

17 - 12549

E-739

ЕРМИЛОВ  
Александр Николаевич

НЕКОТОРЫЕ СТРОГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ  
В ТЕОРИИ МОДЕЛЬНЫХ  
КВАНТОВО-СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 01.04.02. - теоретическая  
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на физическом факультете  
Московского государственного университета.

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук  
профессор

Н.Н.Боголюбов(мл.).

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук  
старший научный сотрудник

В.К.Федянин,

кандидат физико-математических наук  
старший научный сотрудник

В.Ф.Клепиков.

Ведущая организация  
Ленинградский государственный университет.

Защита состоится " " \_\_\_\_\_ 1979 г. в " " час.  
на заседании Специализированного ученого совета К-047.01.01.  
Лаборатории теоретической физики Объединенного института  
ядерных исследований, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан " " \_\_\_\_\_ 1979 г.

Ученый секретарь Совета

В.И.Журавлев.

Актуальность темы. Невозможность точного решения задачи многих взаимодействующих частиц стимулировала в статистической физике развитие модельного подхода, в рамках которого учитываются лишь наиболее существенные для исследуемой проблемы взаимодействия. В то же время стремление наиболее точно и полно отразить свойства реальной физической системы в модельной задаче приводит к значительному математическому усложнению последней. Поэтому в большинстве физически интересных задач с необходимостью применяются приближенные и качественные методы, например, различные варианты теории возмущений. К сожалению, вопрос о правомерности того или иного приближения остается, как правило, открытым, и даже в таком подходе нет уверенности в адекватности получаемых решений рассматриваемой модельной задаче.

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Именно поэтому в современной статистической механике существенное внимание уделяется так называемым точно решаемым моделям и развитию методов строгого исследования статистических систем в целом. Это в свою очередь обуславливает использование мощных математических методов при изучении многочастичных систем. По существу, в настоящее время сформировалась и интенсивно развивается новая область теоретической физики — математическая статистическая механика. Одной из наиболее важных задач математической статистической механики и является развитие методов, позволяющих получать строгие результаты для модельных задач, возникающих в физике многих взаимодействующих частиц.

Цель работы состоит в разработке методов строгого исследования квантовых систем многих взаимодействующих частиц и их применении к задачам теории конденсированного состояния.

Научная новизна и практическая ценность. В работе впервые исследовано поведение решений задачи минимакса в процессе перехода к термодинамическому пределу и их связь с решениями минимаксной задачи для предельной функции свободной энергии. Впервые проанализировано соотношение понятий термодинамической эквивалентности статистических систем по Вентцелю и термодинамической эквивалентности в смысле совпадения наблюдаемых. Предложена новая формулировка метода аппроксимирующих гамильтонианов, допускающая его прямое применение к исследованию систем, заданных объемом и средним числом частиц. Впервые проведенное математичес-

ки строгое исследование моделей с перекрестным взаимодействием позволяет рассматривать статистические системы нового типа.

Практическая ценность полученных результатов состоит в том, что они расширяют аппарат строгих методов исследований систем многих взаимодействующих частиц в теории конденсированного состояния. Так, на основе разработанных методов в работе получено точное решение  $s-d$  обменной модели ферромагнетиков Вонсовского-Зинера. Исследована термодинамика сверхпроводников с магнитными примесями. Обоснована практическая возможность создания соединений, в которых имеет место сосуществование сверхпроводимости и ферромагнетизма. Эти результаты могут быть использованы в прикладных исследованиях сверхпроводящих и ферромагнитных систем.

Структура диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав и заключения и содержит 149 страниц. Список литературы содержит 52 наименования.

Содержание работы. Во введении обоснована актуальность темы диссертации в целом и отдельных рассмотренных в ней задач, отмечена новизна полученных результатов. Сделан обзор методов строгого исследования модельных квантово-статистических систем.

Первая глава посвящена общим вопросам исследования модельных систем с взаимодействием обоих знаков.

Для произвольных ограниченных операторов доказано существование решения минимаксной задачи для функции свободной

энергии аппроксимирующего гамильтониана как при конечном объеме, так и для предельной функции свободной энергии и исследовано его поведение в процессе термодинамического перехода. Исследованы общие свойства свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана как функции вариационных параметров и свойства решений минимаксной задачи для предельной функции свободной энергии.

Рассмотрены два способа аппроксимации систем, содержащих отрицательные и положительные компоненты взаимодействия, и сформулированы условия, при которых эти аппроксимации являются точными в термодинамическом пределе.

Доказано, что для минимаксной задачи общего вида термодинамическая эквивалентность в смысле Вентцеля модельного и аппроксимирующего гамильтонианов автоматически позволяет вычислять гиббсовские средние системы на основе аппроксимирующего гамильтониана. Полученные результаты дают возможность при исследовании модельных систем ограничиваться лишь доказательством совпадения в термодинамическом пределе свободных энергий. Строго обоснован способ вычисления точных значений наблюдаемых термодинамических параметров как решений минимаксной задачи для предельной функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана.

Показано существование соответствующим образом определенных квазисредних, значения которых находятся исходя из функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана.

Во второй главе рассмотрены особенности аппроксимации систем, заданных объемом и средним числом частиц.

В настоящее время метод аппроксимирующих гамильтонианов

разработан для прямого применения к большому каноническому ансамблю, когда в роли известных термодинамических параметров системы выступают объем  $V$  и химический потенциал  $\mu$ . Чтобы использовать его при рассмотрении систем, заданных другими способами, приходится вводить эти параметры (обычно  $\mu$ ) на основе дополнительных физических соображений или вычислять их с помощью аппроксимирующего гамильтониана. Поскольку схемы таких вычислений являются далеко не очевидными, назрела необходимость их обоснования и модификации метода аппроксимирующих гамильтонианов для прямого применения в рамках других термодинамических конкретизаций. В гл.2 это сделано для систем, заданных объемом и средним числом частиц.

В третьей главе исследован класс многочастичных систем с перекрестным взаимодействием, включающий в себя ряд физически интересных моделей.

Для построения аппроксимирующего гамильтониана в исходный модельный гамильтониан вводятся дополнительные члены с положительным параметром включения  $\epsilon$ , что дает возможность путем замены операторных переменных выделить члены с отрицательными и положительными компонентами взаимодействия. Тем самым найден способ преобразования исходной модельной задачи к математически более простой, но ей эквивалентной, позволивший использовать основную теорему об аппроксимации Боголюбова(мл.), а также результаты гл.1 для получения оценок для разности термодинамических параметров. Чтобы вычислить точные значения термодинамических параметров системы исходного модельного гамильтониана, достаточно перейти к пределу  $\epsilon \rightarrow +0$  в соответствующих выражениях для аппроксимирующего гамильтониана.

В дальнейшем (§ 2) предложенная схема исследования модельных систем с перекрестным взаимодействием развита таким образом, что для получения точного в термодинамическом пределе решения нет необходимости прибегать к рассмотрению аппроксимирующего гамильтониана и вообще каких-либо величин, включающих параметр  $\epsilon$ . Окончательные результаты сформулированы в виде, явно выражающем их независимость от  $\epsilon$ . Таким образом, дополнительные члены, вводимые в исходный гамильтониан, играют лишь вспомогательную роль.

В результате применения указанной схемы доказан ряд теорем о поведении в термодинамическом пределе свободной энергии и гиббсовских средних.

Исследован также частный случай сепарабельного взаимодействия, для которого получены явные оценки для разности свободных энергий.

В четвертой главе рассмотрены некоторые возможные применения разработанных выше методов к задачам теории конденсированного состояния.

В последние годы в физике твердого тела наблюдается растущий интерес к теоретическому исследованию термодинамических систем, сверхпроводимость в которых сочетается с другими свойствами, отсутствующими у традиционных сверхпроводников, такими как сегнетоэлектричество или ферромагнетизм, или испытывающих, наряду со сверхпроводящим, структурный фазовый переход. Этот интерес стимулирован поиском путей повышения в соединениях, обладающих этими свойствами, температуры сверхпроводящего перехода и критических полей и воз-

можностями применения явлений сосуществования в технике. Кроме того, исследования в этом направлении имеют и самостоятельное теоретическое значение.

Изучение совместного существования сверхпроводимости и ферромагнетизма заслуживает внимания как в чисто теоретическом аспекте, так и с точки зрения возможных его технических применений. В этой связи важную задачу представляет определение условий, при которых возможно возникновение ферромагнитного упорядочения в сверхпроводящей фазе. Однако вопрос — действительно ли сверхпроводимость и ферромагнетизм, два антагонистических по своей сути явления, могут сосуществовать — является до сих пор окончательно не решенным в связи с весьма различающимися результатами, полученными при помощи различных методов исследования. Таким образом, математически строгий подход к проблеме сосуществования сверхпроводимости и ферромагнетизма представляется в настоящее время наиболее актуальным.

Строгий анализ этого явления проведен в гл. 4 на основе результатов, полученных при исследовании систем с перекрестным взаимодействием (гл. 3), с использованием методов, разработанных в гл. 1 и 2. Рассмотрение проведено на основе модели сверхпроводника с магнитными примесями, являющейся комбинацией модели БКШ-Боголюбова и  $s-d$  обменной модели Вонсовского-Зинера. В такой системе имеет место конкуренция двух типов взаимодействия: взаимодействие между электронами проводимости и локализованными магнитными моментами пытается разбить куперовские пары, т.е. стремится уничтожить сверхпроводимость, в то время как само образование куперовских пар подавляет

поляризацию электронного газа, т.е. стремится разрушить ферромагнитное упорядочение.

Получены точные уравнения для параметров порядка и выражение для функции свободной энергии. На их основе изучены возможные состояния и фазовые переходы в системе. Доказано, что сосуществование сверхпроводимости и ферромагнетизма имеет место.

Получено точное решение  $s-d$  обменной модели ферромагнетиков. В частности, найдено значение критической температуры и исследовано поведение намагниченностей подсистем электронов проводимости и локализованных магнитных моментов.

В заключение перечислим основные результаты, полученные в работе.

1. В общем случае доказано существование задачи минимакса и исследованы свойства свободной энергии соответствующего аппроксимирующего гамильтониана как функции вариационных параметров.

2. Доказана сходимостъ в термодинамическом пределе решения минимаксной задачи при конечном объеме к решению минимаксной задачи для предельной функции свободной энергии.

3. Рассмотрены два способа аппроксимации систем, содержащих отрицательные и положительные взаимодействия, и найдены условия, при которых эти аппроксимации являются точными в термодинамическом пределе.

4. Обоснована схема точного в термодинамическом пределе вычисления статистических средних.

5. Для минимаксной задачи общего вида дано полное определение кваэисредних и найдены их точные значения.

6. Рассмотрены особенности аппроксимации систем, заданных объемом и средним числом частиц.

7. Исследован класс систем с перекрестным взаимодействием. Доказан ряд теорем о поведении в термодинамическом пределе свободной энергии и статистических средних динамических величин.

8. Получено точное решение модели магнетиков Вонсовского-Зинера.

9. Исследованы возможные состояния и фазовые переходы в сверхпроводниках с магнитными примесями. Доказано, что сосуществование сверхпроводимости и ферромагнетизма имеет место.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Всесоюзном семинаре по методам статистической механики (Баку, 1976 г.), VI Советско-американском симпозиуме по физике твердого тела (Бостон, США, 1976 г.), Международном симпозиуме по избранным проблемам статистической механики (Дубна, 1977 г.), Международной школе молодых ученых по статистической механике (Ядвисин, ПНР, 1977 г.), Международной школе молодых ученых по теории конденсированного состояния (Лез Уш, Франция, 1978 г.).

Публикация. Результаты диссертации опубликованы в II печатных работах.

I. Н.Н.Боголюбов(мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. Класс точно решаемых моделей с перекрестным взаимодействием. I.Апро-

- кеймация гамильтониана. Сообщение ОИЯИ, Р17-9774, Дубна, 1976.
2. Н.Н.Боголюбов(мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. Класс точно решаемых моделей с перекрестным взаимодействием. II. Некоторые неравенства для функции свободной энергии. Сообщение ОИЯИ, Р17-9775, Дубна, 1976.
  3. Н.Н.Боголюбов(мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. Класс точно решаемых моделей с перекрестным взаимодействием. III. Асимптотическое поведение функции свободной энергии. Сообщение ОИЯИ, Р17-9776, Дубна, 1976.
  4. А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. Вычисление термодинамических средних в рамках метода Н.Н.Боголюбова(мл.) для систем с перекрестным взаимодействием. Сообщение ОИЯИ, Р17-10240, Дубна, 1976.
  5. А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. Вычисление термодинамических средних в рамках метода Н.Н.Боголюбова(мл.) для минимаксной задачи общего вида. Сообщение ОИЯИ, Р5-10237, Дубна, 1976.
  6. A.N.Ermilov, A.M.Kurbatov. Asymptotic Exact Studying Model Problems with Interactions of Several Subsystems. В сб. Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики, Д17-10529, Дубна, 1977.
  7. А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. Метод Н.Н.Боголюбова(мл.) для  $(V, \mathcal{N})$ -систем. Сообщение ОИЯИ, Р5-10245, Дубна, 1976.
  8. А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. Аппроксимация гамильтониана для  $(V, \mathcal{N})$ -систем. Теоретическая и математическая физика, т. 37, № 2, стр. 258-264, 1978.
  9. Н.Н.Боголюбов(мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. К вопросу

о сосуществовании сверхпроводимости и ферромагнетизма.

I. Предельное поведение свободной энергии. Сообщение ОИЯИ, Р17-9772, Дубна, 1976.

10. Н.Н.Боголюбов(мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. К вопросу о сосуществовании сверхпроводимости и ферромагнетизма. II. Параметры порядка. Сообщение ОИЯИ, Р17-9773, Дубна, 1976.
11. N.N.Bogolubov, Jr., A.N.Ermilov, A.M.Kurbatov. Phase Transitions in Superconducting Alloys with Magnetic Impurities. В сб. Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики, Д17-10529, Дубна, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел  
14 июня 1979 года.