ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

17-2002-139

На правах рукописи
УДК 530.145; 51–72: 530.145

КОЧЕТОВ
Евгений Андреевич

ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ НА ОРБИТАХ ГРУПП

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 2002

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Г.В. Ефимов
доктор физико-математических наук, профессор А.И. Кириллов
доктор физико-математических наук, профессор Е.Т. Шавгулидзе

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Защита диссертации состоится "_____" ______________2002 г. на заседании диссертационного совета Д720.001.01 в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований по адресу г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "______"_______________2002 г.

Ученый секретарь совета
доктор физико-математических наук С.В. Голоскоков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Стандартное квантование с геометрической точки зрения есть квантование классической механики, заданной на классическом фазовом пространстве - кокасательном расслоении $M = T^*Q$ конфигурационного многообразия Q. Хотя Q может быть в принципе компактным многообразием, T^*Q - всегда некомпактно и имеет бесконечный объем. Оказывается, что локальные координаты на T^*Q всегда можно разделить на q^i и p^j, где "координаты" q^i есть максимальный набор вещественных коммутирующих переменных, а p^j сопряжены к ним относительно канонической скобки Пуассона.

Именно возможность такого разделения координат позволяет представить конфигурационный матричный элемент оператора эволюции системы как Фейнмановский интеграл по траекториям на фазовом (p, q) пространстве. Локальный диффеоморфизм $T^*Q \to TQ$ позволяет в стандартных случаях перейти затем к интегралу по траекториям на конфигурационном пространстве Q.

Хотя кокасательное расслоение всегда является симплектическим многообразием (т.е. на нем существует классическая механика), обратное утверждение не верно. Существует широкий класс симплектических многообразий - классических фазовых пространств важных для приложений квантовых систем - которые не являются кокасательными расслоениями. Важным примером таких многообразий являются орбиты коприсоединенного представления группы Ли G в дуальном пространстве алгебры.

Например, классическим фазовым пространством $su(2)$ спина[1] является $SU(2)$ орбита - сфера S^2. Такое многообразие не допускают разделения координат в целом на "q" и "p". Заменой глобального разделения переменных на "координаты" и "импульсы" является, в общем случае, задание некоторого интегрируемого лагранжева распределе-

[1]Классический "спин" описывается наблюдаемыми J_i^{cl}, $i = 1, 2, 3$ на фазовом пространстве со скобкой Пуассона $\{J_i^{cl}, J_j^{cl}\} = \epsilon_{ijk} J_k^{cl}$. Эти соотношения можно реализовать на 2-сфере, оснащенной канонической симплектической структурой. Так как сфера, будучи компактным многообразием, не является кокасательным расслоением к какому-либо конфигурационному многообразию, для спина не существует естественного перехода к конфигурационному представлению, и тем самым, спиновый пропагатор нельзя представить как стандартный Фейнмановский интеграл по траекториям на конфигурационном пространстве.

ния (поляризации) на M. На сфере S^2 удобно выбрать голоморфную (Кэлерову) поляризацию, при этом $su(2)$ когерентные состояния образуют базис квантового гильбертова пространства, а интеграл по траекториям для спинового пропагатора возникает как вариант геометрического квантования $SU(2)$ орбиты в терминах $su(2)$ когерентных состояний.

С более общей точки зрения, интегралы по траекториям на орбитах групп могут рассматриваться как вариант геометрического (в терминах элементов симплектической геометрии орбиты) квантования классической динамики, реализуемой на классическом фазовом многообразии - орбите группы Ли G в коприсоединенном представлении. Естественным образом такая конструкция возникает, если гамильтониан системы выражается через генераторы группы G, образующие алгебру $\mathrm{Lie}(G)$. В частности, операторы спина $\hat{J}_i$ замыкаются в алгебру $su(2) := \mathrm{Lie}(SU(2))$ относительно операции коммутирования.

С практической точки зрения, важность интегралов по траекториям на орбитах групп состоит в том, что они связывают конечномерные коприсоединенные представления G с унитарными неприводимыми представлениями $U_l(G)$ той же самой группы в квантовом гильбертовом пространстве и, тем самым, оказываются удобным инструментом для вычисления квазиклассической ($l \to \infty$) асимптотики соответствующих пропагаторов. Полное действие в экспоненте оказывается пропорциональным индексу представления l, что оправдывает применение метода стацфазы. Особенно важно, что эта техника дает возможность просто и надежно вычислять квазиклассическую асимптотику спиновых пропагаторов, что является в настоящее время актуальной задачей в связи с необходимостью корректного описания недавно (1999 г.) экспериментально обнаруженного явления туннелирования спинов в магнитных молекулярных кластерах. Именно $su(2)$ интеграл по траекториям стал отправной точкой для построения инстантонной техники для описания туннелирования спинов в молекулярных магнитах Fe_8 и определения точных условий, при которых возникает эффект топологического подавления туннельной амплитуды - явление, отсутствующее при туннелировании Шредингеровской частицы в потенциале.

Следует также подчеркнуть, что в квазиклассической области естественно использовать интеграл по *непрерывным* траекториям. Однако, до самого последнего времени считалось, что спиновый интеграл

по непрерывным тракториям дает неверные результаты для пропагаторов и поэтому необходимо работать с $su(2)$ интегралом в дискретном (по времени) представлении. С другой стороны, какие-либо конкретные вычисления, например, расчет туннельного перехода в дискретном представлении оказываются неоправданно сложными. Поэтому крайне актуальной является задача о восстановлении статуса спинового интеграла по непрерывным траекториям как хорошо определенного объекта и эффективного средства исследования спиновых систем в *квазиклассической* области.

Другой важной, с практической точки зрения, особенностью интегралов по траекториям на орбитах групп является то обстоятельство, что они задают представление квантовых пропагаторов в базисе фиксированного представления $U_l(G)$. Индекс представления l входит в действие просто как параметр. Потому нет необходимости вводить в теорию дополнительные констрэйнты, фиксирующие представление.

Например, для $t - J$ модели сильнокоррелированных электронов, гамильтониан которой является билинейной комбинацией генераторов $su(2|1)$ супералгебры, широко используемое слэйв-бозонное/фермионное представление предполагает с необходимостью, что число квантов возбуждений на каждом узле должно быть фиксировано.[2] Из физических соображений ясно, что точный учет такого констрэйнта имеет принципиальное значение. Как оказалось, разрешение этого констрэйнта в приближении среднего поля ведет к неконтролируемым ошибкам, в то время как его точный учет представляет собой сложную техническую проблему. С другой стороны, $su(2|1)$ интеграл для $t - J$ модели свободен от каких-либо констрэйнтов, содержит минимальное число динамических переменных и явно учитывает нетривиальную геометрию пространства траекторий - геометрию $SU(2|1)$ орбиты. Именно поэтому следует предположить, что этот новый, геометрический, подход к исследованию крайне сложной проблемы квантового описания системы сильно коррелированных электронов позволит получить принципиально новые результаты или, по крайней мере, критически оценить старые.

Цель диссертации состоит в исследовании квазиклассики квантовых пропагаторов, исходя из их представления как интегралов по непрерывным траекториям на орбитах групп Ли.

[2] Это условие соответствует фиксированию представления $su(2|1)$.

Научная новизна и практическая ценность.

Получено представление для $su(2)$ пропагатора как интеграла по непрерывным траекториям на классическом фазовом пространстве спина - орбите CP^1 - при этом внеинтегральные члены выражены через $su(2)$ Кэлеров потенциал. Подобное представление получено и для пропагатора общего вида как интеграла на G-однородном Кэлеровом многообразии. Впервые получена квазиклассическая асимптотика (включая предэкспоненту) для $su(2)$ пропагатора, и пропагатора общего вида, исходя из *непрерывного* представления для (спинового) интеграла по траекториям на орбите группы.

Показано, что характерная для спинового флуктуационного детерминанта $U(1)$ калибровочная аномалия приводит к появлению в пропагаторе дополнительной СК фазы (фазы Солари-Кочетова), которая имеет решающее значение для определения самосогласованным образом спинового интеграла по непрерывным траекториям, корректного вычисления его квазиклассической асимптотики и построения инстантонной техники для $su(2)$ спинового пропагатора. В частности, оказывается, что СК фаза объясняет происхождени Вейлевского сдвига для спина $j \to j + 1/2$ и фиксирует значения внешнего магнитного поля, при которых происходит т.н. топологическое подавление спинового туннелирования в магнитных молекулах Fe_8.

Впервые построена инстантонная техника для $su(2)$ спинов, которая применяется для описания эффекта туннелирования спинов в магнитных кластерах Fe_8.

Впервые получены корректные (с учетом внеинтегральных членов) выражения для интегралов по непрерывным траекториям для пропагаторов на супермногообразиях - орбитах простейших супергрупп $U(1|1)$ и $SU(2|1)$. Квантовый пропагатор и статсумма для $t-J$ модели записаны в форме $su(2|1)$ интеграла по траекториям на $SU(2|1)$ вырожденной орбите.

На основе этого представления показано, что в общем случае гамильтониан $t-J$ модели не сводится к функции $H(\vec{S}, f)$, где операторы $\vec{S}$ и f обозначают независимые ($[\vec{S}, f] = 0$) $SU(2)$ генераторы и бесспиновые фермионные поля, соответственно.

На защиту выдвигаются следующие результаты.

1. Квазиклассический пропагатор в базисе когерентных состояний представлен интегралом по непрерывным траекториям на орбите группы с действием, содержащим дополнительную 1-форму, которая выражается через Кэлеров потенциал орбиты. Показано, что эта форма определяет внеинтегральные члены, согласованные с граничными условиями.

2. Найдены замены переменных, позволяющие в замкнутом виде вычислять интегралы по траекториям для $su(2)$ и $su(1,1)$ пропагаторов в случае, когда квантовые гамильтонианы являются линейными комбинациями элементов соответствующих алгебр, с произвольными, зависящими от времени коэффициентами.

3. Построен новый (не операторный) вариант диаграммной техники в среднем поле для $su(2)$ ферромагнетика Гейзенберга, не использующий обобщенную теорему Вика для спиновых операторов.

4. Получена квазиклассическая асимптотика, включая предэкспоненту, для $su(2)$ спинового пропагатора. Показано, что предэкспоненциальный фактор содержит дополнительную фазу (фазу Солари-Кочетова), которая не появляется при вычислении стандартного Фейнмановского интеграла для частицы в потенциале. Показано, что при учете СК фазы $su(2)$ интеграл дает корректное выражение для пропагатора с точностью $O(j^0)$.

5. Квазиклассическая асимптотика получена для квантовых пропагаторов с гамильтонианами общего вида, построенными из генераторов простой компактной группы G, для представлений, определяемых максимально вырожденными G-орбитами ранга 1.

6. Сформулирована инстантонная техника для $su(2)$ спинов. В рамках построенной инстантонной техники описано явление туннелирования спинов в магнитных молекулах Fe_8. Найдены точные условия на значения внешнего магнитного поля, при которых происходит топологическое подавление туннелирования - эффект, не наблюдающийся в обычном туннелировании частицы в потенциале.

7. Квантовые пропагаторы в базисе $u(1|1)$ и $su(2|1)$ суперкогерентных состояний представлены интегралами по непрерывным траекториям на супермногообразиях - орбитах супергрупп $U(1|1)$ и

$SU(2|1)$. Показано, что внеинтегральные члены определяются соответствующими Кэлеровыми суперпотенциалами. Явно вычислен $u(1|1)$ интеграл для статсуммы модели Джейнса-Каммингса.

8. Техника $su(2|1)$ интеграла по траекториям применена для исследования $t-J$ модели сильнокоррелированных электронов. Показано, что $t-J$ гамильтониан не сводится в общем случае к полиномиальной функции независимых спиновых и голонных операторов.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, физфака МГУ, на семинарах в Университетах гг. Падуя и Неаполь (Италия), Эрланген и Фрайбург (Германия), Катовице и Краков (Польша), были представленыны на V Международной конференции "Path Integrals from meV to MeV" (Дубна, 1996), на VI Международной конференции "Path Integrals from peV to TeV" (Флоренция, Италия, 1998), на XXIII Международном семинаре "Group Theoretical Methods in Physics" (Дубна, 2000), на VII Международной конференции "Path Integrals from Quarks to Galaxies" (Антверпен, Бельгия, 2002).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 18 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав и заключения. Она содержит 200 страниц машинописного текста. Список литературы включает 137 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность проведенного в диссертации исследования. Представлен современный статус исследований и обзор литературы по тематике диссертации. Сформулирована цель работы и изложено ее краткое содержание.

В первой главе квантовый пропагатор в базисе обобщенных когерентных состояний, ассоциированных с алгеброй Lie(G), представлен интегралом по непрерывным траекториям на классическом фазовом многообразии M - ко-орбите G.

В (§1) рассматриваются геометрические свойства обобщенных когерентных состояний, и, в частности, когерентных состояний, ассоци-

ированных с $su(2)$ и $su(1,1)$ алгебрами и алгеброй Гейзенберга-Вейля. Показано, что квантовая геометрия когерентных состояний определяет структуру соответствующих интегралов по траекториям на орбитах групп. В этом параграфе, по-существу, вводятся необходимые для дальнейшего обозначения и определения.

С геометрической точки зрения, когерентные состояния $|z\rangle$, где z параметризуют точки орбиты M, являются сечениями главного $U(1)$ расслоения $P(M;U(1))$, при этом $U(1)$ 1-форма связности на P, известная как связность Берри, принимает вид

$$\Theta = i\langle z|d|z\rangle, \quad d\Theta = W,$$

где соответствующая кривизна W совпадает с симплектической 2-формой Кириллова-Костанта на орбите.

Естественная (Кэлерова) поляризация $\mathcal{P}$ определяется векторным полем $\partial_z := \partial/\partial z$, так что когерентные состояния $|z\rangle$ ковариантно постоянны вдоль $\bar{\mathcal{P}}$:

$$\nabla_{\bar z}|z\rangle = 0, \quad \nabla_{\bar z} := \partial_{\bar z} + i\Theta_{\bar z}.$$

Тем самым, когерентные состояния можно рассматривать как некоторую специфическую реализацию квантования методом орбит классического фазового пространства $(M;W)$.

В (§2) показано, что квантовый пропагатор в z-представлении

$$\langle z_F|T\exp\left\{-i\int_0^\tau H(t)dt\right\}|z_I\rangle \equiv \mathcal{K}(\bar z_F, z_I,;\tau), \tag{1}$$

с гамильтониан $H(t)$ - полиномиальной функцией генераторов простой группы Ли G с зависящими от времени коэффициентами - может быть представлен с помощью разложения единицы в базисе когерентных состояний интегралом по траекториям на G-орбите:

$$\mathcal{K} = \int_{z(0)=z_I}^{\bar z(\tau)=\bar z_F} D\mu \exp\Phi, \tag{2}$$

где

$$D\mu(z,\bar z) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N} d\mu(\bar z_n, z_n),$$

и $d\mu(\bar{z}, z)$ есть G-инвариантная мера на M.

Действие Φ состоит из кинетического члена

$$i \int \Theta = -\frac{1}{2} \int\limits_0^\tau \left(\dot{z} \frac{\partial F}{\partial z} - \dot{\bar{z}} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) dt,$$

известного как фаза Берри или $1D$ член Весса - Зумино (с геометрической точки зрения - это голономия, ассоциированная со связностью Θ), а также классической функции Гамильтона и внеинтегрального члена Γ: $\Phi = S + \Gamma$, где

$$S = i \int \Theta - i \int\limits_0^\tau H^{cl}(\bar{z}, z) dt,$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left[F(\bar{z}_F, z(\tau)) + F(\bar{z}(0), z_I) - F(\bar{z}_F, z_F) - F(\bar{z}_I, z_I) \right],$$

при этом Кэлеров потенциал F связан с когерентными состояниями соотношением

$$F(\bar{z}_1, z_2) = \log \frac{\langle z_1 | z_2 \rangle}{\langle z_1 | 0 \rangle \langle 0 | z_2 \rangle}, \qquad (3)$$

и классический гамильтониан $H^{cl}(\bar{z}, z)$ является ковариантным (Виковским) символом квантового оператора H:

$$H^{cl}(\bar{z}, z) = \langle z | H | z \rangle, \quad \langle z | z \rangle = 1.$$

Показано, что именно внеинтегральный член Γ корректным образом определяет граничные условия в классических уравнениях движения.

В (§3) рассмотрены частные случаи соотношения (2). Для системы $su(2)$ когерентных состояний в представлении j, для которого

$$F_{su(2)}(\bar{z}, z) = 2j \log(1 + \bar{z}z), \quad l = 2j \in N,$$

спиновый пропагатор представлен как интеграл по траекториям на $SU(2)$ орбите - комплексной проективной прямой $CP^1 \cong S^2$:

$$\mathcal{K}_j(\bar{z}_F, z_I; \tau) = \int_{z(0)=z_I}^{\bar{z}(\tau)=\bar{z}_F} D\mu(z) \frac{(1 + \bar{z}_F z(\tau))^j (1 + \bar{z}(0) z_I)^j}{(1 + |z_F|^2)^j (1 + |z_I|^2)^j} \times$$
$$\exp\left(j \int_0^\tau \frac{\dot{\bar{z}}(t) z(t) - \bar{z}(t) \dot{z}(t)}{1 + \bar{z}(t) z(t)} dt - i \int_0^\tau H^{cl}(\bar{z}(t), z(t)) dt \right), \qquad (4)$$

где

$$d\mu_j = \frac{2j+1}{2\pi i} \frac{dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Аналогичное соотношение получено для представлений дискретной серии некомпактной группы $SU(1,1)$. При этом $su(1,1)$ пропагатор возникает как интеграл по траекториям на $SU(1,1)$ орбите - открытом диске $D_1 = |z| < 1$ - стереографической проекции на плоскость верхней полости гиперболоида.

Найдены явные замены переменных, позволяющие вычислять интегралы по траекториям для $su(2)$ и $su(1,1)$ пропагаторов, при условии, что соответствующие гамильтонианы являются элементами $su(2)$ и $su(1,1)$ алгебр с произвольными зависящими от времени коэффициентами. Такие замены индуцируются действием оператора Ad_g, приводящим соответствуюшие гамильтонианы к картановской форме. Показано, что результаты вычислений совпадают с результатами непосредственных расчетов на временной "решетке".

Во второй главе рассмотрено применение $su(2)$ интеграла по траекториям для исследования квантовой нелинейной спиновой системы - магнетика Гейзенберга.

В (§1) статсумма системы представлена в виде $su(2)$ интеграла по траекториям.

В (§2) это представление использовано для вывода выражения для статсуммы $Z_0[\vec{\psi}]$ системы невзаимодействующих спинов в произвольном зависящем от времени внешнем поле $\vec{\psi}$. А именно, с помощью замены переменных в $su(2)$ интеграле, рассмотренной в предыдущей главе, для статсуммы получено представление

$$\log Z_0[\vec{\psi}] = \sum_i \log \frac{\sinh(j + \frac{1}{2}) \int_0^\tau dt \Omega_i(t)}{\sinh \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \Omega_i(t)}, \qquad (5)$$

где

$$\Omega_i(t) = \psi_i^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \bar{\psi}_i(t) z_i(t) + \frac{1}{2} \psi_i(t) \bar{z}_i(t)$$

и функции z и $\bar{z}$ зависят от $\vec{\psi}$ как решения уравнений Рикатти

$$(\frac{d}{dt} - \psi^{(0)}) z - (\bar{\psi}/2) z^2 + \psi/2 = 0, \quad z(0) = z(\tau),$$

$$(\frac{d}{dt} + \psi^{(0)}) \bar{z} + (\psi/2) \bar{z}^2 - \bar{\psi}/2 = 0, \quad \bar{z}(0) = \bar{z}(\tau). \qquad (6)$$

Представление (5-6) оказывается удобным отправным пунктом при построении спиновой (не операторной) диаграммной техники в среднем поле.

В качестве другого примера применения техники $su(2)$ интеграла в (§3) сформулирован геометрический вывод нелинейной σ-модели как эффективного низкоэнергетического действия для квантового $1D$ антиферромагнетика Гейзенберга. Особенность этого подхода состоит в том, что он может быть непосредственно применен для исследования квазиклассического поведения квантовых решеточных систем с гамильтонианами, построенными из генераторов (супер)алгебр Ли более общих, чем операторы su(2) спина. В частности, показано, что эффективное длинноволновое действие для $t-J$ модели в суперсимметричной ($t=2J$) точке определяется свойствами только одной функции - $SU(2|1)$ ковариантного Кэлерова суперпотенциала.

В третьей главе рассмотрена квазиклассическая асимптотика $su(2)$ интеграла по траекториям (4), интегралов общего вида (2), и обсужден смысл и значение дополнительной СК поправки в соответствующих пропагаторах.

Исходя из континуального представления $su(2)$ интеграла (4), в (§1) получено выражение для спинового аналога детерминанта ван Флека и вычислена ($j \to \infty$) асимптотика $su(2)$ пропагатора, включая предэкспоненциальный фактор. Результат имеет вид

$$\mathcal{K}_{sc}(\bar{z}_F, z_I; \tau) = \exp(\Phi_c + \frac{i}{2}\int_0^\tau A_c dt) \times \left[\frac{(1+|z_c(\tau)|^2)(1+|z_c(0)|^2)}{2j}\,\frac{\partial^2\Phi_c}{\partial\bar{z}_F\partial z_I}\right]^{1/2}, \qquad (7)$$

где индекс "c" означает, что значение соответствующей величины вычисляется на экстремалях полного действия. Функция $A(\bar{z}, z)$ определяется классическим гамильтонианом и геометрией на CP^1. Показано, что формула (7) корретным образом воспроизводит известные точные результаты, согласуется с обобщением теоремы Дьюстермаата-Хекмана и позволяет эффективным образом находить асимптотики в нетривиальных случаях.

В (§2) исследована асимптотика

$$\mathcal{K} = e^{l(\cdots)}[(\cdots) + o(1)], \quad l \to \infty,$$

интеграла по траекториям общего вида (2), где $(\cdots)$ обозначает l-независимую функцию на фазовом пространстве. Квазиклассический пропагатор определяется тогда как

$$\mathcal{K}_{sc} = e^{l(\ldots)}(\cdots)$$

и принимает вид

$$\mathcal{K}_{sc} = \left[\frac{1}{[g(\bar{z}_c(\tau), z_c(\tau))\, g(\bar{z}_c(0), z_c(0))]^{1/2}}\,\frac{\partial^2\Phi_c}{\partial\bar{z}_F\partial z_I}\right]^{1/2} \times \exp\left(\Phi_c + \frac{i}{2}\int_0^\tau A_c dt\right), \qquad (8)$$

где

$$A_c := \frac{1}{2}\partial_z\left[g^{-1}\partial_{\bar{z}}H\right]|_c + \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}\left[g^{-1}\partial_z H\right]|_c,$$

и метрический тензор $g = \partial^2_{\bar{z}z}F$. Соотношение (7) является частным случаем (8).

Предэкспоненциальный фактор (т.е. член, отличный от $\exp(\Phi_c)$) в пропагаторе (8) возникает как результат вычисления флуктуационного детерминанта. Оказывается, что этот детерминант обладает характерной $U(1)$ калибровочной аномалией, которая делает его значение неопределенным. Эта неопределенность может быть устранена обращением к соответствующей дискретной форме интеграла по траекториям, что фиксирует необходимую для вычисления интеграла калибровку и приводит к появлению в пропагаторе дополнительной СК фазы $(i/2)\int Adt$, отсутствующей в квазиклассическом Фейнмановском пропагаторе.

Важный результат состоит в том, что именно эта фаза, по-сути дела, восстанавливает статус интеграла по непрерывным траекториям в квазиклассической области. А именно, квазиклассический пропагатор (8) имеет правильную асимптотику при $\tau \to 0$ до порядка $O(\tau^2)$ включительно и удовлетворяет условию "сшивания". Из этих двух свойств следует, что формула (8) корректна с точностью $O(l^0)$ равномерно по времени. Другими словами, формальное континуальное представление (2) корректно при условии, что рассмотрение ограничивается вычислением лидирующего и следующего за лидирующим вкладов в квазиклассическую асимптотику.

В (§3) формула (8) обобщена для исследования квазиклассики квантовых пропагаторов на максимально вырожденных орбитах (орбитах ранга 1) простых компактных групп Ли. Такие орбиты могут иметь комплексную размерность > 1, но по-прежнему, вырожденное представление группы G, построенное по такой орбите, определяется единственным индексом.

Содержанием четвертой главы является формулировка инстантонного приближения к вычислению непрерывного по времени интеграла по траекториям (2) в квазиклассическом ($l \to \infty$) пределе. Получена простая и удобная в приложениях инстантонная формула для сдвига классически вырожденного основного уровня энергии квантовой (спиновой) системы вследствие туннельных эффектов. При этом существенно, что предэкспоненциальный множитель получается с той же степенью легкости, что и для Шредингеровской частицы в потенциальном поле.

Важно подчеркнуть, что стандартная инстантонная техника для описания туннелирования Шредингеровской частицы в потенциале не может быть непосредственно применена к оценке интеграла по траекториям (2) в квазиклассическом пределе, что связано со спецификой последнего как интеграла на фазовом многообразии с действием, включающем топологический член Весса-Зумино, а также наличием калибровочной аномалии флуктуационного оператора Якоби. Учет этих особенностей требуют определенной модификации стандартного подхода.

В (§1) получена формула для туннельного расщепления уровней для квантовой системы с пропагатором общего вида (2). Показано, что учет СК фазы необходим для правильного определения асимптотик инстантонных решений. Кроме того, СК поправка явным образом входит в выражение для энергии основного состояния системы.

В (§2) приведен подробный вывод формулы для расчета энергии основного состояния с учетом туннелирования для квантовых $su(2)$ спиновых систем — наиболее важного с точки зрения практических приложений случая. При этом ряд утверждений из предыдущего параграфа формулируется в развернутом виде в приложении к спиновым системам, а также используется несколько новых технических приемов, что в конечном итоге позволяет получить простую и удобную формулу для расчета эффектов туннелирования для спиновых систем. В частности, оказывается, что учет СК фазы явным образом приводит к Вейлевскому сдвигу квазиклассического параметра $j \to j + 1/2$, необходимому для получения правильной асимптотики. Обычно, такой сдвиг рассматривается как необходимая модификация, не следующая, однако, из самой теории. В качестве иллюстрации эффективности метода вычисляется туннельный сдвиг основного уровня в модели Липкина-Мешкова-Глика.

В (§3) построенная инстантонная техника применена для описания недавно (1999 г) экспериментально обнаруженного эффекта туннелирования спинов в магнитных молекулах Fe_8. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = k_1 \hat{J}_z^2 + k_2 \hat{J}_y^2 - h \hat{J}_z,$$

где $k_1 \approx 0.33K > k_2 \approx 0.22K > 0$, $\hat{\vec{J}}$ есть операторы $su(2)$ спина в представлении j, и h — внешнее магнитное поле. Найдено туннельное расщепление основного уровня системы как функция внешнего поля. Аналитические расчеты согласуются с экспериментальными данными.

Показано, что значения внешнего магнитного поля, для которых происходит полное подавление туннельных переходов (эффект, не наблюдающийся при туннелировании частицы в потенциале), определяются вкладом топологического члена Весса-Зумино и СК фазы. Роль СК фазы состоит в том, что она компенсирует $O(1/j)$ поправки, возникающие от вклада топологического члена, и тем самым полностью фиксирует условия, при которых туннелирование исчезает.

В пятой главе дано определение суперкогерентных состояний и интегралов по траекториям для простейших супергрупп - $U(1|1)$ и $SU(2|1)$, являющихся группами симметрии для квантовооптической модели Джейнса-Каммингса (ДК) и $t - J$ модели сильнокоррелированных электронов, соответственно.

(§1) Построен и вычислен $u(1|1)$ интеграл по траекториям для статсуммы ДК модели.

(§2) Рассмотрено обобщение геометрического подхода к построению континуальных интегралов по траекториям на орбитах супергрупп. В частности показано, что непреывное по времени действие, входящее в интегральное представление пропагатора на суперорбитах, содержит внеинтегральные члены, выражающиеся через Кэлеров суперпотенциал, которые обеспечивают согласованность классических уравнений движения и граничных условий.

(§3) Вычислен лидирующий (в квазиклассическом разложении) вклад в $su(2|1)$ пропагатор в приближении стацфазы для $su(2|1)$ интеграла. Показано, что в случае, когда гамильтониан системы является линейной комбинацией $SU(2|1)$ генераторов с произвольными коэффициентами, этот результат является точным и может быть получен с помощью замены переменных — движения $SU(2|1)$ метрики. В случае, когда коэффициенты произвольным образом зависят от времени, задача сводится к решению уравнений Рикатти на супермногообразии $CP^{1|1}$.

В шестой главе техника $su(2|1)$ интегралов по траекториям применена для исследования $t-J$ модели, описывающей квантовую систему сильно коррелированных электронов на пространственной решетке. С формальной точки зрения гамильтониан $t-J$ модели является билинейной формой от $su(2|1)$ генераторов, и тем самым орбита супергруппы $SU(2|1)$ выступает как естественное классическое фазовое пространство для данной модели. Квантовый пропагатор или статсумма для $t-J$ модели записывается в форме $su(2|1)$ интеграла по траекториям на вырожденной орбите $CP^{1|1} = SU(2|1)/U(1|1)$. Важный момент состоит при этом в том, что характерный для данной модели и крайне чувствительный к аппроксимациям локальный констрэйнт, запрещающий двукратное заполнение узлов электронами, учитывается в технике $su(2|1)$ интеграла автоматически.

На основе использования этой техники в (§1) показано, что, в общем случае, не существует преобразования $H_{t-J} \to H(\vec{S}, f)$, где операторы $\vec{S}$ и f обозначают независимые ($[\vec{S}, f] = 0$) $SU(2)$ (спиновые) генераторы и бесспиновые фермионные (голонные) поля, соответственно. В (§2), для модели Хаббарда с $U = \infty$, что соответствует $t-J$ модели с $J = 0$, $su(2|1)$ интеграл для статсуммы вычислен в квазиклассическом (для больших индексов $su(2|1)$ представления) приближении. Получено хорошее согласие с численными расчетами.

В заключении дана сводка основных результатов, полученных в диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. E.A. Kochetov "$U(1|1)$ coherent states and a path integral for the Jaynes-Cummings model", J. Phys. **A25**, (1992), pp. 411-417.

2. E.A. Kochetov "Supercoherent states in the models of quantum optics", Laser Physics **2**, (1992), pp. 770-774.

3. E.A. Kochetov "Path integral for coherent states of the dynamical U_2 group and $U_{2|1}$ supergroup", J. Phys. **A26**, (1993), pp. 3489-3501.

4. E.A. Kochetov " $SU(1,1)$ coherence-preserving Hamiltonians: a path-integral approach", Phys. Lett. **A180**, (1993), pp. 383-387.

5. E.A. Kochetov "Path integrals in the models of quantum optics with the $SU(1,1)$ dynamical symmetry", Laser Physics **4**, (1994), pp. 136-138.

6. E.A. Kochetov "Path integrals over generalized coherent states", J. Math. Phys. **36**, (1995), pp. 1666-1672.

7. E.A. Kochetov "$SU(2)$ coherent-state path integral", J. Math. Phys. **36**, (1995), pp. 4667-4679.

8. E.A. Kochetov "$SU(2)$ coherent-state path integral for the Heisenberg ferromagnet", Phys. Rev. **B52**, (1995), pp. 4402-4408.

9. E.A. Kochetov and V.S. Yarunin "Coherent-state path integral for a transition amplitude: a theory and applications", Physica Scripta **51**, (1995), pp. 46-53.

10. E.A. Kochetov "Path-integral formalism for the supercoherent states" Phys. Lett. **A217**, (1996), pp. 65-72.

11. E.A. Kochetov "Quasiclassical dynamics in a generalized phase space: a path-integral approach" Proc. Int. Conf. "Path integrals from meV to MeV" (Dubna, May 27-31, 1996), Dubna 1996, pp. 107-117.

12. E.A. Kochetov and V.S. Yarunin "Representation of the $t-J$ model via spin-charge variables", Phys. Rev. **B56**, (1997), pp. 2703-2711.

13. E.A. Kochetov "Quasiclassical path integral in coherent-state manifold", J. Phys. **A31**, (1998), pp. 4473-4492.

14. E.A. Kochetov, V.S. Yarunin and M. Zhuravlev "Adiabatic approximation for localized electrons in periodic Anderson model", Physica **C296**, (1998), pp. 298-306.

15. E.A. Kochetov "Coherent-state path integral associated with $su(2|1)$ superalgebra: application to the $U = \infty$ Hubbard model", Proc. Int. Conf. "Path integrals from peV to TeV" (Florence, 25-29 Aug. 1998), World Scientific, 1999, pp. 418-421.

16. E.A. Kochetov Comment on "Semiclassical dynamics of a spin 1/2 in an arbitrary magnetic field", J. Phys. **A33**, (2000), pp. 3523-3525.

17. E.A. Kochetov "Geometric derivation of nonlinear sigma model for the $1D$ Antiferromagnet", Physics of Atomic Nuclei **12**, (2001), pp. 2037-2040.

18. A. Garg, E.A. Kochetov, K-S. Park and M. Stone "Spin coherent-state path integrals and the instanton calculus", cond-mat/0111139, 2001, to appear in J. Math. Phys.

Получено 14 июня 2002 г.