ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П. Шураньи

1627

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОМПЛЕКСНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА К УРАВНЕНИЮ БЕТЕ-СОЛЬПИТЕРА

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1964

П. Шураньи

1627

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОМПЛЕКСНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА К УРАВНЕНИЮ БЕТЕ-СОЛЬПИТЕРА

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1964

В последнее время многие авторы занимаются исследованием асимптотического поведения амплитуд. Работы Редже [1] показали, что этот вопрос тесно связан с аналитическими свойствами амплитуд в плоскости комплексного углового момента (ℓ - плоскость). В то время, как метод Редже легко применяется к уравнению Шредингера, в теории поля не удалось найти природу особенностей в ℓ -плоскости, несмотря на то, что из-за перекрестной симметрии этот метод имеет здесь еще большее значение. Как известно, существование ведущего (в смысле - первого справа) полюса в ℓ -плоскости дало бы асимптотическое поведение типа $f(t)s^{at}$ при $s \to \infty$, где $s = E^2$, E - полная энергия двух частиц в системе центра инерции, t - передача импульса. К такому поведению приводит двухчастичное приближение в перекрестном канале [2] или квазиоптический метод [3] в предположении, что спектральные функции в ядрах интегральных уравнений убывают достаточно быстро. Но, к сожалению, реальные теории, по крайней мере простые модели, не удовлетворяют этому условию. Помимо этого, расчеты по методу двухчастичного приближения сильно осложняются при распространении на случай многих частиц [4].

По нашему мнению, самое удобное средство исследования аналитических свойств в ℓ -плоскости - это уравнение Бете-Сольпитера(БС), обладающее следующими достоинствами:

1) ковариантность,
2) ренормируемость,
3) ядро уравнения легко получается в данном порядке теории возмущений,
4) на языке диаграмм ясно, какой класс диаграмм суммируется уравнением.

Первой важной работой, использующей уравнение БС с целью исследования аналитических свойств в ℓ -плоскости, была работа Ли и Сойера [5], в которой рассмотрено взаимодействие скалярных мезонов в "лестничном" приближении.

Запишем уравнение БС в формальном виде:

$$T_\ell = K_\ell + K_\ell \frac{1}{f} T_\ell \quad , \qquad (1)$$

где T_ℓ -парциальная амплитуда рассеяния, K_ℓ -ядро уравнения, $\frac{1}{F}$ -функция распространения двух свободных частиц. Тогда ядро для модели [5] удовлетворяет условию [6]

$$|K_\ell \frac{1}{F}| < \infty \quad . \qquad (2)$$

Условие (2) позволяет использовать метод Фредгольма, так что легко доказывается мероморфность амплитуды T_ℓ в полуплоскости $Re\ell > -3/2$ и существование ведущего полюса Редже.

Однако в случае более реальных теорий (рассеяние псевдоскалярных мезонов, рассеяние скалярных мезонов посредством обмена векторными мезонами) оказалось, что в низшем приближении теории возмущений условие (2) не выполняется. В этих случаях Сойер [7] пытался найти ведущую особенность в ℓ – плоскости, разлагая отдельные диаграммы в асимптотический ряд и суммируя первые члены асимптотических разложений. Но этот метод обладает следующими недостатками:

1) Неясно, дает ли сумма "младших" членов асимптотического разложения особенность в ℓ -плоскости, лежащую вправо от особенности, определяемой суммой "старших" членов. Это чаще всего проявляется в тех случаях, если ряд "младших" членов расходится (особенность по константе связи).

2) Положение особенности определяется только в приближении слабой связи.

3) Вообще говоря, можно найти только ведущую особенность.

Чтобы избежать трудностей упомянутого метода, исследовано уравнение БС [8-10] без использования асимптотических разложений и разработан метод нахождения особенностей в ℓ –плоскости для уравнений, не принадлежащих к фредгольмовскому классу.

Диссертация посвящена исследованиям результатов этих и дальнейших работ в этой области.

В первой главе диссертации приводится обзор основных работ и достижений в области применения метода комплексных угловых моментов. Особое внимание обращено на методы нефеноменологического характера, такие как N/D [2,4] и квазиоптический метод [3]. Перечислены их преимущества и трудности.

Вторая глава посвящена выводу уравнения БС [11] для амплитуды рассеяния в импульсном представлении:

$$T(p,q|E) = K(p,q|E) + \int d^4p' K(p,p'|E) \times \frac{1}{(p+\frac{1}{2}E)^2-\mu^2}\,\frac{1}{(p-\frac{1}{2}E)^2-\mu^2}\,T(p',q|E), \tag{3}$$

где T – амплитуда рассеяния, K –итерируемая диаграмма, 4-векторы p, q, E определены следующим образом:

$$p_1 = p + \frac{E}{2}, \quad p_3 = q + \frac{E}{2},$$
$$p_2 = -p + \frac{E}{2}, \quad p_4 = -q + \frac{E}{2}$$

(здесь p_1 и p_2 –импульсы частиц в начальном состоянии, а p_3, p_4 – импульсы в конечном состоянии).

Далее приведены различные результаты, получаемые с помощью уравнения БС, и результаты работы Ли и Сойера[5], где авторы уже исследуют аналитические свойства решения в плоскости углового момента.

Дано определение обсуждаемых моделей, относящихся к классу, в котором ядро K представимо (с возможными вычитаниями) в виде:

$$K(p,p'|E) = \int_{\mu_0^2}^{\infty} \frac{d\mu^2\, \rho(\mu^2, E)}{(p-p')^2 - \mu^2} . \tag{4}$$

Обсуждается связь между асимптотическим поведением функции $\rho(\mu^2, E)$ по μ^2 и условием (2)[8,10]. При наличии вычитаний в выражении (4) дан метод решения уравнения (3) в два шага. При этом возможны два сорта связанных состояний:

1) регулярные, спин которых есть непрерывная функция массы (полюса Редже);
2) сингулярные, определенные лишь для некоторого значения углового момента.

В третьей главе развит метод разложения по четырехмерным сферическим гармоникам в применении к уравнению БС. Выражение $K(p,p'|E)$ (4) легко разложимо по сферическим гармоникам:

$$K(p,p'|E) = \sum_{n\ell m} Z^{m*}_{n\ell}(\hat{p})\, Z^{m}_{n\ell}(\hat{p}') \times \tag{5}$$

$$\int_0^{\infty} r^3\, dr\, \frac{J_n(pr)}{pr}\, V(r)\, \frac{J_n(p'r)}{p'r} ,$$

$$V(r) = \int_{\mu_0}^{\infty} d\mu\cdot \mu^3 \rho(\mu^2, E)\, \frac{K_1(\mu r)}{\mu r} . \tag{5a}$$

Разложение по 4-мерным сферическим гармоникам применимо просто в случае $E=0$. Тогда уравнение (3) переписывается в форме одномерного дифференциального уравнения в конфигурационном пространстве:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2-1}{r^2} - m^2\right]^2 G_n(r,r') = \tag{6}$$

$$= \frac{\delta(r-r')}{r^3} + V(r)\, G_n(r,r') ,$$

где n -собственное значение 4-мерного углового момента. Уравнение (6) пригодно для определения особенностей, положение которых не зависит от E.

Разложение (5) позволяет найти связь между асимптотическим поведением по p и поведением функции Грина $G_n(r,r')$ в начале координат.

Соответственно поведению функции $\rho(\mu^2, E)$ на бесконечности теории разделены (в низшем порядке) на следующие три класса: сверхренормируемые, ренормируемые и неренормируемые. Определяется связь между поведением амплитуды в начале координат и размерностью константы связи.

Введение квантового числа n, связанного с ℓ соотношением $n = 1 + \ell + n_r$, $n = 0, 1, \ldots$, приводит к классификации особенностей в ℓ – плоскости.

Если мы находим особенность в n – плоскости, то появляется бесконечное множество особенностей в ℓ – плоскости в точках $\ell = n_0 - 1$, $n_0 - 2, \ldots$.

Применение разработанного выше метода дается в четвертой главе. Здесь решена проблема рассеяния псевдоскалярных мезонов массы m посредством обмена пары псевдоскалярных мезонов массы $\mu = 0$ (ступеии "лестницы" представляют так называемые "пузырьки").

В этом случае $\rho \approx \lambda^2$, где λ – константа связи и потенциал имеет вид $V(r) \approx \lambda^2 / r^4$.

Уравнение (6) решается в явном виде. Решения обладают точками ветвления в n – плоскости, но не имеют полюсов. Ведущая особенность в ℓ – плоскости расположена в точке

$$\ell_0 = -1 + \sqrt{1 + |f|}\ , \tag{7}$$

где f пропорционально $|\lambda|$.

Этот результат был найден в работах /13,14/ независимо от работы /10/.

Далее, оказывается, что ряд Неймана для парциальной амплитуды $T_\ell(|\vec{p}|, |\vec{p}\,'|, p_0, p_0' | E, \mu)$ мажорируется рядом Неймана для амплитуды $T_\ell(|\vec{p}|, |\vec{p}\,'|, p_0, p_0' | 0, 0)$ в области $|E| < 2m$, из чего следует, что первая особенность амплитуды $T_\ell(|\vec{p}|, |\vec{p}\,'|, p_0, p_0' | E, \mu)$ не может лежать правее точки ℓ в ℓ –плоскости в области $|E| < 2m$.

С другой стороны, используя тот факт, что разность ядер интегральных уравнений для $T_\ell(|\vec{p}|, |\vec{p}\,'|, p_0, p_0' | 0, 0)$ и $T_\ell(|\vec{p}|, |\vec{p}\,'|, p_0, p_0' | E, \mu)$ имеет конечную норму (т.е. принадлежит к фредгольмовскому классу), получаем, что $T_\ell(|\vec{p}|, |\vec{p}\,'|, p_0, p_0' | E, \mu)$ обладает в ℓ_0 точкой ветвления корневого типа, которая является ведущей особенностью в ℓ – плоскости, по крайней мере в области $|E| < 2m$. Эта область содержит нефизические точки (физические значения начинаются именно у порога $E = 2m$), однако в перекрестном канале, где нас интересует асимптотическое поведение, $E^2 = s$ выполняет роль передачи импульса, и область $|s| < 4m^2$ представляет как раз окрестность значения, соответствующего рассеянию вперед $(s = 0)$.

Появление ведущей особенности типа $\sqrt{\ell - \ell_0}$ в ℓ – плоскости определяет асимптотическое поведение амплитуды в перекрестном канале следующим образом:

$$T(s,t) \approx f(s)\,\frac{t^{\ell_0}}{(\log t)^{3/2}}\,, \qquad t \to \infty\,. \tag{8}$$

Соответствующее поведение предсказано Грибовым на основе других соображений.[15]

Затем обсуждается вопрос о том, существуют ли связанные состояния (т.е. полюса парциальной амплитуды) в случае $\mu \neq 0$. С целью его выяснения, используя явное решение для случая $\mu = 0$, строится интегральное уравнение типа Фредгольма для амплитуды, которое решается в приближении слабой связи. Оказывается, что в этом приближении нет связанных состояний, потому что определитель Фредгольма нигде не исчезает. Но, поскольку в плоскости имеются разрезы, амплитуда не является однозначной функцией, и на второй нефизической римановой поверхности появляется пара полюсов в плоскости n. Не исключено, что при некотором значении E или μ эти полюса перейдут на физический лист через разрез, и таким образом возникнет связанное состояние.

В завершение четвертой главы кратко изложено решение уравнения БС для рассеяния скалярных частиц посредством обмена векторными мезонами. Существование ведущей точки ветвления доказывалось в работах[8,9], а ее точное положение найдено в работах[17,19].

В диссертации этот же результат находится значительно проще с помощью радиального уравнения в r – представлении. Положение точки ветвления определяется формулой

$$\ell_0 = -1 + \sqrt{1 + 2g^2}\,, \tag{9}$$

где g – константа связи взаимодействия. Указывается минимальная область, в которой точка ветвления (9) является ведущей особенностью.

В пятой главе исследовано применение высших приближений к ядру уравнения БС.

Очевидно, что поведение (8) не приводит к постоянному полному сечению при $t \to \infty$, что, кажется, противоречит экспериментальным данным. Вполне возможно, что появление разреза связано с выбором простой диаграммы в качестве ядра. Поэтому вместо "однопузырьковой" диаграммы, использованной в работах[7-10], можно исследовать свойства решения уравнения БС с "многопузырьковыми" диаграммами. Свойства таких диаграмм исследованы в работах Захариазена и Тирринга[19]. На основе работы[20] в диссертации доказано, что подобное ядро дает интегральное уравнение типа Фредгольма в области $\ell > 0$. Если константа связи положительна (отрицательная константа связи соответствует появлению "призрака" в ядре), но очень мала по модулю, то положение полюса приблизительно определяется формулой

$$\ell \approx \frac{1}{\frac{32\pi^2}{f} + \log|s|} \quad \text{при } f \to 0 \text{ , или } |s| \to \infty . \tag{10}$$

Отличие этой траектории от траектории в теории $g\phi^3$ состоит в следующем:

1) при $f \to 0$ или /и/ при $s \to \infty$, $\ell \to 0$ (в скалярной теории $\ell \to -1$).

2) при $|s| \to \infty$ эта траектория много медленнее стремится к предельному нулевому значению, чем в теории скалярных мезонов.

В диссертации приведен другой пример того, как высшие приближения "улучшают" теорию. В работе Арбузова и др.[21] показано, что в теории псевдоскалярных мезонов итерирование диаграмм третьего порядка приводит к амплитуде, обладающей существенной особенностью на бесконечности по импульсам, а по константе связи – в начале координат. В диссертации доказано, что применение предыдущего метода, в котором вершина из четырех линий заменяется суммой "многопузырьковых" диаграмм, дает ядро, снова принадлежащее к фредгольмовскому классу, несмотря на то, что мы учитываем бесконечную сумму диаграмм, содержащую и диаграммы, изученные в работе[21].

Шестая глава диссертации посвящена слабым взаимодействиям. В то время, как в работе Пайса и Фейнберга[22,23] слабые взаимодействия учитываются в предположении существования W –мезона, здесь эта проблема исследуется в рамках обычного ферми-взаимодействия на основе работы[24]. Уравнение БС в $V-A$ варианте решается с "пузырьковым" ядром для лептонов нулевой массы методом, описанным в третьей главе. При этом интересно, что уравнение диагонально по n и в случае $E \neq 0$. Радиальное уравнение для функции Грина имеет следующий вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{n^2-\frac{1}{4}}{r^2} + \frac{E^2}{4} - \frac{f^2}{r^6}\right) G(r,r') = \frac{\delta(r-r')}{r^{3/2}} , \tag{11}$$

который совпадает с уравнением Шредингера с потенциалом f^2/r^6. Диссертация дает метод приближенного решения этого уравнения. Полученная T –матрица меморфна во всей плоскости так же, как и в случае твердого ядра. Однако полюса Редже не пригодны для определения асимптотического поведения, так как нет ведущего полюса. Приближенное поведение амплитуды определяется после проведения преобразования Ватсона-Зоммерфельда методом перевала. Амплитуда убывает на бесконечности как $T(s) \approx s^{-1} \log s^{-1}$.

Сингулярное уравнение БС решено таким образом, что сперва регуляризуется ядро уравнения, затем после поворота контура интегрирования производится разложение по четырехмерным гармоникам, и совершается переход к r – представлению. При этом видно, что при $M \to \infty$ (вспомогательная масса) решение

19. Zachariasen. Phys. Rev., 121, 1851 (1961); W.Thirring. Лекция о связанных системах в книге. 'Theoretical Physics', IAEA, Вена, 1963.
20. Ян Квецинский, П.Шураньи.Препринт ОИЯИ Р-1533, Дубна, 1964.
21. B.A.Arbuzov, A.T.Filippov and O.A.Khrustalev. Physics Letters, 8, 205 (1964).
22. G.Feinberg and A.Pais. Phys. Rev., 131, 2724 (1963).
23. G.Feinberg and A.Pais. Phys. Rev., 133, B 477 (1964).
24. G.Domokos, P.Suranyi and A.Vancura. Preprint E-1512, Дубна, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 апреля 1964 г.