

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

17-2001-99

На правах рукописи
УДК 531.19

П-425

ПОВОЛОЦКИЙ
Александр Маркович

ЛАВИННЫЕ ПРОЦЕССЫ
В ТЕОРИИ САМООРГАНИЗОВАННОЙ КРИТИЧНОСТИ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2001

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.
Н.Н. Боголюбова Объединённого института ядерных исследований

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Приезжев В.Б.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Письмак Ю.М.
кандидат физико-математических наук
Спирidonов В.П.

Ведущая организация: Институт проблем передачи информации
РАН

Защита состоится 27.06. 2001 г. в 15 часов на заседании
диссертационного совета К720.001.01 в Лаборатории теоретической
физики им. Н.Н. Боголюбова Объединённого института ядерных ис-
следований, г.Дубна Московской области

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ

Автореферат разослан 23.05. 2001 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета



Федотов С.И.

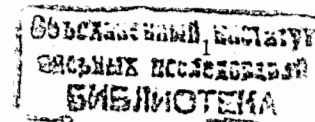
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Лавинная динамика это основной сценарий релаксации неустойчивых состояний в экстремальных системах, где каждый подвижный элемент находится около порога стабильности. Типичное распределение лавин, имеющее характерное степенное убывание, ведет к возникновению дисперсного потока частиц, вовлеченных в лавину. Многие физические явления, такие как распространение фронтов возбуждений или землетрясения могут рассматриваться в терминах лавинной динамики.

Характерный пример систем с лавинной динамикой - гранулярные системы, которые непосредственно порождают прерывистые лавины, поддерживающие равновесие в системе. В 1987 г. П.Бак, Ч.Танг и К.Визенфельд предложили теорию самоорганизованной критичности для объяснения поведения таких систем. Согласно этой теории, неравновесные гранулярные системы могут естественным образом эволюционировать к определенному критическому состоянию, в котором они теряют характерные масштабы как длины, так и времени, т.е. их корреляционный радиус становится равным бесконечности, а корреляционные функции имеют степенные асимптотики. Это критическое состояние не зависит от начального состояния системы, и, в отличие от обычных критических явлений, не требует никакой точной подгонки параметров. При этом лавинные процессы играют роль механизма, удерживающего систему в критическом состоянии, на протяжении всего процесса системы.

С точки зрения изучения лавинных процессов, интерес представляет нахождение характеристик как лавин в целом, так и динамики отдельных компонентов системы. Трудность исследования систем с лавинной динамикой связана со сложным многочастичным характером лавинных процессов. В настоящее время существует множество экспериментальных свидетельств в пользу того, что некоторые характеристики, такие как критические индексы распределений размеров лавин, проявляют свойство универсальности, т.е. одинаковы для широких классов явлений, отличающихся деталями взаимодействия. Поэтому создание точнорешаемых прототипов таких систем и методов их упрощённого описания представляется актуальным.

Цель работы. Целью настоящей диссертации является развитие уже существующих и создание новых аналитических методов исследования моделей лавинной динамики.



Научная новизна и практическая ценность.

Разработанные в диссертации методы могут быть использованы для исследования широкого класса моделей лавинной динамики. Полученные в диссертации результаты позволяют понять основные свойства лавинных процессов и могут служить основой для дальнейших исследований в этом направлении. Предложенные в диссертации точнорешаемые модели являются основой для более глубокого понимания механизмов лавинной динамики.

На защиту выдвигаются следующие результаты.

-Основное кинетическое уравнение асимметричного лавинного процесса проинтегрировано с помощью анзаца Бете. Вычислена средняя скорость лавинного процесса в термодинамическом пределе как функция взаимодействия и плотности частиц. Определено положение критической точки на фазовой диаграмме.

-Аналитически вычислены значения критических экспонент, характеризующих распределение продолжительности первых лавин, и найден закон зависимости среднеквадратичного смещения от времени в рекуррентном и транзиентном состояниях модели эйлеровых блужданий. С помощью численного моделирования получены критические экспоненты распределения и числа посещенных узлов для лавин общего положения.

-Построена ренормгрупповая схема для вычисления критических экспонент граничных лавин для открытой и закрытой границы на квадратной решётке в модели Бака-Танга-Вейзенфельда. Получены ренормгрупповые оценки для критических экспонент на треугольной решётке.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре отдела "Статистическая механика" Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, Дубна.

семинаре кафедры теоретической физики СПбГУ, Санкт-Петербург; семинаре отдела физики конденсированных сред Института Стефана, Любляна, Словения;

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-5].

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Общий объем диссертации 88 страниц машинописного текста, включая 23 рисунка и список литературы из 53 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор развития основных проблем, затронутых в диссертации, а также описаны структура диссертации и ее основные результаты.

В первой главе "Асимметричный лавинный процесс" дается определение модели асимметричного лавинного процесса и ставится основная проблема вычисления семиинвариантов распределения длины пути, пройденного частицей. Модель сформулирована как система p частиц, блуждающих на решётке из N узлов с циклическими граничными условиями. Если в момент времени t в любом узле находится не более одной частицы, то каждая частица независимо совершает направленное пуассоновское блуждание, т.е. за малый интервал времени dt частица в узле x_k с вероятностью dt переходит в узел $x_k + 1$. Такой медленный пуассоновский процесс продолжается до тех пор, пока две частицы не займут один узел. Если это произошло, узел становится нестабильным, и начинают действовать правила быстрой лавинной динамики. Лавина развивается дискретными шагами, и в масштабе пуассоновского времени происходит мгновенно. Если на некотором шаге релаксационного процесса в узле i оказалось $n > 1$ частиц, на следующем шаге релаксация может происходить двумя способами:

- i) с вероятностью μ_n ($0 \leq \mu_n < 1$) - n частиц переходит из узла i в узел $(i + 1)$;
- ii) с вероятностью $(1 - \mu_n)$ - $n - 1$ частиц переходит из узла i в узел $(i + 1)$.

Быстрый релаксационный процесс продолжается до тех пор, пока все узлы не станут стабильными, т.е. в любом из них будет не более одной частицы. При таких динамических правилах средние параметры движения частиц являются функцией плотности $\rho = p/N$. Условие интегрируемости модели требует, чтобы все вероятности μ_n выражались через единственный параметр $\mu \equiv \mu_2$, и удовлетворяли рекуррентному соотношению

$$\mu_n = (1 - \mu)\mu_{n-1} \quad (1)$$

Если вероятности μ_n не стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, существует критическое значение плотности при котором средняя скорость частиц обращается в бесконечность. Первая глава диссертации посвящена вычислению средней скорости частиц, в зависимости от плотности ρ и

параметра взаимодействия μ и нахождению критической точки на фазовой диаграмме.

Для вычисления семиинвариантов распределения суммарного пути, пройденного частицами, рассматривается производящая функция

$$F(C) = \sum_{Y=0}^{\infty} e^{\gamma Y} P(Y, C), \quad (2)$$

где $P(Y, C)$ – совместная вероятность конфигурации C и пройденного пути Y . Её зависимость от времени определяется основным кинетическим уравнением марковского процесса

$$\partial_t F(x_1, \dots, x_p) = e^{\gamma} \sum_{i=1}^p F(\dots, x_i - 1, \dots) - pF(x_1, \dots, x_p), \quad (3)$$

в котором взаимодействие учитывается с помощью наложения специальных граничных условий

$$F(\dots, x, x, \dots) = (1 - \mu)e^{\gamma} F(\dots, x - 1, x, \dots) + \mu e^{2\gamma} F(\dots, x - 1, x - 1, \dots). \quad (4)$$

Здесь через (x_1, \dots, x_p) обозначены координаты частиц на решётке, расположенные в порядке возрастания, задание которых полностью определяет текущее состояние системы. В кинетическое уравнение (3) входят только вероятности стабильных состояний. При этом, граничные условия, имеющие смысл рекуррентных соотношений, выражают нефизические члены $F(\dots, x, x, \dots)$ через вероятности стабильных конфигураций, где все частицы занимают разные узлы. Их последовательное применение даёт возможность учесть все возникающие лавинные процессы и включить их в вероятности переходов. Теперь искомые средние и, в частности, скорость выражаются через производные по γ от максимального собственного значения $\Lambda(\gamma)$ уравнения (3).

$$v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y(t) \rangle}{t} = \left. \frac{1}{p} \frac{d\Lambda}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} \quad (5)$$

Решение уравнения (3) ищется в виде функции Бете

$$F(x_1, \dots, x_p) = e^{\Lambda t} \sum_{\sigma_{(1, \dots, p)}} A(z_{\sigma_1}, \dots, z_{\sigma_p}) z_{\sigma_1}^{-x_1} \dots z_{\sigma_p}^{-x_p}, \quad (6)$$

где суммирование подразумевается по всем перестановкам $\sigma_{(1, \dots, p)}$ индексов $1, 2, \dots, p$. Подстановка решения в уравнение (3) дает выражение для собственного значения

$$\Lambda(\gamma) = e^{\gamma} \sum_{i=1}^p z_i - p \quad (7)$$

а требование совместности граничных условий (4) и периодических граничных условий задаёт систему нелинейных алгебраических уравнений Бете, которым должны удовлетворять "квантовые числа" z_i

$$z_k^N = (-1)^{p-1} \prod_{j=1}^p \frac{1 - (1 - \mu)e^{\gamma} z_k - \mu e^{2\gamma} z_j z_k}{1 - (1 - \mu)e^{\gamma} z_j - \mu e^{2\gamma} z_j z_k} \quad (8)$$

Следующий шаг сводится к вычислению максимального собственного значения $\Lambda\gamma$. Технически, это ни что иное, как вычисление суммы по корням системы уравнений Бете. Поскольку уравнения Бете не могут быть решены в явном виде, для этого применяется процедура, основанная на следующих свойствах решения, соответствующего максимальному собственному значению. Нетрудно проверить, что при $\gamma \rightarrow 0$ все корни z_i , отвечающие максимальному собственному значению $\Lambda(0) = 0$, стремятся к единице, что соответствует стационарному состоянию марковского процесса, в котором все конфигурации оказываются равновероятными. При отклонении γ от нуля зависимость решения от γ оказывается неаналитической $z_i \sim 1 + O(\gamma^{1/p})$. Благодаря этому, в термпределе $N \rightarrow \infty$, $\rho = const$, решения оказываются на конечном расстоянии от единицы при γ сколь угодно близком к нулю. Однако, собственное значение $\Lambda(\gamma)$ оказывается аналитично по γ , из-за того, что все неаналитические члены его разложения выпадают при суммировании по всем корням в формуле (7). Таким образом, корни уравнений Бете в термпределе образуют плотный контур конечного радиуса, благодаря чему после замены переменных $z_k = (1 - x_k)/(1 + \mu x_k)e^{-\gamma}$ и логарифмирования, уравнения Бете могут быть записаны в виде интегрального уравнения для плотности корней $R(x)$ вдоль контура

$$p_0(x) = -i\pi\rho + \gamma + \int_{\Gamma} \Theta(y/x) R(y) dy, \quad (9)$$

где

$$p_0(x) = \ln \left(\frac{1 - x}{1 + \mu x} \right), \quad \Theta(y/x) = \ln \left(\frac{x + \mu y}{y + \mu x} \right). \quad (10)$$

При этом мнимая часть функции $\Theta(y/x)$ выбрана меняющейся от 0 до 2π , а $p_0(x)$ от $-\pi$ до π , что даёт решение, соответствующее максимальному собственному значению.

Единственный случай уравнения (9), поддающийся аналитическому решению, соответствует замкнутому контуру Γ , концы которого $x_0 =$

\bar{x}_0 лежат на отрицательной части действительной оси. Тогда уравнение (9) имеет единственное решение, аналитическое в окрестности $x = 0$, удовлетворяющее условию нормировки $\int_{\Gamma} R(x) = \rho$ и соответствующее $\gamma = 0$

$$R_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\rho}{x} + \frac{1}{1-x} \right) \quad (11)$$

Для того чтобы отойти от значения $\gamma = 0$, необходимо рассмотреть разомкнутый контур Γ концы которого имеют малую мнимую часть $x_0 = |x_0|e^{i(\pi-\epsilon)}$. Предполагая разложимость $R(x)$ в ряд по ϵ , можно решать уравнение (9) по теории возмущений, используя функцию (11) как нулевое приближение. Для вычисления первой производной $\Lambda(\gamma)$ по γ необходимо решить уравнение до того порядка по ϵ , который даёт в них первый не исчезающий вклад. А именно, в разложении плотности $R(x)$ первый порядок отсутствует и существенными оказываются члены второго и третьего порядка по ϵ . При этом γ оказывается пропорционально ϵ^3 . Значение $\Lambda(\gamma)$ может быть вычислено из (7) с заменой суммы на интеграл по Γ с плотностью

$$\frac{\Lambda(\gamma)}{N} = -(\mu + 1) \int_{\Gamma} \frac{xR(x)}{1 + \mu x} dx, \quad (12)$$

и тоже оказывается порядка ϵ^3 . После этого вычисление скорости сводится к взятию предела $v = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Lambda(\gamma)/\gamma\rho$:

$$v = \frac{(1-\rho)(1+\mu)}{(1-\rho(1+\mu))^2} + \frac{1+\mu}{\mu\rho} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\mu^{2s}}{1-(-\mu)^s} \left(\frac{\rho}{\rho-1} \right)^s. \quad (13)$$

Из полученного выражения для средней скорости видно, что скорость становится бесконечной в критической точке

$$\rho_c = \frac{1}{1+\mu} \quad (14)$$

а при приближении к плотности к критическому значению ведет себя как

$$v \sim |\rho - \rho_c|^{-\nu}, \quad \nu = 2. \quad (15)$$

Кроме того, средняя скорость лавинного процесса может трактоваться как среднее число частиц переносимых лавиной. Поэтому критическая экспонента ν характеризует закон изменения среднего размера лавины вблизи критической точки.

Во второй главе "Модель эйлеровых блужданий" исследовано блуждание частицы в среде с памятью, которое, несмотря на одночастичный характер, проявляет характерные черты лавинной динамики. Исследование модели позволяет проследить эволюцию среды при самоорганизации.

Модель эйлеровых блужданий формулируется как частица, блуждающая на произвольном графе G , из каждого узла которого выходит стрелка, направленная вдоль одного из исходящих рёбер. Рёбра, выходящие из каждого узла, пронумерованы. Каждый раз приходя в некоторый узел частица поворачивает стрелку, направляя её вдоль следующего ребра, в соответствии с порядком определённым нумерацией рёбер, и делает шаг вдоль нового направления стрелки. Такие динамические правила обеспечивают специальную структуру блуждания. Если на графе G нет точек стока, блуждание частицы в конце концов входит в эйлеров цикл, в течение которого частица проходит по каждому ребру графа только один раз в каждом направлении. Если же на графе определён сток, т.е. узел без стрелки, при достижении которого частица покидает систему, то после попадания частицы в сток в случайный узел графа добавляется новая частица, которая продолжает блуждать по тем же правилам. После многократного добавления частиц множество стрелочных конфигураций, остающихся на решётке после достижения частицей стока, сужается до подмножества рекуррентных конфигураций, на котором можно определить группу операторов добавления частицы в узел. Эта группа обладает свойством абелевости и в точности совпадает с группой аналогичных операторов в теории абелевой модели "sanpile". Из свойств этой группы следует, что число рекуррентных конфигураций равно

$$N = \det \Delta, \quad (16)$$

где Δ – матрица дискретного лапласиана на графе. Кроме того, из сохранения числа частиц следует, что ожидаемое число посещений узла i частицей, начавшей блуждание в узле j , даётся функцией Грина уравнения Лапласа на графе

$$G_{ij} = [\Delta^{-1}]_{ij}. \quad (17)$$

Формула (16) совпадает с формулой Кирхгоффа для числа покрывающих деревьев. Это совпадение не случайно. Так же как и для абелевой модели "sanpile", множество рекуррентных конфигураций мо-

дели эйлеровых блужданий находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством покрывающих деревьев. Действительно, каждый раз блуждая по решётке, частица выстраивает стрелки вдоль траектории своего блуждания. Поскольку все частицы в конце концов покидают граф, стрелочные конфигурации остающиеся на решётке не содержат циклов, т.е. ребра вдоль которых направлены стрелки образуют покрывающее дерево графа. По аналогии с абелевой моделью "saprile", в модели эйлеровых блужданий вводятся лавины как периоды нарушения рекуррентной конфигурации. Поскольку рекуррентное подмножество состоит из ациклических стрелочных конфигураций, лавины можно также определить как период существования стрелочных циклов которые могут быть созданы частицей в процессе её блуждания.

Основные результаты второй главы относятся к блужданию частицы на квадратной решётке, причём изменение направления всех стрелок происходит до следующего ребра по часовой стрелке. При таком выборе динамических правил удаётся доказать, что замкнув петлю из стрелок, частица не покидает площади ограниченной петлёй пока все стрелки в узлах, принадлежащих ограниченной петлёй области, не сделают полный оборот, а направление петли не изменится на противоположное. Поэтому продолжительность лавины и число посещённых за время лавины узлов асимптотически пропорциональны площади замыкаемой петли. Для первой лавины распределение этих величин определяется вероятностью замкнуть петлю площади s , добавив случайно выбранное ребро к покрывающему дереву, при условии, что место замыкания присоединено к стоку на покрывающем дереве путём, не проходящим по рёбрам, принадлежащим петле.

$$P(s) \sim s^{-2} \quad (18)$$

Этот результат справедлив только для лавин, возникающих сразу после добавления частицы на решётку. Критические экспоненты τ_s и τ_l характеризующие распределение продолжительности и числа посещённых узлов для лавин общего положения получены с помощью численного моделирования методом Монте-Карло:

$$\tau_s = \tau_l = 1.75 \pm 0.05 \quad (19)$$

Для модели с изменёнными правилами поворотов стрелок, где стрелка проходит сначала оба вертикальных ребра а затем оба горизонталь-

ных, эти значения равны

$$\tau_l = 1.72 \pm 0.05, \quad \tau_s = 1.8 \pm 0.05. \quad (20)$$

Кроме лавинной динамики, мы также исследовали блуждание частицы на решётке. Было показано, что в рекуррентном состоянии блуждание частицы можно разделить на стадии, за каждую из которых частица посещает 4 раза узлы некоторой компактной области, причём область, посещённая 4 раза на предыдущей стадии блуждания, оказывается строго вложена в неё. Таким образом, скорость увеличения числа посещений со временем пропорциональна площади посещённой области

$$\frac{dN}{dT} \sim -\frac{1}{R^2}, \quad (21)$$

а зависимость ожидаемого числа посещений от радиуса даётся, в соответствии с формулой (17), функцией Грина уравнения Лапласа на плоскости

$$\frac{dN(R)}{dR} \sim -\frac{1}{R}, \quad (22)$$

откуда получаем асимптотику зависимости среднеквадратичного смещения частицы от времени

$$\langle R^2 \rangle \sim T^{2\nu}, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad (23)$$

что совпадает с законом диффузии для случайного блуждания. Соответствующий закон блуждания частицы на случайной стрелочной конфигурации оказывается другим:

$$\langle R^2 \rangle \sim T^{2\nu_t}, \quad \nu_t = \frac{1}{3}, \quad (24)$$

в связи с тем, что стрелки вне посещённой области не скоррелированы, и, поэтому, приращение области не зависит от её радиуса. Отсюда видно, что при самоорганизации среда изменяется таким образом, чтобы сделать удаление частицы с решётки наиболее эффективным.

В третьей главе "Исследование моделей самоорганизованной критичности с помощью пространственной ренормгруппы" исследуется применение ренормгруппы к модели Бака-Танга-Вейзенфельда (БТВ). Модель БТВ это решеточный автомат, определённый на решётке, к каждому узлу i которой приписана целочисленная величина Z_i (число

частиц). На каждом шаге к случайно выбранному узлу добавляется частица, что повышает Z_i на единицу. Если при этом высота узла превысит критическую высоту Z_c , равную координационному числу K для данной решётки, происходит релаксация нестабильного узла, при которой в каждый соседний узел переходит по одной частице. В принципе, могут быть сформулированы стохастические правила осыпания, при которых в соседние узлы переходит различное число частиц с различными вероятностями. В результате релаксации узла соседние узлы могут стать нестабильными и возникает лавина последовательных осыпаний. В процессе эволюции система стремится к критическому состоянию, в котором корреляционная длина устремляется к бесконечности, а распределение лавин проявляет свойства самоподобия.

На использовании самоподобия и основано применение ренормализационной группы к модели БТВ. Крупномасштабная динамика модели описывается в терминах крупномасштабной решётки с ячейками размером b^k . Каждая ячейка характеризуется двумя наборами величин $\vec{P}(k) = (P_1, \dots, P_K)$ и $\mathbf{n}(k) = (n_1, \dots, n_K)$. Первый из них $\vec{P}(k)$ даёт вероятности процессов, в которых крупномасштабная ячейка релаксирует в $1, \dots, K$ направлениях. Второй соответствует вероятностям, с которыми крупномасштабная ячейка ведёт себя при добавлении частицы как узел начальной решётки, в котором находятся $1, \dots, K$ частиц.

Шаг ренормгруппы производится с помощью объединения четырёх ячеек масштаба b^k в одну ячейку масштаба b^{k+1} . Для написания уравнений ренормгруппы необходимо выразить величины $\vec{P}(k+1)$ и $\mathbf{n}(k+1)$ через соответствующие величины на масштабе k . Для $\vec{P}(k+1)$ это можно сделать прямым перечислением процессов осыпаний четырёх ячеек масштаба k , с учётом правила покрытия, разрешающего рассматривать только процессы распространяющиеся на масштаб $k+1$. Для $\mathbf{n}(k+1)$ такой процедуры не существует, и приходится использовать среднеполевую обратную связь, извлеченную из условия стационарности кинетических уравнений, описывающих ветвящиеся процессы превращений крупномасштабных частиц при осыпаниях. Полученные уравнения имеют единственную устойчивую точку при $k \rightarrow \infty$.

В диссертации проведена ренормгрупповая процедура у открытой и закрытой границ квадратной решётки. Отличие расчёта на открытой

границе от расчёта в объёме состоит в том, что перенормированная ячейка составлена из четырёх неэквивалентных ячеек, одна из которых обладает свойствами объёмных ячеек, две граничных, и одна, заменяющая открытую границу, поглощает все попадающие в неё частицы. У закрытой границы, в расчёт принимаются ячейки двух сортов, объёмные и граничные, отличающиеся количеством направлений выхода частиц, и, соответственно, критической высотой Z_c .

Значения $\mathbf{n}(k)$ в устойчивой точке могут трактоваться как концентрации узлов с соответствующими высотами. В таблице 1 представлено сравнение ренормгрупповых результатов с аналитическими значениями полученными для абелевой модели.

Вид параметров	Метод получения	n_A	n_B	n_C	n_D
В объёме	РГ	0.0205	0.134	0.349	0.496
	Точные	0.0736	0.174	0.306	0.446
Открытая граница	РГ	0.118	0.264	0.306	0.313
	Точные	0.104	0.0.217	0.316	0.363
Закрытая граница	РГ	0.0514	0.305	0.643	
	Точные	0.113	0.318	0.568	

Таблица 1: Вероятности высот в критическом состоянии, на бесконечной решетке и на решетках с границей. Сравняются результаты РГ подхода, и аналитического расчета проведенного для абелевой модели.

Кроме того ренормгрупповая процедура проведена для модели БТВ на плоской треугольной решётке. Численные и ренормгрупповые результаты для вероятностей высот в объёме на треугольной решётке представлены в таблице(2).

	n_1^*	n_2^*	n_3^*	n_4^*	n_5^*	n_6^*
РГ	0.036	0.135	0.197	0.209	0.210	0.210
Численные	0.054	0.092	0.139	0.188	0.240	0.281

Таблица 2: Численные и ренормгрупповые результаты для вероятностей высот в объёме на треугольной решётке.

Из параметров устойчивой точки ренормгруппы могут быть получены значения критических экспонент описывающих распределение

площади лавины. Для этого вероятность \mathcal{K} лавины распространившейся на масштабе b^k и закончившейся на масштабе b^{k-1} должна быть выражена как через параметры устойчивой точки $\bar{P}(\infty)$ и $p(\infty)$, так и через асимптотическую форму распределения площади лавин $P(s) \sim s^{-\tau} ds$, что даёт связь

$$\tau = 1 - \frac{1 \ln(1 - \mathcal{K})}{2 \ln b}. \quad (25)$$

Полученные значения критических экспонент

	РГ	Точное значение.
В объеме, квадратная решётка	$\tau = 1.248$	$\tau = 1.25$
В объеме, треугольная решётка	$\tau = 1.366$	$\tau = 1.25$
Открытая граница	$\tau_o = 1.48$	$\tau_o = 1.5$
Закрытая граница	$\tau_c = 1.23$	не известно

позволяют говорить о том, что наилучший результата соответствует открытой границе, что естественно, так как граничная лавина единственная из лавин, свойства которой могут быть представлены как свойства чисто двумерного объекта.

В заключении кратко сформулированы полученные в диссертации результаты, которые выносятся на защиту.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V.B. Priezhev, E.V. Ivashkevich, A.M. Povolotsky, cond-mat/0012507.
- [2] E.V. Ivashkevich, A.M. Povolotsky, A. Vespignani, S. Zapperi, Phys.Rev.E, v.60, N.2 (1999) 1239
- [3] A.M. Povolotsky, V.B. Priezhev, R.R Shcherbakov, Phys.Rev.E, v.58, N.5 (1998) 5449
- [4] Vl.V. Papoyan, A.M. Povolotsky, Physica A 246 (1997) 241-252
- [5] R.R. Shcherbakov, Vl.V. Papoyan, A.M. Povolotsky, Phys.Rev. E **55**, 3686 (1997)

Рукопись поступила в издательский отдел
17 мая 2001 года.