объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

17-84-864

Й.Г.Бранков*, В.А.Загребнов, Н.С.Тончев

# ОПИСАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ГИББСОВСКИХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ КЮРИ-ВЕЙССА-ИЗИНГА

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

* Институт механики и биомеханики БАН, София

1984

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Предельные гиббсовские состояния /распределения/ являются одним из основных понятий современной статистической механики. Они наиболее детально характеризуют состояние термодинамического равновесия системы в пределе бесконечного объема, а также особенности ее поведения в случае фазовых переходов. Понятие предельного гиббсовского распределения впервые появилось в работах Минлоса [1,2]. Затем в работах Добрушина [3,4] было дано его наиболее общее определение с помощью условных распределений, которое впоследствии развивалось в работах Ланфорда, Рюэля [5,6].

Существование и описание предельных равновесных /гиббсовских/ состояний в области высоких температур и малых плотностей /или малых активностей/, т.е. в области, где предельная гиббсовская мера единственна, в настоящий момент является классическим результатом, который восходит еще к работе Боголюбова, Хацета [7], см. также [8,9]. Сюда же относится очень важная теорема Добрушина о единственности предельного гиббсовского состояния [10] и ее различные варианты, полученные в недавних работах [11,12]. Число нетривиальных моделей, для которых удается дать полное описание всех предельных гиббсовских состояний, очень невелико. В этом направлении следует отметить прежде всего работы Айзенмана [13] и Хигучи [14], где дано описание всех предельных гиббсовских состояний для плоской ферромагнитной модели Изинга со взаимодействием ближайших соседей. В этом случае при любых температурах /и нулевом магнитном поле/ все предельные гиббсовские состояния трансляционно-инвариантны и являются линейной выпуклой комбинацией лишь двух крайних точек /чистых фаз/, которые являются предельными гиббсовскими состояниями, соответствующими либо только положительным, либо только отрицательным граничным условиям. На языке квазисредних эти две чистые фазы выделяются с помощью однородного "+ поля", либо "- поля" [15].

Мотивировкой настоящей работы явилась попытка конструктивного описания всех предельных гиббсовских мер для другой спиновой модели с нетривиальными термодинамическими свойствами - модели Кюри-Вейсса-Изинга /или J/N -модели [16,17] /. Эта модель достаточно подробно и полно изучалась с самых различных точек зрения и о ее свойствах имеется обширная литература /см. например [16,17] и цитируемую там литературу/.

Здесь уместно отметить, что несмотря на относительную простоту модели специфика взаимодействия спинов в этой модели /бесконечный радиус взаимодействия, интенсивность которого зависит от объема или числа узлов/ делает невозможным применение традиционных схем исследования предельных гиббсовских распределений - например, уравнения Добрушина-Ланфорда-Рюэля [4-6].

В настоящей работе для построения предельных гиббсовских состояний использована прямая связь между согласованным семейством вероятностных мер для конфигураций спинов и системой предельных корреляционных функций, которые удается вычислить в явном виде с помощью сформулированного нами обобщенного метода квазисредних.

Основные результаты сводятся к следующему:

1/ все предельные гиббсовские состояния трансляционно-инвариантны;

2/ они являются линейной выпуклой комбинацией двух крайних точек /чистых фаз/, которые соответствуют "+ полю" и "- поля". Выше критической температуры они совпадают, т.е. предельное гиббсовское состояние единственно.

Работа построена следующим образом.

В п.2 определена модель и установлена связь между гиббсовским распределением в конечном объеме и соответствующими корреляционными функциями. Основная теорема доказана в п.3. Там же сформулирован обобщенный метод квазисредних для описания всех предельных гиббсовских состояний. В заключение в п.4 обсуждаются особенности использования обобщенного метода квазисредних для настоящей модели и связь с традиционным подходом, который отвечает заданию граничных условий.

## 2. МОДЕЛЬ КЮРИ-ВЕЙССА-ИЗИНГА. СВЯЗЬ ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В КОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ С КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Как известно, гамильтониан ферромагнитной модели Кюри-Вейсса-Изинга имеет вид

$$\mathcal{H}_\Lambda(\sigma^\Lambda) = -\frac{J}{2|\Lambda|}\sum_{i,j\in\Lambda}\sigma_i\sigma_j\,, \qquad /2.1/$$

где $J>0$, а $\Lambda\subset\mathbf{Z}^d$ является конечным подмножеством $d$-мерной решетки $\mathbf{Z}^d$. Здесь случайные величины $\sigma^\Lambda=\{\sigma_i\}_{i\in\Lambda}$ в каждом узле принимают /для простоты/ значения $\pm 1$, а $|\Lambda|$ равно числу узлов в области $\Lambda$.

Совместное вероятное распределение для $\{\sigma^\Lambda\}$ определяется гиббсовским распределением

$$P_\Lambda(\sigma^\Lambda) = Z_\Lambda^{-1}\exp\{-\beta\mathcal{H}_\Lambda(\sigma^\Lambda)\}, \qquad /2.2/$$

где $\beta^{-1}=\theta$ - температура системы.



Для статистической механики принципиальный интерес представляют предельные вероятностные распределения для случайного поля $\{\sigma^{\mathbf{Z}^d}\}$, так как они полностью описывают равновесные состояния системы в термодинамическом пределе. Эти распределения получаются с помощью некоторой предельной процедуры из распределения в конечном объеме /2.2/ и называются предельными гиббсовскими распределениями /состояниями/.

Ниже мы построим все предельные гиббсовские состояния для модели /2.1/ по следующей схеме.

1. Установим связь между конечномерным распределением /1.2/ и корреляционными функциями

$$\langle\sigma_T\rangle_\Lambda \equiv \sum_{\sigma^\Lambda} P_\Lambda(\sigma^\Lambda)\sigma_T\,, \qquad /2.3/$$

где

$$\sigma_T \equiv \prod_{i\in T}\sigma_i\,,\quad T\subset\Lambda. \qquad /2.4/$$

2. Проблема определения предельного гиббсовского распределения будет сведена, с помощью теоремы Колмогорова о продолжении вероятностной меры для согласованного семейства конечномерных распределений /см. например [18]/, к вычислению корреляционных функций в термодинамическом пределе.

3. Из явного вида и свойств предельных корреляционных функций, построенных с помощью обобщенного метода квазисредних, будет дано описание всех предельных гиббсовских состояний для модели /2.1/.

Перейдем теперь к доказательству следующего утверждения.

Лемма 2.1. Для модели /2.1/ конечномерные распределения в области $\Lambda$ связаны с корреляционными функциями следующим образом:

$$P^S_\Lambda(\sigma^S=\tilde\sigma^S) = \sum_{\sigma^{\Lambda\setminus S}} P_\Lambda(\sigma^{\Lambda\setminus S}\cup\tilde\sigma^S) = \sum_{T\subset S} k_T(\tilde\sigma^S)\langle\sigma_T^S\rangle \qquad /2.5/$$

для любого подмножества $S\subset\Lambda$. Здесь коэффициенты $k_T$ не зависят от области $\Lambda$.

Доказательство. Имеет место тождество

$$\langle\prod_{i\in S}(\sigma_i+\tilde\sigma_i)\rangle_\Lambda = \langle\sigma_S\rangle_\Lambda + \sum_{i\in S}\tilde\sigma_i\langle\sigma_{S\setminus i}\rangle + \qquad /2.6/$$

$$+\sum_{(i\neq j)\in S}\tilde\sigma_i\tilde\sigma_j\langle\sigma_{S\setminus(i\cup j)}\rangle_\Lambda + \ldots \equiv \sum_{T\subset S}k'_T(\tilde\sigma^S)\langle\sigma_T\rangle_\Lambda\,.$$

Левую часть этого тождества можно представить в виде

$$Z_\Lambda^{-1}\sum_{\sigma^\Lambda}\exp\{-\beta\mathcal{H}_\Lambda(\sigma^\Lambda)\}\prod_{i\in S}(\sigma_i+\tilde\sigma_i) =$$

$$= Z_\Lambda^{-1} \sum_{\sigma^{\Lambda\setminus S}} \Big[ \sum_{\sigma^S} \exp\{-\beta \mathcal{H}_\Lambda (\sigma^{\Lambda\setminus S} \cup \sigma^S)\} \prod_{i\in S} (\sigma_i + \tilde\sigma_i) \Big] =$$

$$= Z_\Lambda^{-1} \sum_{\sigma^{\Lambda\setminus S}} \exp\{-\beta \mathcal{H}_\Lambda (\sigma^{\Lambda\setminus S} \cup \tilde\sigma^S)\} \prod_{i\in S} 2\tilde\sigma_i = P_\Lambda^S(\sigma^S = \tilde\sigma^S) \prod_{i\in S} 2\tilde\sigma_i . \qquad /2.7/$$

Из уравнений /2.6/ и /2.7/ следует равенство /2.5/, где

$$k_T(\tilde\sigma^S) = k'_T(\tilde\sigma^S)\Big(\prod_{i\in S} 2\tilde\sigma_i\Big)^{-1} . \quad \square$$

## 3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КВАЗИСРЕДНИХ

Как следует из леммы 2.1, описание всех предельных конечномерных распределений

$$P^S(\sigma^S) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} P_\Lambda^S(\sigma^S), \qquad /3.1/$$

для любого конечного множества $S \subset \mathbf{Z}^d$, которые порождаются гиббсовским распределением /2.2/ в конечном объеме, сводится к описанию всех возможных термодинамических пределов для корреляционных функций

$$\langle\sigma_T\rangle = \lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} \langle\sigma_T\rangle_\Lambda \qquad /3.2/$$

для любых конечных множеств $T \subset \mathbf{Z}^d$.

Различные термодинамические пределы для корреляционных функций соответствуют либо различному выбору граничных условий вне области $\Lambda$, либо различным способам выключения /в термодинамическом пределе/ внешних магнитных полей $\{h_i\}_{i\in\Lambda}$, взаимодействие с которыми вводится в гамильтониан системы /2.1/ следующим образом:

$$\mathcal{H}_\Lambda(\sigma^\Lambda, \vec h) = \mathcal{H}_\Lambda(\sigma^\Lambda) - \sum_{i\in\Lambda} h_i\sigma_i . \qquad /3.3/$$

Допустим, что пределы /3.2/ существуют. Тогда имеют место следующие утверждения.

Лемма 3.1. Конечномерные распределения /3.1/ задают согласованные семейства вероятностных мер на пространстве $(\Omega, \Sigma)$, где $\Omega = \{1,-1\}^{\mathbf{Z}^d}$ -пространство всех спиновых конфигураций на решетке /с топологией прямого произведения/, а $\Sigma$ есть минимальная $\sigma$-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами $\{\sigma^S \times \{1,-1\}^{\mathbf{Z}^d\setminus S}\}_{S\subset \mathbf{Z}^d}$ .



Доказательство. Пусть конечное множество $T \subset S$, где $S$ тоже является конечным. Тогда согласно соотношениям /2.5/ и /3.1/ для предельного конечномерного распределения $P^T(\sigma^T)$ имеем:

$$P^S(\sigma^T \times \{1,-1\}^{S\setminus T}) = \sum_{\sigma^{S\setminus T}} \lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} P_\Lambda^S(\sigma^T \cup \sigma^{S\setminus T}) =$$

$$= \lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} \sum_{\sigma^{S\setminus T}} P_\Lambda^S(\sigma^T \cup \sigma^{S\setminus T}) = \lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} P_\Lambda^T(\sigma^T) = P^T(\sigma^T),$$

что и выражает условие согласованности. $\square$

Предложение 3.1. /Колмогоров, см., например, [18]/. Если на пространстве $\Omega$ задано согласованное семейство вероятностных распределений, то на $(\Omega, \Sigma)$ существует единственное вероятностное распределение $P(\cdot)$, такое, что при любом конечном $S$ распределение $P^S(\cdot)$ совпадает с проекцией $P(\cdot)$ на множество $\{1,-1\}^S$.

Замечание 3.1. Вероятностные распределения $P(\cdot)$, построенные с помощью теоремы Колмогорова и проекций /3.1/, мы, следуя [1,2], будем называть предельными гиббсовскими распределениями, а функционалы $\langle - \rangle$ /3.2/ - предельными гиббсовскими состояниями для модели /2.1/.

Обратимся теперь к вопросу о существовании пределов /3.2/.

Лемма 3.2. Все термодинамические пределы для корреляционных функций /3.2/ существуют и имеют вид:

$$\langle\sigma_T\rangle = \lambda\langle\sigma_T\rangle_+ + (1-\lambda)\langle\sigma_T\rangle_- , \quad T\subset \mathbf{Z}^d, \ |T|<\infty, \qquad /3.4/$$

где $0 \le \lambda \le 1$. Здесь квазисредние $\langle\sigma_T\rangle_\pm$ определяются следующим стандартным образом:

$$\langle\sigma_T\rangle_\pm = \lim_{h\to\pm 0} \lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^d} \langle\sigma_T\rangle_\Lambda(h) , \qquad /3.5/$$

где $\langle - \rangle_\Lambda(h)$ обозначает гиббсовское состояние в конечном объеме с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_\Lambda(\sigma^\Lambda, h) = \mathcal{H}_\Lambda(\sigma^\Lambda) - h\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i . \qquad /3.6/$$

Доказательство. Для пространственно неоднородного внешнего поля $\vec h \equiv \{h_i\}_{i\in \mathbf{Z}^d}$ с конечной вариацией /т.е. для конфигураций поля $H = \{\vec h \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d} : |h_i| < \infty, i \in \mathbf{Z}^d\}$) с помощью /3.3/ получаем следующее представление для корреляционных функций:

$$\langle\sigma_T\rangle_\Lambda(\vec h_\Lambda) = \frac{\langle \prod_{i\in T} \operatorname{th}(h_i + x\sqrt{\beta J/|\Lambda|}) \prod_{j\in\Lambda} \operatorname{ch}(h_i + x\sqrt{\beta J/|\Lambda|})\rangle_0}{\langle \prod_{j\in\Lambda} \operatorname{ch}(h_j + x\sqrt{\beta J/|\Lambda|})\rangle_0} , \qquad /3.7/$$

где

$$\langle - \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}x^2} (-) \qquad \text{и} \quad \vec{h}_\Lambda = \{h_i\}_{i \in \Lambda} .$$

Введем функцию

$$f_\Lambda(\beta, \vec{h}_\Lambda; y) = \frac{1}{2} Jy^2 - \frac{\beta^{-1}}{|\Lambda|} \sum_{j \in \Lambda} \ln \mathrm{ch}\, [\beta(Jy + h_j)] . \qquad /3.8/$$

Тогда выражение /3.7/ можно представить в виде

$$\langle \sigma_T \rangle_\Lambda (\vec{h}_\Lambda) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dy \prod_{j \in T} \mathrm{th}[\beta(Jy + h_j)]\, e^{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(\beta, \vec{h}_\Lambda; y)}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|\Lambda| f_\Lambda(\beta, \vec{h}; y)} dy} . \qquad /3.9/$$

Поскольку нас интересует описание всех предельных гиббсовских состояний в нулевом внешнем поле ($\vec{h} = 0$), то ниже мы рассмотрим пространственно неоднородные конфигурации поля, такие, что $\vec{h}$ равномерно сходится к нулю:

$$\{\vec{h} \Rightarrow 0\} = \{ \sup_{i \in Z^d} |h_i| \to 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j \in Z^d} |h_i|^2 \to 0 \} . \qquad /3.10/$$

Представим функцию /3.8/ в виде суммы четной и нечетной частей по переменной $y$:

$$f_\Lambda(\beta, \vec{h}_\Lambda; y) = f_\Lambda^+(\beta, \vec{h}_\Lambda; y) + f_\Lambda^-(\beta, \vec{h}; y) , \qquad /3.11/$$

где соответствующие выражения при $\vec{h} \Rightarrow 0$ имеют вид

$$f_\Lambda^+(\beta, \vec{h}_\Lambda; y) = \frac{1}{2} Jy^2 - \beta^{-1} \ln \mathrm{ch}(\beta J y) + \frac{1}{|\Lambda|} \mathcal{O}\Big( \sum_{j \in \Lambda} h_i^2 \Big) ,$$

$$f_\Lambda^-(\beta, \vec{h}_\Lambda; y) = - \frac{1}{|\Lambda|} \Big( \sum_{j \in \Lambda} h_j \Big) \mathrm{th}(\beta J y) + \frac{1}{|\Lambda|} \mathcal{O}\Big( \sum_{j \in \Lambda} h_j^3 \Big) . \qquad /3.12/$$

Для анализа всех возможных пределов /3.10/ в выражении /3.9/ удобно ввести семейство функций $\rho_\Lambda: \boldsymbol{R}^{|\Lambda|} \to \boldsymbol{R}^1$, где $\Lambda \subset \boldsymbol{Z}^d$ и $|\Lambda| < \infty$:

$$\rho_\Lambda(\vec{h}) = \sum_{j \in \Lambda} h_j . \qquad /3.13/$$



Из выражений /3.9/ и /3.12/ видно /подробности, доказательства см. в приложении/, что с помощью функции /3.13/ эти пределы классифицируются следующим образом.

Случай 1. Пусть поле $\vec{h}$ равномерно сходится к нулю при $\Lambda$ $\boldsymbol{Z}^d$, причем

$$\lim_{\Lambda \uparrow \boldsymbol{Z}^d} \rho_\Lambda (\vec{h}_\Lambda) = 0 . \qquad /3.14/$$

Тогда получим

$$\lim_{\Lambda \uparrow \boldsymbol{Z}^d} \langle \sigma_T \rangle_\Lambda (\vec{h}) = \frac{1}{2} [ \langle \sigma_T \rangle_+ + \langle \sigma_T \rangle_- ] , \qquad /3.15/$$

где

$$\langle \sigma_T \rangle_\pm = (\pm y_0)^{|T|} , \qquad /3.16/$$

а $y_0$ является неотрицательным решением уравнения

$$y = \mathrm{th}(\beta J y) , \qquad /3.17/$$

которое определяет точки перевала в интегралах /3.9/. Как обычно, при температуре выше критической $\beta \le \beta_c = J^{-1}$ мы имеем единственную точку перевала $y_0 = 0$; при $\beta > \beta_c$ их имеется две: $y_0^\pm = \pm y_0 \ne 0$.

Случай 2. Пусть поле $\vec{h}$ равномерно сходится к нулю при $\Lambda \uparrow \boldsymbol{Z}^d$, причем

$$\lim_{\Lambda \uparrow \boldsymbol{Z}^d} \rho_\Lambda (\vec{h}_\Lambda) = \rho , \quad 0 < |\rho| < \infty . \qquad /3.18/$$

Тогда из выражений /3.9/-/3.12/ получаем

$$\lim_{\Lambda \uparrow \boldsymbol{Z}^d} \langle \sigma_T \rangle (\vec{h}_\Lambda) = \lambda \langle \sigma_T \rangle_+ + (1 - \lambda) \langle \sigma_T \rangle_- , \qquad /3.19/$$

где $\lambda$ является функцией температуры и параметра $\rho$ и имеет вид

$$\lambda = \frac{e^{\beta \rho y_0}}{e^{\beta \rho y_0} + e^{-\beta \rho y_0}} , \qquad /3.20/$$

а $\langle \sigma_T \rangle_\pm$ и $y_0$ определены выше, см. /3.16/, /3.17/.

Случай 3. Пусть поле $\vec{h}$ равномерно сходится к нулю при $\Lambda \uparrow \boldsymbol{Z}^d$, причем

$$\lim_{\Lambda \uparrow \boldsymbol{Z}^d} \rho\, (\vec{h}_\Lambda) = \pm \infty . \qquad /3.21/$$

Тогда из /3.10/ и /3.13/ следует, что

$$\lim_{\Lambda \uparrow Z^d} |\Lambda|^{-1} \rho_\Lambda(\vec{h}_\Lambda) = 0. \qquad /3.22/$$

Заметим, что и в этом случае отношение второго члена в разложении /3.12/ для функции $f_\Lambda^-(\beta, \vec{h}_\Lambda; y)$ к первому члену стремится к нулю при $\Lambda \uparrow Z^d$, см. приложение. Поэтому с помощью метода перевала получаем

$$\lim_{\Lambda \uparrow Z^d} \langle \sigma_T \rangle_\Lambda (\vec{h}_\Lambda) = \begin{cases} \langle \sigma_T \rangle_+, & \rho_\Lambda(\vec{h}_\Lambda) \to \infty \\ \langle \sigma_T \rangle_-, & \rho_\Lambda(\vec{h}_\Lambda) \to -\infty, \end{cases} \qquad /3.23/$$

где $\langle \sigma_T \rangle_\pm$ определены формулой /3.16/.

На этом доказательство леммы заканчивается. □

Замечание 3.1. Отметим, что рассмотренный выше случай 1 является прямым следствием случая 2 при $\rho \to 0$, в то время как случай 3 является лишь его формальным следствием при $\rho \to \pm\infty$.

Замечание 3.2. /О квазисредних/. При доказательстве леммы 3.2. для построения различных пределов корреляционных функций использовался метод выключения внешнего поля в форме, отличающейся от канонического метода квазисредних Боголюбова /15/. Метод Боголюбова позволяет выделить чистые состояния /фазы/ в системах, испытывающих фазовый переход со спонтанным нарушением симметрии /19-21/. Для этого включаются внешние источники, нарушающие симметрию гамильтониана, с последующим их выключением после термодинамического предельного перехода. Как установил Боголюбов /мл/ /20/, в некоторых случаях эта процедура не дает определенного результата. Поэтому в /20/ был предложен новый метод введения квазисредних, когда выбор источников связан с параметром порядка. Кроме того, как было показано в /22/, существует и другой способ введения квазисредних путем нарушения коммутационных соотношений для операторов, определяющих структуру гамильтониана. В настоящей работе продемонстрирована плодотворность идеи использования внешних источников. Нами показано, что для описания всех термодинамических пределов для корреляционных функций, которые определяют предельные гиббсовские состояния системы /в том числе смешанные, трансляционно-неинвариантные и т.п./, необходимо отказаться от требования трансляционной инвариантности внешнего поля и от определенного в методе квазисредних порядка перехода к пределам. А именно: стремление к нулю пространственно неоднородных внешних полей осуществляется одновременно с термодинамическим пределом. Отметим, что результат, соответствующий случаю 3, дает то же, что и обычная процедура вычисления квазисредних Боголюбова /см. /3.5//. В то же время случай 1 соответствует модели с внешним полем, тождественно равным нулю.



Замечание 3.3. Как следует из доказательства леммы 3.2 /см. также приложение/, все возможные термодинамические пределы корреляционных функций модели /2.1/ характеризуются пределами функции $\rho_\Lambda$, поэтому их можно получить, ограничиваясь только пространственно однородными полями с соответствующей асимптотикой /по $|\Lambda|$ / убывания их амплитуды.

Основная теорема. Все предельные гиббсовские распределения $P(\cdot)$ для модели /2.1/ трансляционно-инвариантны и описываются следующим образом: 1/ для $\beta \le \beta_c$ предельное гиббсовское распределение единственно:

$$P(\cdot) = P_+(\cdot) = P_-(\cdot), \qquad /3.24/$$

2/ для $\beta > \beta_c$ они являются линейной выпуклой комбинацией двух эргодических компонент /чистых состояний/:

$$P(\cdot) = \lambda P_+(\cdot) + (1-\lambda) P_-(\cdot), \quad 0 \le \lambda \le 1. \qquad /3.25/$$

Здесь крайние точки $P_\pm(\cdot)$ являются вероятностными распределениями, построенными по теореме Колмогорова с помощью проекций /см. /2.5/ и /3.5//

$$P_\pm^S(\cdot) = \sum_{T \subset S} k_T(\cdot) \langle \sigma_T \rangle_\pm . \qquad /3.26/$$

Доказательство. Трансляционная инвариантность предельных распределений /см. /2.5/, /3.1// является прямым следствием трансляционной инвариантности предельных корреляционных функций, для которых были получены явные выражения /3.4/ и /3.16/:

$$\langle \sigma_T \rangle = \langle \sigma_{T+a} \rangle, \qquad /3.27/$$

где $a$ - вектор решетки $Z^d$, а множество $T+a = \{i \in Z^d : i - a \in T\}$. Формулы /3.24/-/3.26/ являются следствием леммы 1.1, выражений /3.1/, /3.2/ и леммы 2.2. □

Замечание 3.4. Для $\beta \le \beta_c$ можно привести явное выражение для проекций $P^S(\cdot)$ единственного предельного вероятностного распределения /3.24/. Из выражений /3.16/ и /3.26/ при $y_0(\beta \le \beta_c) = 0$ получаем

$$P_\pm^S(\cdot) = K_\emptyset(\cdot) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|S|}(\cdot). \qquad /3.28/$$

Замечание 3.5. Предельные гиббсовские распределения $P_\pm(\cdot)$, соответственно состояния $\langle - \rangle_\pm$, являются чистыми /или чистыми фазами /23,24/ /, поскольку они обладают свойством / $m$-кратного/ перемешивания:

$$\lim_{R\to\infty} \left\langle \prod_{j=1}^{m} \sigma_{T_j + a_j} \right\rangle_{\pm} = \prod_{j=1}^{m} \langle \sigma_{T_j} \rangle_{\pm} , \qquad /3.29/$$

$$R = \min_{1 \le i < j \le m} \operatorname{dist}(T_i + a_i, T_j + a_j) .$$

В действительности, для рассматриваемой модели /2.1/ свойство /3.29/, в силу равенства /3.16/, выполняется для любого набора конечных множеств $\{T_j\}_{j=1}^{m}$, таких, что $T_j \cap T_{j'} = \{\emptyset\} (j \neq i)$, т.е. в наиболее сильной форме, соответствующей независимым случайным величинам в различных узлах решетки $Z^d$. Ясно, что смешанные состояния /см. /3.4/ при $\lambda \neq 0,1$/ ни свойством /3.29/, ни более слабым свойством эргодичности не обладают.

## 4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение отметим, что стандартный способ построения предельных гиббсовских распределений /состояний/ заключается в нахождении термодинамического предела для распределений /состояний/ в конечном объеме при произвольных граничных условиях /3-5, 23, 24/. В настоящей работе для выполнения этой программы предложен обобщенный метод квазисредних /см. замечание 3.2/. Из результатов и доказательства основной теоремы /п.3/ следует, что при построении всех предельных гиббсовских состояний для модели /2.1/ с помощью метода квазисредних достаточно ограничиться /причем от второго из условий /3.10/ теперь можно отказаться/ трансляционно-инвариантными внешними полями с соответствующим подбором асимптотики их выключения в термодинамическом пределе. Например, из доказательства леммы 3.2 следует, что случаи 1,2 и 3 сводятся, по-существу, к следующему выбору этих асимптотик:

$$h_j = h(\Lambda) \sim |\Lambda|^{-\alpha} , \quad 1.\ \alpha > 1 , \quad 2.\ \alpha = 1 , \quad 3.\ 0 < \alpha < 1 . \qquad /4.1/$$

Поэтому для модели /2.1/ результаты, полученные выше с помощью обобщенного метода квазисредних, можно получить, апеллируя к стандартному способу построения предельных гиббсовских состояний с помощью граничных условий. Действительно, фиксирование значений спиновых переменных в слое $\Gamma$, прилегающем к границе области $\Lambda$, приводит гамильтониан /2.1/ к виду

$$\mathcal{H}_{\Lambda}(\sigma^{\Lambda\setminus\Gamma} \cup \tilde{\sigma}^{\Gamma}) = -\frac{J}{2|\Lambda|} \sum_{i,j \in \Lambda\setminus\Gamma} \sigma_i \sigma_j - \qquad /4.2/$$

$$- \frac{J}{|\Lambda|} \sum_{\substack{i \in \Lambda\setminus\Gamma \\ j \in \Gamma}} \sigma_i \tilde{\sigma}_j - \frac{J}{2|\Lambda|} \sum_{i,j \in \Gamma} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j .$$



Это соответствует включению однородного, зависящего от объема системы, внешнего поля

$$h = \frac{J}{|\Lambda|} \sum_{j \in \Gamma} \tilde{\sigma}_j . \qquad /4.3/$$

Поэтому различный выбор асимптотик числа узлов $|\Gamma|$ в этом слое при $|\Lambda| \to \infty$ и конфигураций спинов $\tilde{\sigma}^S$ позволяет реализовать все три случая, рассмотренные выше при доказательстве леммы 3.2. В частности, при $\beta > \beta$ , $h = 0$ для любого $m: \langle \sigma_i \rangle_- \le m \le \langle \sigma_i \rangle_+$ можно построить ровно одно предельное равновесное состояние $\langle - \rangle$, такое, что $m$ совпадает с намагниченностью $\langle \sigma_i \rangle$ в этом состоянии.

Настоящая работа была инициирована замечанием Н.Ангелеску о возможности построения для модели /2.1/ /при температуре ниже критической и нулевом поле/ состояний с промежуточной намагниченностью. Мы благодарны ему за постоянный интерес к работе и ряд полезных замечаний. Один из нас /В.А.З./ благодарен ИЯИЯЭ и ИМБ Болгарской академии наук за гостеприимство - во время пребывания в этих институтах настоящая работа была завершена.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Заметим, что четная и нечетная части /3.11/ для функции /3.8/ имеют вид

$$f_{\Lambda}^{+}(\beta, \vec{h}_{\Lambda}; y) = f^{+}(\beta, y) + \delta_{\Lambda}^{+}(\beta, \vec{h}_{\Lambda}; y) ,$$

$$f^{+}(\beta, y) = \frac{1}{2} J y^2 - \beta^{-1} \ln \operatorname{ch} \beta J y , \qquad /П.1/$$

$$\delta_{\Lambda}^{+}(\beta, \vec{h}_{\Lambda}; y) = -\frac{1}{2\beta|\Lambda|} \sum_{j \in \Lambda} \ln[(1 + \operatorname{th}^2 \beta h_j)(1 - \operatorname{th}^2(\beta J y) \operatorname{th}^2(\beta h_j))] ,$$

$$f_{\Lambda}^{-}(\beta, \vec{h}_{\Lambda}; y) = -\frac{1}{\beta|\Lambda|} \operatorname{th} \beta J y \sum_{j \in \Lambda} \operatorname{th}(\beta h_j) \phi(\beta, \vec{h}_{\Lambda}; y) ,$$

$$\phi(\beta, \vec{h}_{\Lambda}; y) = \frac{1}{2 \operatorname{th}(\beta J y) \operatorname{th}(\beta h_i)} \ln \frac{1 + \operatorname{th}(\beta J y) \operatorname{th}(\beta h_j)}{1 - \operatorname{th}(\beta J y) \operatorname{th}(\beta h_j)} ,$$

Так как нас интересует случай предела /3.10/, обозначим $\sup_{j \in \Lambda} |h_j| = \epsilon_{\Lambda}$. Тогда из равномерной ограниченности функций $\delta_{\Lambda}^{+}(\beta, \vec{h}_{\Lambda}; y)$ и

$\phi(\beta, \vec{h}_\Lambda; y)$ по $y$ следует, что для $f_\Lambda^{\pm}(\beta, \vec{h}_\Lambda; y)$ имеют место соотношения /3.12/, причем

$$|\delta_\Lambda^{+}(\beta, \vec{h}_\Lambda; y)| \le \frac{1}{2\beta|\Lambda|} \sum_{j \in \Lambda} \mathrm{th}^2 \beta h_j \le \frac{1}{2} \beta \epsilon_\Lambda^2 . \qquad /\Pi.2/$$

Если представить нечетную часть функции /3.8/ в виде

$$f^{-}(\beta, \vec{h}_\Lambda; y) = -\frac{1}{|\Lambda|} \mathrm{th}\,\beta J y \sum_{j \in \Lambda} h_j + \delta_\Lambda^{-}(\beta, \vec{h}_\Lambda; y) ,$$

$$\delta_\Lambda^{-}(\beta, \vec{h}_\Lambda; y) \equiv -\frac{1}{\beta|\Lambda|} \mathrm{th}\,\beta J y \sum_{j \in \Lambda} (\mathrm{th}\,\beta h_j - h_j \beta) \phi(\beta, \vec{h}_\Lambda; y) ,$$

то при достаточно малых $\epsilon_\Lambda$ получаем оценку /см. /3.10/ и /3.12//:

$$|\delta_\Lambda^{-}(\beta, \vec{h}; y)| \le \frac{1}{3\beta m} \left(\frac{1}{2\epsilon_\Lambda} \ln \frac{1+\epsilon_\Lambda}{1-\epsilon_\Lambda}\right) \sum_{j \in \Lambda} (\beta h_j)^3 = \mathcal{O}(\epsilon_\Lambda^2) \frac{1}{|\Lambda|} \Big| \sum_{j \in \Lambda} h_j \Big| . \qquad /\Pi.3/$$

Поскольку оценки /П.1/-/П.3/ равномерны по переменной $y$ и по конфигурациям внешнего поля $\{h_j\}_{j \in \Lambda}$, то удобно ввести параметры $\epsilon = \sup_{j \in \mathbf{Z}^d} |h_j|$ и $\rho_\Lambda = \sum_{j \in \Lambda} h_j$. Тогда вычисление интегралов /3.9/ в пределе $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$ сводится к методу перевала для задачи с дополнительными параметрами $\epsilon$ и $\rho_\Lambda$:

$$I_1(\vec{h}_\Lambda) = \int dy \left[(\mathrm{th}\,\beta J y)^{|T|} + |T|\, \mathcal{O}(\epsilon)\right] \exp\{-\beta|\Lambda| [f^{+}(\beta; y) + \mathcal{O}(\epsilon^2)]\} \cdot \exp\{\beta \rho_\Lambda [\mathrm{th}\,\beta J y + \mathcal{O}(\epsilon^2)]\} , \qquad /\Pi.4/$$

$$I_2(\vec{h}_\Lambda) = \int dy \exp\{-\beta|\Lambda| [f^{+}(\beta, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2)]\} \exp\{\beta \rho_\Lambda [\mathrm{th}\,\beta J y + \mathcal{O}(\epsilon^2)]\} .$$

Асимптотика интегралов $I_{1,2}(\vec{h}_\Lambda)$ при $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$ равномерна по параметрам $\epsilon$ и $\rho_\Lambda$ /25/, поэтому можно перейти к соответствующим пределам по $\epsilon$ и $\rho_\Lambda$, характеризующим конфигурации внешнего поля. В результате получаем

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} \langle \sigma_T \rangle (\vec{h}) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dy (\mathrm{th}\,\beta J y)^{|T|} e^{-\beta|\Lambda| f^{+}(\beta, y)} e^{\beta \rho_\Lambda \mathrm{th}\,\beta J y}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\beta|\Lambda| f^{+}(\beta, y)} e^{\beta \rho_\Lambda \mathrm{th}\,\beta J y}}$$



Так как $|\Lambda|^{-1} \rho_\Lambda \le \epsilon$, то предел в /П.5/ определяется перевальными точками функции $f^{+}(\beta, y)$ и зависит от асимптотики параметра $\rho_\Lambda$ /3.13/. Эта зависимость и обсуждается при доказательстве леммы 3.1.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Минлос Р.А. Функциональный анализ и его приложения, 1976, 1, №2, с. 60-73.
2. Минлос Р.А. Функциональный анализ и его приложения, 1967, 1, №3, с. 40-53.
3. Добрушин Р.Л. Теория вероятностей и ее применения, 1969, 13, №2, с. 201-229.
4. Добрушин Р.Л. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, №3, с. 469-497.
5. Lanford O.E., Ruelle D. Commun.Math.Phys., 1968, 13, No 3, p. 194-215.
6. Ruelle D. Commun Math.Phys., 1970, 18, No 2, p. 127-159.
7. Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. ДАН СССР, 1949, 66, №3, с. 321-324.
8. Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И. Теорет. и матем. физика, 1969, 1, №2, с. 251-274.
9. Загребнов В.А. Теорет. и матем. физика, 1982, 51, №3, с. 389-402.
10. Добрушин Р.Л. Функциональный анализ и его приложения, 1968, 2, №4, с. 44-57.
11. Simon B. Commun.Math.Phys., 1979, 68, No 2, p. 183-185.
12. Klein D. Commun.Math.Phys., 1982, 86, No 2, p. 227-246.
13. Aizenman M. Commun.Math.Phys., 1980, 73, No 1, p.83-94.
14. Higychi Y. In: Random Fields, Colloquia Mathematica Sociatatis Janos Bolyai, 1981, 27, vol.1, p. 517-534.
15. Боголюбов Н.Н. Избранные труды в трех томах. "Наукова думка", Киев, 1971, т.3, с. 174-243.
16. Ellis R.S., Newman Ch.M. J.Stat.Phys., 1978, 19, No 2, p. 149-161.
17. Боголюбов Н.Н. /мл./ и др. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. София, Изд-во БАН, 1981, гл. Ш, §1.
18. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. "Наука", М., 1977, гл.II, §2.
19. Wagner H. Z.Physik, 1966, 195, No 3, p. 273-299.
20. Боголюбов Н.Н. /мл./ Метод исследования модельных гамильтонианов. "Наука", М., 1974.
21. Гриб А.А., Дамаскинский Е.В., Максимов В.М. УФН, 1970, 102, №4, с. 587-620.
22. Bogolubov N.N. (jr.). J.Math.Phys., 1973, 14, No 1, p.79-83.
23. Ruelle D. Thermodynamic Formalism. Reading. Mass.: Addison-Wesley, 1978.

24. Малышев В.А. Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем. ОИЯИ, Р17-83-363, Дубна, 1983.
25. Федорюк М.В. Метод перевала. "Наука", М., 1977, гл. II,§2.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1984 года.



СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. *Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, Р2-84-649, Дубна, 1984.*

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

*Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.*

*Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб."Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна,1984,с.3.*

## Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

| ИНДЕКС | ТЕМАТИКА | Цена подписки на год |
|---|---|---|
| 1. | Экспериментальная физика высоких энергий | 10 р. 80 коп. |
| 2. | Теоретическая физика высоких энергий | 17 р. 80 коп. |
| 3. | Экспериментальная нейтронная физика | 4 р. 80 коп. |
| 4. | Теоретическая физика низких энергий | 8 р. 80 коп. |
| 5. | Математика | 4 р. 80 коп. |
| 6. | Ядерная спектроскопия и радиохимия | 4 р. 80 коп. |
| 7. | Физика тяжелых ионов | 2 р. 85 коп. |
| 8. | Криогеника | 2 р. 85 коп. |
| 9. | Ускорители | 7 р. 80 коп. |
| 10. | Автоматизация обработки экспериментальных данных | 7 р. 80 коп. |
| 11. | Вычислительная математика и техника | 6 р. 80 коп. |
| 12. | Химия | 1 р. 70 коп. |
| 13. | Техника физического эксперимента | 8 р. 80 коп. |
| 14. | Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами | 1 р. 70 коп. |
| 15. | Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях | 1 р. 50 коп. |
| 16. | Дозиметрия и физика защиты | 1 р. 90 коп. |
| 17. | Теория конденсированного состояния | 6 р. 80 коп. |
| 18. | Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники | 2 р. 35 коп. |
| 19. | Биофизика | 1 р. 20 коп. |

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Тончев Н.С. 17-84-864

Описание предельных гиббсовских состояний для модели Кюри-Вейсса-Изинга

Метод квазисредних использован для описания предельных равновесных состояний ферромагнитной модели Кюри-Вейсса-Изинга в нулевом магнитном поле. Показано, что они трансляционно инвариантны и являются линейными выпуклыми комбинациями двух крайних точек /чистых фаз/.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Brankov J.G., Zagrebnov V.A., Tonchev N.S. 17-84-864

Limit Gibbs States for Curie-Weiss-Ising Model

We give a complete description of the limit equilibrium states for Curie-Weiss-Ising in zero magnetic field by means of a generalized quasiaverage method. All of them are shown to be translation-invariant and can be written only as a convex combination of two extremal states (pure phases).

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984