ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

С.Б. Рубин

1578

О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Дубна 1964

С.Б. Рубин

1578

О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Направлено в Журнал прикладной механики и технической физики

Дубна 1964

При изучении мощных электронных самофокусирующихся пучков, имеющих сильно неоднородное по сечению пучка магнитное поле, могут представить интерес квантовые явления.

Собственное магнитное поле электронного пучка вместе с стабилизирующим пучок внешним продольным магнитным полем образуют винтовое поле. Ниже рассмотрена с квантово-механической точки зрения задача о движении отдельных релятивистских электронов в таком поле.

1. Для вычисления волновой функции стационарного состояния:

$$\Psi = \psi e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \tag{1}$$

используется уравнение Дирака, записанное в виде системы

$$(E - mc^2 + e\Phi)\,\phi = \vec{\sigma}^{P}\,(c\hat{\vec{p}} + e\vec{A})\,\chi \tag{2}$$

$$(E + mc^2 + e\Phi)\,\chi = \vec{\sigma}^{P}(c\hat{\vec{p}} + e\vec{A})\,\phi, \tag{3}$$

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla, \qquad e = |e|, \tag{4}$$

где $\vec{\sigma}^{P}$ – векторная двухрядная матрица Паули. Рассматриваются лишь состояиия с положительной энергией, т.е.

$$E > 0. \tag{5}$$

В рассматриваемом случае

$$\Phi = 0, \qquad \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}). \tag{6}$$

Известно, что в произвольном стационарном магнитном поле сохраняется величина

$$\hat{Q} = \vec{\sigma}\,(\hat{\vec{p}} + \frac{e}{c}\vec{A}), \tag{7}$$

где

$$\vec{\sigma} = \left\| \begin{matrix} \vec{\sigma}^{P}, & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}^{P} \end{matrix} \right\| \tag{8}$$

– векторная матрица спина. Используя этот закон сохранения, можно искать собственные функции оператора Q:

$$\vec{\sigma}^{P}(\hat{\vec{p}} + \frac{e}{c}\vec{A})\,\phi = \mu\,\phi \tag{9}$$

$$\vec{\sigma}^{P}\left(\hat{\vec{p}}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)\chi=\mu\chi, \tag{10}$$

где $\mu = const.$

С другой стороны, после исключения χ из (2), (3) получается уравнение

$$\frac{1}{c^2}\left[E^2-m^2c^4\right]\phi=\vec{\sigma}^{P}\left(\hat{\vec{p}}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)\vec{\sigma}^{P}\left(\hat{\vec{p}}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)\phi. \tag{11}$$

Применяя дважды соотношение (9), находим

$$\mu=\pm\frac{1}{c}\sqrt{E^2-m^2c^4}. \tag{12}$$

Обозначим

$$\mu=\kappa p_0, \tag{13}$$

где

$$p_0=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-m^2c^4} \tag{14}$$

модуль полного кинетического импульса электрона, а

$$\kappa=\pm 1 \tag{15}$$

– спиновое число, показывающее ориентацию спина по отношению к направлению кинетического импульса.

Из (3) с учетом (10) имеем:

$$\chi_\kappa=\frac{c\,\kappa\,p_0}{E+mc^2}\phi_\kappa=\kappa\sqrt{\frac{E-mc^2}{E+mc^2}} \tag{16}$$

(в (16) указан спиновый индекс).

Предыдущее относилось к произвольному магнитному полю. Рассмотрим теперь винтовое магнитное поле в цилиндрической системе координат

$$A_r=0,\quad A_\theta=A_\theta(r),\quad A_z=A_z(r). \tag{17}$$

При переходе в цилиндрическую систему гамильтониан имеет вид;

$$\hat{H}=mc^2\rho_3+c\rho_1\left[\Omega_\perp\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}\right)+\Omega_\perp\left(-i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{e}{c}A\right)+\right.$$
$$\left.+\sigma_z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}+\frac{e}{c}A_z\right)\right], \tag{18}$$

где

$$\Omega_\perp=\sigma_x\operatorname{Cos}\theta+\sigma_y\sin\theta \tag{19}$$

$$\Omega_\theta=-\sigma_x\operatorname{Sin}\theta+\sigma_y\operatorname{Cos}\theta. \tag{20}$$

Можно показать, что с гамильтонианом (18) коммутируют операторы

$$\hat{j}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z \tag{21}$$

– проекция на ось (oz) полного момента количества движения и

$$\hat{p}_z = -i h \frac{\partial}{\partial z} \tag{22}$$

– проекция продольного импульса. Учитывая (17), будем далее рассматривать только спинор ϕ. Тогда с помощью соотношений $\hat{p}_z \phi = p_z \phi$; $\hat{j}_z \phi = j_z \phi$ можно отделить переменные z, θ подстановкой:

$$\phi_{1K} = B_{1K} R_{1K}(r) \exp i \{ s\theta + \frac{p_z}{h} z \} \tag{23}$$

$$\phi_{2K} = B_{2K} R_{2K}(r) \exp i \{ (s+1)\theta + \frac{p_z}{h} z \},$$

где p_z – продольный импульс, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и связана с проекцией j_z полного момента соотношением

$$j_z = h (s + ½). \tag{24}$$

Для определения радиальных функций можно использовать уравнения (9), (10). Тогда с учетом (23), полагая

$$B_{1K} = 1, \quad B_{2K} = i, \tag{25}$$

получаем

$$\frac{d R_{1K}}{d r} - \frac{1}{r} (s + \frac{e}{ch} r A_\theta) R_{1K} = -\frac{\kappa p_0 + u(r)}{h} R_{2K} \tag{26}$$

$$\frac{d R_{2K}}{d r} + \frac{1}{r} (s + 1 + \frac{e}{ch} r A_\theta) R_{2K} = \frac{\kappa p - u(r)}{h} R_{1\theta} \tag{27}$$

где

$$u(r) = p_z + \frac{e}{c} A_z(r). \tag{28}$$

R_1, R_2 должны еще удовлетворять граничным условиям, обеспечивающим возможность нормировки волновой функции:

$$\left. \begin{array}{l} r R_1 \\ r R_2 \end{array} \right\} \to 0 \qquad \text{при} \quad r \to 0 \tag{29}$$

$$\left. \begin{array}{l} r R_1 \\ r R_2 \end{array} \right\} \neq \infty \qquad \text{при} \quad r \to \infty \tag{30}$$

II. Таким образом основная задача сводится к решению и исследованию радиальных уравнений (26)–(30) при различном выборе функций $A_\theta(r)$ и $A_z(r)$.

В качестве сравнительно простого случая рассмотрим движения электрона внутри "потенциальной ямы", образованной полем H_θ и при наличии постоянного продольного поля H_z. Такой схемой можно грубо представить магнитное поле интенсивного электронного пучка вместе с стабилизирующим пучок постоянным продольным магнитным полем. Отрицательный электронный заряд пучка предполагается скомпенсированным с помощью ионного фона.

Таким образом предполагается:

$$A_0 = \tfrac{1}{2} H_0 r \ , \tag{31}$$

где H_0 постоянное продольное магнитное поле,

$$A_z(r) = \begin{cases} 0 & r \leq b \\ A_0 & r > b \end{cases} \ , \tag{32}$$

т.е. азимутальное магнитное поле вблизи оси пучка равно нулю, в области $r \sim b$, соответствующей границе пучка, испытывает резкии скачок и затем вновь падает до нуля.

Уравнения (26) , (27) принимают вид:

1) при $r \leq b$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR_1}{dr} - \frac{1}{r}\left[\ell - 1 - \omega_0 r^2\right] R_1 &= -\frac{\kappa p_0 + p_z}{h} R_2 \\ \frac{dR_2}{dr} + \frac{1}{r}\left[\ell + \omega_0 r^2\right] R_2 &= \frac{\kappa p_0 - p_z}{h} R_1 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

2) при $r > b$

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dr} - \frac{1}{r}\left[\ell - 1 - \omega_0 r^2\right] R_1 &= -\frac{\kappa p_0 + \tilde{p}}{h} R_2 , \\ \frac{dR_2}{dr} + \frac{1}{r}\left[\ell + \omega_0 r^2\right] R_2 &= \frac{\kappa p_0 - \tilde{p}}{h} R_1 \end{aligned} \tag{34}$$

где принято $s = \ell - 1$ (ℓ - целое) и

$$\omega_0 = \frac{e H_0}{2 ch} \tag{35}$$

$$\tilde{p} = p_z + \frac{e}{c} A_0 . \tag{36}$$

После подстановки

$$\rho = \omega_0 r^2 \tag{37}$$

$$R_1 = \rho^{-1/2} \tilde{R}_1 , \tag{38}$$

$$R_2 = \rho^{-1/2} \tilde{R}_2 \tag{39}$$

система (33) приводится к двум уравнениям 2-го порядка[x)] :

$$\tilde{R}_1'' + [-\tfrac{1}{4} + \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\tfrac{1}{4} - (\frac{\ell-1}{2})^2}{\rho^2}]\,\tilde{R}_1 = 0 \tag{40}$$

$$\tilde{R}_2'' + [-\tfrac{1}{4} + \frac{\lambda+\tfrac{1}{2}}{\rho} + \frac{\tfrac{1}{4} - \frac{\ell^2}{4}}{\rho^2}]\,\tilde{R}_2 = 0, \tag{41}$$

где

$$\lambda = \frac{p_0^2 - p_z^2}{4h^2\omega_0} - \frac{\ell}{2}. \tag{42}$$

К аналогичной системе уравнений приводится (34), при этом вместо параметра λ войдет параметр

$$\tilde{\lambda} = \frac{p_0^2 - \tilde{p}^2}{4h^2\omega_0} - \frac{\ell}{2}. \tag{43}$$

При вычислении λ , $\tilde{\lambda}$ учтено, что $\kappa^2 = 1$.

Все решения уравнений вида (41) можно выразить через два линейно независимых решения, которыми являются функции Уиттекера $W_{\kappa,\mu}(\rho)$ и $W_{-\kappa,\mu}(-\rho)$. Таким образом, например, общее решение для $\tilde{R}_1$ будет иметь вид при $\rho \le \omega_0 b^2$

$$\tilde{R}_1 = C_1 W_{\lambda,\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}}(\rho) + C_2 W_{-\lambda,\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}}(-\rho), \tag{44}$$

где C_1 , C_2 произвольные постоянные,

при $\rho > \omega_0 b^2$

$$\tilde{R}_1 = D_1 W_{\tilde{\lambda},\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}}(\rho) + D_2 W_{-\tilde{\lambda},\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}}(\rho). \tag{45}$$

Учитывая, что $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ связаны соотношениями (33) или (34), соответствующее решение для $\tilde{R}_2$ получаем в виде

при $\rho \le \omega_0 b^2$

$$\tilde{R}_2 = \frac{2h\,\omega_0^{1/2}}{\kappa p_0 + p_z} C_1 W_{\lambda+\frac{1}{2},\frac{\ell}{2}}(\rho) - i\,\frac{\kappa p_0 - p_z}{2h\,\omega_0^{1/2}} C_2 W_{-\lambda-\frac{1}{2},\frac{\ell}{2}}(-\rho). \tag{46}$$

при $\rho > \omega_0 b^2$

$$\tilde{R}_2 = \frac{2h\,\omega_0^{1/2}}{\kappa p_0 + \tilde{p}} D_1 W_{\tilde{\lambda}+\frac{1}{2},\frac{\ell}{2}}(\rho) - i\,\frac{\kappa p_0 - \tilde{p}}{2h\,\omega_0^{1/2}} D_2 W_{-\tilde{\lambda}-\frac{1}{2},\frac{\ell}{2}}(-\rho). \tag{47}$$

---

x) В каждой из областей $0 \le r \le b$; $b < r$, где $A_z(r)$ есть константа, радиальные уравнения 2-го порядка совпадают с уравнениями задачи движения частицы в постоянном магнитном поле , см. /1/.

Произвольные постоянные C_1 , C_2 и D_1 , D_2 должны быть выбраны в соотв
ствии с граничными условиями (29), (30) и условием непрерывности решения в точ
$\rho = \omega_0 b^2$. Из условия (30) с учетом асимптотического поведения функций Уиттек
при $\rho \to \infty$ (см. /2/) следует, что $D_2 = 0$. При $\rho \to 0$ оба решения $W_{k,\mu}$ (
и $W_{-k,\mu}(-\rho)$ имеют особенность. Поэтому постоянные C_1 и C_2 следует выбра
так, чтобы решения (40), (41) выражались через третью функцию Уиттекера $M_{k,\mu}$
которая стремится к нулю при $\rho \to 0$. В результате, решение в области $\rho \leq \omega_0 b^2$
представляется в виде

$$\tilde{R}_1 = G\, M_{\lambda, \frac{\ell}{2} - 1/2}(\rho) \qquad (48$$

$$\tilde{R}_2 = G\, \frac{\kappa\, p_0 - p_z}{2\, h\, \omega_0^{1/2}\, \ell}\, M_{\lambda + 1/2, \frac{\ell}{2}}(\rho), \qquad (49$$

где G – постоянная.

Из условий непрерывности решения при $\rho = \omega_0 b^2$ получается

$$G\, M_{\lambda, \frac{\ell}{2} - 1/2}(b^2 \omega_0) = D\, W_{\tilde{\lambda}, \frac{\ell}{2} - 1/2}(b^2 \omega_0)$$

$$G\, \frac{\kappa\, p_0 - p_z}{2\, h\, \omega_0^{1/2}\, \ell}\, M_{\lambda + 1/2, \frac{\ell}{2}}(b^2 \omega_0) = D_1\, \frac{2\, h\, \omega_0^{1/2}}{\kappa\, p_0 + p}\, W_{\tilde{\lambda} + 1/2, \frac{\ell}{2}}(b^2 \omega_0). \qquad (50$$

Разделив одно из уравнений (50) на другое, получим уравнение, определяющ
спектр:

$$M_{\lambda, \frac{\ell}{2} - 1/2}(b^2 \omega_0)\, W_{\tilde{\lambda} + 1/2, \frac{\ell}{2}}(b^2 \omega_0) - \frac{(\kappa\, p_0 - p_z)(\kappa\, p_0 + \tilde{p})}{4\, h^2\, \omega_0\, \ell} \times$$

$$\times\, M_{\lambda + 1/2, \frac{\ell}{2}}(b^2 \omega_0)\, W_{\tilde{\lambda}, \frac{\ell}{2} - 1/2}(b^2 \omega_0) = 0 \qquad (51$$

$$\left(\lambda = \frac{p_0^2 - p_z^2}{4\, h\, \omega_0} - \frac{\ell}{2}\, ; \qquad \tilde{\lambda} = \frac{p_0^2 - \tilde{p}^2}{4\, h\, \omega_0} - \frac{\ell}{2}\, . \right.$$

Таким образом параметр $p_0 = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2 c^4}$, определяющий спектр, удовлет
ряет трансцендентному уравнению (51). После определения p_0 одна из постоянн
G или D_1 выражается через другую и последняя находится из условий нормиров

Ввиду сложности трансцендентного уравнения (51), рассмотрим только один
частный случай его решения, соответствующий большим значениям "поперечной эн
гии" $p_0^2 - p_z^2$ и большому азимутальному полю A_0 , когда глубина потенциальн
ямы настолько велика, что

$$p_0^2 - \tilde{p}^2 = p_0^2 - (p_z + \frac{e}{c} A_0)^2 < 0, \qquad (52)$$

причем

$$\left| \frac{p_0^2 - (p_z + \frac{e}{c} A_0)^2}{4 h^2 \omega_0} \right| \gg 1 . \qquad (53)$$

Величина ℓ предполагается не очень большой. При этих условиях, предполагая еще, что $\lambda, |\tilde{\lambda}| \gg b^2 \omega_0 > 1$, можно использовать асимптотические формулы для функций Уиттекера для больших значений индекса $\lambda, |\tilde{\lambda}|$ (см./3/). При этом необходимо учесть, что $\tilde{\lambda}$ является отрицательным числом. Учитывая, что асимптотическое выражение для $W_{k,\mu}(\rho)$ в первом порядке не зависит от индекса μ и, пренебрегая $\frac{1}{2}$ по сравнению с $\lambda, |\tilde{\lambda}|$, можно после сокращений привести (51) к виду:

$$\left[\frac{p_0^2 - p_z^2}{4h \omega_0} - \frac{\ell}{2} \right]^{1/2} \cos \left[2(\lambda \omega_0)^{1/2} b - \frac{\ell \pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] -$$

$$- \frac{(\kappa p_0 - p_z)(\kappa p_0 + \tilde{p})}{4h \omega_0} \cos \left[2(\lambda \omega_0)^{1/2} b - \frac{\ell \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = 0. \qquad (54)$$

(54) сводится к уравнению

$$\cos \left[2(\lambda \omega_0)^{1/2} b - \frac{\ell \pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \theta \right] = 0, \qquad (55)$$

где

$$tg\, \theta = \frac{(\kappa p_0 - p_z)(\kappa p_0 + \tilde{p})}{4h \omega_0} \left[\frac{p^2 - p_z^2}{4h^2 \omega_0} - \frac{\ell}{2} \right]^{-1/2}. \qquad (56)$$

Отсюда

$$2(\lambda \omega_0)^{1/2} b = n\pi + \frac{\ell}{2}\pi - \frac{\pi}{4} - \theta, \qquad (57)$$

где n целое, или:

$$\sqrt{p_0^2 - p_z^2 - 2h^2 \omega_0 \ell} = \frac{\pi h}{b} \left[n + \frac{\ell}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\theta}{\pi} \right]. \qquad (58)$$

Величина θ является функцией от p_0, поэтому (58) также является трансцендентным уравнением относительно p_0. Оно дает зависимость p_0 от квантовых чисел n, ℓ, κ, p_z. Так как квантовые числа n, ℓ велики по сравнению с единицей, а $\frac{\theta}{\pi} \approx 2$, то окончательным приближенным уравнением для определения p_0 можно считать

$$\sqrt{p_0^2 - p_z^2 - 2h \omega_0 \ell} \approx \frac{\pi h}{b} \left(n + \frac{\ell}{2} \quad \frac{\pi}{4} \right) \qquad (59)$$

в такой форме, однако, зависимость энергетических уровней от спиновой переменной κ не проявляется.

III. Из приведенного выше можно сделать выводы.

В общем случае винтового магнитного поля (с произвольной зависимостью A_θ, A_z от r) состояние частицы можно характеризовать: определенным значением энергии E, продольным импульсом p_z, проекцией на ось (Oz) полного момента количества движения j_z и ориентацией спина по отношению к направлению кинетического импульса частицы. В таком случае решение уравнения Дирака сводится к решению радиальных уравнений - системе двух уравнений 1-го порядка.

Для рассмотренного частного случая винтового поля, приблизительно описывающего магнитное поле стабилизированного электронного пучка, полученное точное решение радиальных уравнений показывает, что "поперечное движение" частицы может быть определено с помощью двух дискретных параметров - квантового числа, связанного с радиальными колебаниями и квантового числа, связанного с азимутальным движением. Полученные волновые функции могут быть использованы для вычисления различных физических эффектов, например, спектра излучения электрона в пучке, рассмотрения задачи рассеяния электронов и т.д.

В заключение автор выражает благодарность М.Л. Иовновичу за полезные обсуждения.

Литература

1. А.А.Соколов. Введение в квантовую электродинамику. Физматгиз, Москва, 1958.
2. Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа. Физматгиз, Москва, 1963.
3. И.С.Грандштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм и произведений. М-Л, 1951 г. стр.431.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 февраля 1964 г.