ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

17-2008-133

На правах рукописи
УДК 531.19

ПОГОСЯН
Ваагн Суренович

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ РЕШЕТОЧНЫЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2008

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук профессор В.Б. Приезжев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук С.З. Пакуляк

доктор физико-математических наук профессор А.В. Разумов

Ведущая организация: Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

Защита состоится "12" ноября 2008 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 720.001.01 в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, 141980, г. Дубна, Московская область, ул. Жолио-Кюри, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЛТФ ОИЯИ.

Автореферат разослан "9" октября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А.Б. Арбузов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы.

Точно решаемые решеточные модели играют большую роль в равновесной и неравновесной статистической механике. Они описываются относительно простыми динамическими законами и в то же время объясняют нетривиальные критические явления. Исследование таких моделей помогает на простых примерах понять механизм критического поведения реальных систем.

В последнее время возник интерес к изучению точно решаемых неравновесных моделей. Исследования одномерных решеточных моделей взаимодействующих частиц вдали от термодинамического равновесия показывают, что диффузионные системы с короткодействующим взаимодействием между частицами проявляют необычайно богатое разнообразие критических явлений. С формальной точки зрения кинетическое уравнение неравновесных процессов можно отождествить с уравнением Шредингера соответствующей квантовой системы. Следовательно, естественно ожидать, что анзац Бете можно применить для нахождения точного решения одномерных неравновесных моделей. Главное отличие от обычных квантовых систем состоит в том, что полученный гамильтониан неэрмитов, т.к. мнимые собственные значения гамильтониана должны описывать процессы затухания в неравновесной системе.

Важнейшим примером неравновесного решеточного газа является асимметричный процесс с исключением (Asymmetric Simple Exclusion Process, ASEP). Это стохастическая система частиц на одномерной решетке, совершающих скачки в соседние узлы по таким правилам, чтобы две частицы не могли находиться в одном узле и не могли обогнать друг друга. Если существует полная симметрия по отношению к направлению движения, то в пределе больших времен получается равновесный газ. Под действием внешнего поля, которое нарушает эту симметрию, возникает макроскопический поток частиц, который и является предметом изучения.

Широкий интерес к этой модели объясняется ее родством с процессами роста поверхностей, проблемой направленных полимеров в хаотически неоднородной среде и уравнением Бюргерса. Она также является простейшей нетривиальной моделью транспортных систем и может служить отправной точкой для их практического исследования.

Конформная теория поля является мощным инструментом для описания классов универсальности критических двумерных моделей теории равновесной статистической механики. Критические экспоненты, корреляционные функции, конечно-размерный анализ, теория возмущений и эффекты разных граничных условий, все они изучены при помощи конформно-полевого подхода и успешно сравнены с численными результатами и с экспериментом. Недавно возник более широкий класс конформных теорий – логарифмические конформные теории, предназначенные, в первую очередь, для описания некоторых неравновесных решеточных моделей. В частности, модель плотных полимеров, абелева модель песка и перколяционные модели являются решеточными реализациями логарифмических конформных теорий.

Логарифмические конформные теории поля (ЛКТП) изучены в меньшей степени и имеют более сложную структуру. Это, так или иначе, отражает сложность соответствующих решеточных моделей, основным свойством которых является нелокальный характер корреляций. В этом контексте может показаться странным, если не удивительным то, что решеточные модели с нелокальными свойствами могут описываться в непрерывном пределе при помощи локальных полей. По всей вероятности это свойство связано с наличием логарифмов в корреляционных функциях.

Двумерная абелева модель песка – это первый пример точно решаемой модели самоорганизованной критичности, для которой логарифмическая теория поля (с центральным зарядом $c = -2$) дает определенные предсказания для наблюдаемых величин. Некоторые из этих величин можно проверить при помощи прямых вычислений.

Статистическая механика жестких димеров на решетке представляет большой интерес для изучения многих физических систем и очень часто встречается в литературе. Изучение димерных моделей может пролить свет на термодинамику двухатомных газов, адсорбированных пленок, на классический предел моделей резонирующих валентных связей в высоко-

температурном сверхпроводнике. Модели плотно упакованных димеров на планарных решетках точно решаемы. Для них разработан довольно мощный математический аппарат перечисления конфигураций. Много интересных задач возникает при рассмотрении упаковок димеров с вакансиями. Наличие таких дефектов дает возможность димерам совершать дискретные передвижения, т.е. диффундировать.

Цель работы.

Целью настоящей диссертации является развитие уже существующих и создание новых аналитических методов исследования неравновесных решеточных моделей.

Научная новизна и практическая ценность.

Разработанные в диссертации методы могут служить основой для исследования широкого класса равновесных и неравновесных решеточных моделей. Точные аналитические решения процесса с полностью асимметричным исключением (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process, TASEP) в нестационарном режиме позволяют понять основные свойства и механизм релаксации неравновесных систем.

Асимптотики двухчастичных корреляционных функций двумерной абелевой модели песка предсказываются логарифмической конформной теорией поля (ЛКТП) с центральным зарядом $c = -2$. Наличие в них логарифмов указывает на сложный нелокальный характер моделей с самоорганизованной критичностью. Абелева модель песка – это первый пример, где логарифмические двухточечные корреляторы возможно вычислить точно.

Разработанный метод перечисления покрывающих паутин на квадратной решетке позволил аналитически изучить свойства подвижности вакансии в плотно упакованной модели димеров и вычислить основные диффузионные характеристики.

На защиту выдвигаются следующие результаты:

- Усовершенствован комбинаторный анзац Бете и разработан новый метод точного решения кинетического уравнения для процесса с полностью асимметричным исключением (Totally Asymmetric Exclusion Process, TASEP), основанный на технике взаимного сокращения множеств недопустимых и вспомогательных пространственно-временных траекторий частиц. На основе предложенного метода, найдено точное решение TASEP для случая, когда частицы движутся на кольце с разными вероятностями скачков. При помощи этого решения изучено поведение средней скорости частиц в нестационарном режиме и ее сходимость к стационарному значению. Найдены аналитические выражения стационарной скорости в случае с одинаковыми вероятностями прыжков частиц.

- При помощи техники перечисления Θ-графов вычислены парные корреляционные функции σ_{1a}, $a = 2, 3, 4$ абелевой модели песка. Этот результат подтверждает предсказания логарифмической теории поля, которые основаны на предположении о применимости конформной теории в непрерывном пределе.

- Разработан новый метод перечисления покрывающих паутин на квадратной решетке для перечисления димерных конфигураций с одной вакансией. Этот метод основан на внесении дополнительного дефекта, в виде конечного разреза на решетке. При помощи этой техники аналитически вычислены параметры подвижности вакансии, и подтверждены ранее полученные численные результаты.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на:

- International Colloquium on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-16) 2007, Praha, Czech Republic.

- Classical and Quantum Integrable Systems 2008, IHEP, Protvino, Russia.

- XII conference of young scientists and specialists 2008, JINR, Dubna, Russia.

- Семинаре отдела "Статистическая механика" Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, Дубна.

Публикации.

Диссертация написана на основании содержания работ [1–6].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Общий объем диссертации 86 страниц машинописного текста, включая 20 рисунков и список литературы из 98 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлен краткий обзор основных работ и результатов по теме точно решаемых решеточных моделей в статистической физике. Там же кратко описаны основные результаты, составляющие данную диссертацию.

В первой главе *"Асимметричный процесс с простым исключением"* даются определение класса моделей ASEP и описание основных методов точного решения.

Для изучения аналитических свойств точно решаемых моделей часто пользуются методом Бете. Его первое применение для точного решения ASEP было представлено Дхаром в виде краткого замечания. Далее, подробный расчет был приведен в плодотворной статье Гва и Шпона, где изучалось следующее за максимальным собственное значение оператора эволюции для больших решеток и было установлено степенное поведение спектральной щели. После этого удачного применения метода Бете, появились много интересных аналитических результатов.

В данной главе найдено решение TASEP с разными вероятностями прыжков частиц на кольце. Для нахождения этого решения потребовалось внести некоторые модификации в комбинаторный анзац Бете.

Точное аналитическое решение в нестационарном режиме позволяет изучать поток частиц на ранней стадии эволюции системы.

В системе с разными вероятностями прыжков частиц наблюдается явление конденсации частиц, которое ранее подробно было изучено в соответствующих процессах с нулевой дальностью взаимодействия (ZRP, zero range processes). В частности, самая медленная частица порождает макроскопическую пробку, которая в крупнозернистом масштабе проявляется в виде разрыва непрерывности плотности частиц.

В конце главы, где изучаются свойства TASEP в нестационарном состоянии, аналитически вычислена стационарная скорость потока частиц для случая с равными вероятностями прыжков для разных типов обновления состояния. Для этого было построено взаимно однозначное отображение этих задач на одномерную модель Поттса в представлении Фортуина и Кастелейна.

Для общего случая, когда вероятность прыжка частицы зависит от ее номера, предложена общая формула, которая позволяет делать численные вычисления для конкретных значений параметров. Ввиду сложности задачи, по всей видимости, невозможно найти точное аналитическое выражение для стационарной скорости в общем случае.

Во второй главе *"Абелева модель самоорганизованной критичности"* рассмотрена одна из важнейших моделей самоорганизованной критичности – абелева модель песка на двумерной решетке.

Конформная теория поля является мощным инструментом для описания классов универсальности критических двумерных моделей теории равновесной статистической механики. Критические экспоненты, корреляционные функции, конечно-размерный анализ, теория возмущений и эффекты разных граничных условий, все они изучены при помощи конформно-полевого подхода и успешно сравнены с численными результатами и с экспериментом. Недавно возник более широкий класс конформных теорий – логарифмические конформные теории, предназначенные, в первую очередь, для описания некоторых неравновесных решеточных моделей. В частности, модель плотных полимеров, абелева модель песка и перколяционные модели являются решеточными реализациями логарифмических конформных теорий.

Логарифмические конформные теории изучены в меньшей степени и имеют более сложную структуру. Это так или иначе отражает сложность соответствующих решеточных моделей, основным свойством которых является нелокальный характер корреляций. В этом контексте представляется удивительным тот факт, что решеточные модели с нелокальными свой-

ствами могут описываться в непрерывном пределе при помощи локальных полей. По всей вероятности, это свойство связано с наличием логарифмов в корреляционных функциях.

Двумерная абелева модель песка – это первый пример точно решаемой модели самоорганизованной критичности, для которой логарифмическая теория поля (с центральным зарядом $c = -2$) дает определенные предсказания для наблюдаемых величин. Некоторые из этих величин можно проверить при помощи прямых вычислений. В этой модели для единичной высоты вероятность

$$P_1 = \frac{2(\pi - 2)}{\pi^3}$$

и асимптотика парной корреляционной функции ($r \gg 1$)

$$\sigma_{11} = P_{11}(r) - P_1^2 \simeq -\frac{1}{2r^4}$$

на бесконечной решетке были вычислены С. Мажумдаром и Д. Дхаром. Для того, чтобы вычислить все остальные вероятности высот P_2, P_3 и P_4, В.Б. Приезжев разработал довольно сложную технику, основанную на перечислении Θ-графов. Он обнаружил, что несмотря на локальный характер переменных (высот) в модели самоорганизации, их представление посредством деревьев существенно нелокально, за исключением простейшего случая единичной высоты. Существенную роль в этих работах играла связь между разрешенными конфигурациями абелевой модели и покрывающими деревьями на решетке и теорема Кирхгофа о покрывающих деревьях на графе. Эта теорема представляет собой эффективный инструмент для вычисления статистических наблюдаемых абелевой модели песка. Более того, эта теорема обнаруживает также родство покрывающих деревьев с другими точно решаемыми моделями статистической механики, такими как модель Поттса, модель димеров, модель направленных полимеров и т.д.

Во второй главе сделан следующий шаг в изучении двумерной абелевой модели. В частности, была использована техника перечисления Θ-графов для вычисления парных корреляторов σ_{1a}, $a = 2, 3, 4$ одна высота из которых равна единице. Полученные результаты в точности совпадают с предсказаниями логарифмической теории поля:

$$\sigma_{1a} = P_{1a}(r) - P_1 P_a \simeq -c_a \frac{P_1^2}{2} \frac{\ln r}{r^4}, \qquad a = 2,3,4,$$

$$\sigma_{ab} = P_{ab}(r) - P_a P_b \simeq -c_a\, c_b \frac{P_1^2}{2} \frac{\ln^2 r}{r^4}, \qquad a,b = 2,3,4,$$

где

$$c_2 = 1, \quad c_3 = \frac{8-\pi}{2(\pi-2)}, \quad c_4 = -\frac{\pi+4}{2(\pi-2)}.$$

Парные корреляторы связаны с микроскопическими переменными, которые проявляют сильно нелокальный характер. Этим и объясняется наличие логарифмов в асимптотиках.

К сожалению, перечисляемые объекты, возникающие при вычислении других корреляторов σ_{ab}, $a,b = 2,3,4$ не представляются через Θ-графы и их, по-видимому, из-за серьезной топологической проблемы невозможно обобщить непосредственно.

В третьей главе *"Решеточная модель димеров"* рассмотрена двумерная решеточная модель димеров с одной вакансией. Вероятность найти конфигурацию с тем или иным множеством достижимых вакансией вершин имеет нетривиальное распределение. Поместив вакансию в центральной вершине квадратной нечетно-нечетной решетки, Дж. Боутиер и его сотрудники произвели численные вычисления на конечных решетках, а потом при помощи экстраполяции исследовали предел очень больших (или бесконечных) размеров решетки. Одна из основных характеристик, которая изучалась ими – это вероятность делокализации вакансии p_L на решетке $L \times L$, т.е. вероятность того, что все вершины решетки будут достижимы вакансией. Они нашли, что она падает как $p_L \sim L^{-1/4}$ для больших $L \gg 1$. При помощи этого результата была оценена вероятность $p(s)$ того, что число достижимых вершин будет равно s в бесконечном объеме: $p(s) \sim s^{-9/8}$, $s \gg 1$. Также были напрямую вычислены точные значения $p_L(s)$ для малых s и конкретных значений размера L. После численной экстраполяции, в пределе бесконечных размеров были получены вероятность полной блокировки вакансии $p(1) = 0.107\,864\,376\,269\,049\,511\,98(1)$ и вероятность того, что вакансия может сделать в точности один шаг:

$p(2) = 0.055\,905\,353\,801\,942(1)$. Более того, при помощи инвертора Плуффа, примененного к первым десяти цифрам числа $1/\sqrt{p(1)}$, авторы смогли предсказать значение $p(1)$, именно

$$p(1) = \frac{57}{4} - 10\sqrt{2} \tag{1}$$

Целью третьей главы является аналитическое изучение этой проблемы. Идея состоит в построении дефекта в виде конечного разреза на бесконечно большой решетке. Детерминант лапласиана полученной решетки генерирует все покрывающие паутины. После устремления длины разреза к бесконечности получаются разные характеристики системы. Этим методом, в частности, было подтверждено предсказание для $p(1)$, а для $p(2)$ найдено

$$p(2) \doteq \frac{1}{32}(72\,817\sqrt{2} - 102\,977), \tag{2}$$

Из-за того что в выражение для $p(2)$ входят большие целые числа, становиться понято, почему применение инвертора Плуффа становится невозможным. Вычисление детерминантов этих дефектов сводится к вычислению асимптотик детерминантов и миноров сингулярных матриц Тёплица.

В заключении кратко сформулированы полученные в диссертации результаты, которые и выносятся на защиту.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J.G. Brankov, Vl.V. Papoyan, V.S. Poghosyan, V.B. Priezzhev, Physica A **368**, 471-480 (2006).

[2] V.S. Poghosyan, V.B. Priezzhev, Markov Processes and Related Fields **14**, 233-254 (2008).

[3] V.S. Poghosyan, V.B. Priezzhev, Rep. Math. Phys. **61**, 239-246 (2008).

[4] V.S. Poghosyan, S.Y. Grigorev, V.B. Priezzhev, P. Ruelle, Phys. Lett. B **659**, 768-772 (2008).

[5] V.S. Poghosyan, V.B. Priezzhev, P. Ruelle, Phys. Rev. E **77**, 041130 (2008).

[6] В.С. Погосян, Известия НАН Армении, Физика, т. **40**, № 4, с. 235-238 (2005).

Получено 30 сентября 2008 г.