{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}\right\}\right]\mathcal{L}_0(f). \tag{20}$$

Здесь

$$V\left\{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f}\right\} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_1\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_2\left\{V(x_1-x_2),\ :\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(q_1)}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(q_2)}:\right\}^{(2)}, \tag{21}$$

$$\mathcal{L}_0(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(n!)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_1\ldots\int\limits_{\mathbb{R}^6} d^6q_n\,\bar{F}_n\!\left(x_1-\frac{p_1}{m}(t-t_0),\, p_1;\ \ldots;\ x_n-\frac{p_n}{m}(t-t_0),\, p_n\right)\prod_{j=1}^{n}\{\exp[if(q_j)]-1\},$$

где $\bar{F}_n(x_1,p_1;\ x_2,p_2;\ \ldots;\ x_n,p_n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$ – начальные данные для функций распределения (19) при $t=t_0\in\mathbb{R}^1$. Разложение экспоненциального выражения (20) в ряд приводит к так называемым неравновесным кластерным выражениям типа выражений Грина и Коэна, представляющим значительный интерес для кинетической теории.

В §4, основываясь на явном функционально-операторном выражении типа (9), автор строит аналитическое преобразование производящего функционала Боголюбова в классической равновесной статистической механике к так называемым "коллективным" переменным в случае большого канонического ансамбля Гиббса. Здесь построено также соответствующее диаграммное разложение для преобразованного производящего функционала Боголюбова, пригодное для практических вычислений функций распределения. Развивая в §5 подход §4 в неравновесном случае, для производящего функционала Боголюбова (I3) в представлении Вигнера, автор получил новое кластерное разложение типа разложения Майера-Урселла, отличное от кластерного разложения, изученного в §3.

В §6 дано приложение результатов §4 к задаче вычисления функций распределения и экранированных потенциалов для физической модели поляронного газа в кристалле.

Глава 2 имеет своим основным объектом исследования функционально-операторные представления универсальной нерелятивистской квантовой алгебры Ли токов, являющейся базисной алгеброй Ли алгебры наблюдаемых операторов исходной физической динамической системы. Здесь впервые установлено, что алгебры Ли симметрий всех известных в настоящее время вполне интегрируемых бесконечномерных нелинейных динамических систем изоморфны единственной универсальной алгебре Ли токов – алгебре Ли $\mathcal{G}$ банаховой группы Ли $G = \mathcal{S} \ltimes \mathrm{Diff}(T^1)$, где $\mathcal{S} = \mathcal{S}(T^1; \mathbb{R}^1)$ – абелева группа Шварца, $\mathrm{Diff}(T^1)$ – топологическая группа диффеоморфизмов окружности T^1. В общем случае функционально-операторного представления алгебра Ли $\mathcal{G}$ имеет вид: для всех $j,k \in \mathbb{Z}$

$$[\rho_j, \rho_k] = \mu j \delta_{j,-k}, \quad [\gamma_k, \rho_j] = (j+\varepsilon)\rho_{j+k}, \tag{22}$$

$$[\gamma_k, \gamma_j] = (j-k)\gamma_{j+k} + \delta_{j,-k}(k^2-1)k\nu,$$

где $\mu, \nu, \varepsilon \in \mathbb{R}^1$ – числовые параметры, и является полупрямой суммой абелевой алгебры Ли $\mathcal{S}$, возмущенной "швингеровским" членом, и алгебры Ли Вирассоро, имеющей важное значение в теории квантованных полей калибровочного и "струнного" типов. В §I изучаются функциональные представления алгебры Ли токов $\mathcal{G}$ (22), порожденные алгебрами Ли симметрий произвольных вполне интегрируемых динамических систем на многообразии $M \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^m)$.
Пусть задана нелинейная динамическая система

$$u_t = K[u], \tag{23}$$

$u \in M$, $t \in \mathbb{R}^1$ – эволюционный параметр, $K: M \to T(M)$ – гладкое по Фреше однородное векторное поле, и существует два независимых решения уравнения нетеровости

$$L_K \mathcal{L} = \mathcal{L}' K - \mathcal{L} K'^{*} - K' \mathcal{L} = 0, \tag{24}$$

где $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$ – имплектический оператор, L_K – производная Ли в направлении векторного поля $K: M \to T(M)$. Тогда алгебра Ли симметрий Q_0 динамической системы (23) дается выражением $Q_0 = Q_0\{\alpha\} \supset Q_0\{\Phi\}$ – полупрямой суммой подалгебры Ли однородных симметрий $Q_0\{\alpha\} = \{\alpha_j = \Lambda^{*j}\alpha_0 : j \in \mathbb{Z}\}$, и подалгебры Ли неоднородных симметрий

$Q_0\{\Phi\} = \{\Phi_j = \Lambda^{*j}\Phi_0 : j \in \mathbb{Z}\}$, где $\Lambda^* = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}$ – симметрийно-рекурсионный оператор, $\mathcal{M}: T^*(M) \to T(M)$ – второе имплектическое решение уравнения нетеровости (24), т.е. $L_K \mathcal{M} = 0$, а симметрии $\{\alpha_0, \Phi_0\}$ удовлетворяют условиям: $[\Phi_0, \alpha_0] = \varepsilon\alpha_0$, $L_{\alpha_0}\Lambda = 0$, $L_{\Phi_0}\Lambda = \Lambda$. В этом случае динамическая система (23) является бигамильтоновой, обладает бесконечной иерархией инволютивных относительно обеих скобок Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{L}}$ и $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{M}}$ законов сохранения, и в случае их полноты – вполне интегрируемой по Лиувиллю. Кроме того, справедливы для всех $j \in \mathbb{Z}$ следующие характеристические формулы:

$$L_{\alpha_j}\mathcal{L} = L_{\alpha_j}\mathcal{M} = 0, \quad L_{\Phi_j}\Lambda = \Lambda^{j+1},$$

$$L_{\Phi_j}\mathcal{L} = (\xi - j - \tfrac{1}{2})\mathcal{L}\Lambda^j, \quad L_{\Phi_j}\mathcal{M} = (\xi - j + \tfrac{1}{2})\mathcal{M}\Lambda^j, \tag{25}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^1$ – некоторое число.

В случае же, когда динамическая система (23) обладает единственным решением, то роль регулярного рекурсионного оператора $\Lambda: T^*(M) \to T^*(M)$ (который в этом случае уже не существует) играет новый нерегулярный рекурсионный оператор: $sl(2)$ – подалгебра $\{\Phi_{-1}, \Phi_0, \Phi_1\}$ неоднородных симметрий:

$$Q_0\{\alpha\} = \{\alpha_{j\pm1} = [\Phi_{\pm1}, \alpha_j]/(j+\varepsilon) : j \in \mathbb{Z} \setminus \{-\varepsilon\}\},$$

$$Q_0\{\Phi\} = \{\Phi_{j\pm1} = [\Phi_{\pm1}, \Phi_j]/(j\mp1) : j \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm1\}\}.$$

При этом алгебра Ли

симметрий $Q_0 = Q_0\{\alpha\} \ni Q_0\{\Phi\}$ изоморфна алгебре Ли токов $\mathcal{O}y$ (22) (при $\mu = \nu = 0$) и для всех $j \in \mathbb{Z}$ выполнены формулы: $L_{\alpha_j}\mathcal{L} = L_{\Phi_j}\mathcal{L} = 0$. На основе на полученных алгебраических результатов в §I предложен эффективный алгоритм построения критериев интегрируемости произвольной однородной нелинейной бесконечномерной динамической системы (23) на многообразии $M \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^m)$. Здесь также дано естественное обобщение этого алгоритма на случай нелинейных "многомеризованных" динамических систем на многообразии $M \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $\mathbb{Z}_+ \ni n, m < \infty$. Эти результаты, дополненные развитым Н.Н.Боголюбовым (мл.) и автором градиентно-голономным методом исследования интегрируемости нелинейных динамических систем, дают возможность в "одномеризованном" случае предъявить для динамической системы (23) в случае ее интегрируемости так называемое представление Лакса и с его помощью описать широкий класс ее решений в явном виде.

На основе методов главы I в §2, исследуется важное свойство факторизации квантового производящего функционала Боголюбова для квантовых нелинейных динамических систем типа системы Шредингера. При этом,в случае их интегрируемости,т.е. инвариантности относительно универсальной группы симметрий $G = \mathcal{S} \ni \mathrm{Diff}(T^1)$,квантовый производящий функционал Боголюбова конечно-факторизуемый,что может служить независимым критерием их интегрируемости.В этом же §2 приведена новая вполне интегрируемая динамическая система типа системы Шредингера с сингулярным взаимодействием, которая является вполне интегрируемой как в квантовом, так и в классическом случаях, и представляет значительный интерес для статистической физики и теории квантованных полей. Последний §3 посвящен некоторому естественному обобщению результатов §I главы 2 на случай неоднородной нелинейной динамической системы на многообразии $M \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^m)$, которая интегрируема в смысле инвариантности относительно универсальной группы симметрий - банаховой группы Ли $G = \mathcal{S} \ni \mathrm{Diff}(T^1)$. Показана связь со специальными интегрируемыми гамильтоновыми системами, ассоциированными с исходной.

<u>Основные результаты диссертации опубликованы в работах:</u>

I. Квантовый метод производящих функционалов Боголюбова в статистической физике: алгебра Ли токов, ее представления и функциональные уравнения. - Журнал ЭЧАЯ, 1986, т.17, вып.4, с.789-827 (совм.с Н.Н.Боголюбовым (мл.)).
2. Метод производящих функционалов Боголюбова в статистической механике и аналог преобразования к коллективным переменным. - ТМФ, 1986, т.66, №3, с.463-480 (совм. с Н.Н.Боголюбовым (мл.)).

3. Нелинейная модель типа Шредингера: законы сохранения, представления Лакса и полная интегрируемость. - ТМФ, 1985, т.65, №2, с.271-284 (совм. с Н.Н.Боголюбовым (мл.) и др.).
4. Полная интегрируемость нелинейных систем. Ито и Бенни-Каупа: градиентный алгоритм и представление Лакса. - ТМФ, 1986, т.67, №3, с.410-425 (совм. с Н.Н.Боголюбовым (мл.).
5. Квантовый метод производящих функционалов Боголюбова в статистической физике: УМЖ, 1986, т.83, №3, с.284-289 (совм. с Н.Н.Боголюбовым (мл.)).
6. Метод производящих функционалов Боголюбова в статистической физике и аналог преобразования к коллективным переменным. - ДАН СССР, 1985, т.285, №5, с.1096-1101.
7. Квантованный оператор Вигнера и метод производящих функционалов Боголюбова в статистической физике. - ДАН СССР, 1985, 285, №6, с.1365-1370. (совм. с Н.Н.Боголюбовым (мл.)).
8. Градиентный метод построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем. - ДАН СССР, 1986, т.287, №4, с.827-832.
9. Аналитические методы построения имплектических и рекурсионных операторов интегрируемых динамических систем. - ДАН СССР, 1986, т.287, №6, с.1312-1327 (совм. с Ю.А.Митропольским, В.Г.Самойленко).
10. Элементы теории интегрируемости дискретных динамических систем.- УМЖ, 1987, т.39, №1, с.84-89.
11. Полная интегрируемость динамических систем типа Неймана. - ДАН УССР, сер.А, 1984, №10, с.51-54 (совм. с Н.Н.Боголюбовым (мл.), В.Г.Самойленко).
12. Прямые методы нахождения представления типа Лакса для динамических систем. - ДАН УССР, сер.А, 1985, №5, с.21-26 (совм. с А.И.Скрипник, В.Г.Самоленко).
13. Геометрическая структура преобразований Бэклунда вполне интегрируемых динамических систем. - ДАН УССР, сер.А, 1984, №3, с.22-24 (совм. с В.Г.Самойленко).
14. Динамические системы типа Каупа и типа Неймана: полная интегрируемость и точные решения. - Киев, 1986, с. 3-39. (Препринт Ин-та матем. АН УССР: № 86.56) (совм. с В.Г.Самойленко).
15. Об интегрируемости идеалов в алгебрах Грассмана на дифференцируемых многообразиях и некоторые их приложения. - УМЖ, 1984, т.35, №4, с.451-456 (совм. с Ю.А.Митропольским, В.Г.Самойленко).
16. Квантовый метод производящих функционалов Боголюбова в статистической физике. - Киев, 1986. - 30 с. (Препринт Ин-та теор. физ. АН УССР: ИТФ-86-108Р).

17. Исследование моделей полярона и поляронного газа на основе метода производящих функционалов Боголюбова и функционально-хронологического подхода. - Киев, 1985. - 33 с. (Препринт Ин-та теор. физ. АН УССР: ИТФ-85-144Р) (совм. с Н.Н.Боголюбовым).
18. Алгебраическая структура градиентного метода построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем. - Киев, 1986. - с.19-59 (Препринт Ин-та матем. АН УССР: № 86.53) (совм. с В.Г.Самойленко).
19. Функциональные уравнения в статистической механике и нелинейные динамические системы. - Киев, 1986. - с.1-19 (Препринт Ин-та матем. АН УССР: № 86.53) (совм. с Н.Н.Боголюбовым (мл.), В.Г.Самойленко).
20. Классическая и квантовая полная интегрируемость модели типа Шредингера. - Киев, 1984. - 33 с. (Препринт Ин-та матем. ВН УССР: № 84.53) (совм. с Н.Н.Боголюбовым (мл.), В.Г.Самойленко).
21. Интегрируемые динамические системы. - Киев: Наукова думка, 1986. - 287 с. (совм. с Ю.А.Митропольским, Н.Н.Боголюбовым (мл.), В.Г.Самойленко).
22. Гамильтоновость функциональных уравнений Боголюбова в неравновесной статистической физике. - УМЖ, 1986, т.38, №6, с.781-783 (совм. с Н.Н.Боголюбовым (мл.), В.Г.Самойленко).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1987 года.