С 353
Л-74

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Д.Г. Ломинадзе, Э.А. Перельштейн

1527

ПУЧКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОГРАНИЧЕННОЙ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Дубна 1964

Д.Г. Ломинадзе, Э.А. Перельштейн

1527

2293/1 нг

ПУЧКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОГРАНИЧЕННОЙ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1964

1. Тензор проводимости и плотность тока возмущения

Рассмотрим азимутальные волны в квазинейтральной цилиндрически ограниченной плазме, через которую движется квазинейтральный пучок, ограниченный той же цилиндрической поверхностью, при наличии внешнего однородного магнитного поля, направленного по оси цилиндра, причем направленная скорость пучка u_0 параллельна магнитному полю. Кроме того, будем предполагать, что тепловым движением в пучке и в плазме можно пренебречь. Поэтому решения кинетического уравнения для частиц a -ого сорта в основном состоянии

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} + \frac{e_a}{c}[\vec{v}\vec{B}_0]\frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}} = 0 \tag{1}$$

могут быть выбраны в лабораторной системе координат в виде:

$$f_{oa}(\vec{p},\vec{r},t) = f_{oa}[\mathcal{P}(t-t'),\vec{r}+\vec{R}(t-t'),t'] = n\delta(\vec{\mathcal{P}})\sigma(r_0-r-R_r),$$

$$f'_{oa}(\vec{p}',\vec{r}',t) = n'\,\delta(\mathcal{P}_{||}-\mathcal{P}_{||0})\frac{\delta(\vec{\mathcal{P}}'_{\perp})}{2\pi\mathcal{P}_{\perp}}\,\sigma(r_0-r-R_r),$$

где функция σ определяется как $\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x>0. \\ 0 & x<0 \end{cases}$

Здесь приняты следующие обозначения: n, n' – плотность зарядов в плазме и пучке соответственно, r_0 – радиус цилиндра, $\vec{\mathcal{P}}$ и $\vec{R}$ определяются как решения характеристической системы /1/, соответствующей уравнению (1). Линеаризуем кинетическое уравнение при предположении, что возмущенная функция распределения незначительно отличается от основной. Тогда, представляя функцию распределения в виде

$$f_a = f_{ao} + \delta f_a ,$$

получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \delta f_a}{\partial \vec{r}} + e_a(\vec{E}_0 + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}_0])\frac{\partial \delta f_a}{\partial \vec{p}} = -e_a(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}])\frac{\partial f_{oa}}{\partial \vec{p}},$$

решение которого при условии адиабатического включения взаимодействия запишется в виде

$$\partial f_a = -e_a\int_{-\infty}^{t} dt'\,\frac{\partial f_{oa}(\vec{\mathcal{P}}(t-t'),\vec{R})}{\partial \vec{\mathcal{P}}}\{\vec{E}(\vec{r}+\vec{R},t') + \frac{1}{c}[\vec{u},\vec{B}]\}. \tag{3}$$

Используя эту формулу, получаем выражения для тока возмущения:

$$\vec{j}_1 = -\sum_a e_a^2 \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{r}' \int d\vec{p}\; v_1 \left\{ \frac{\partial f_{0a}}{\partial \vec{\mathcal{P}}} + \frac{\partial f'_{0a}}{\partial \vec{\mathcal{P}}} \right\} \times \tag{4}$$

$$\times\, \delta(\vec{R} + \vec{r} - r') \left\{ \vec{E}(\vec{r}', t')\, \sigma(r_0 - r) + \frac{[\vec{u}(t-t')\; \vec{B}(\vec{r}', t')]\, \sigma(r_0 - r')}{c} \right\} .$$

Переходя теперь к фурье-представлению функций, входящих в (4), и воспользовавшись уравнением Максвелла

$$[\vec{k}\,\vec{E}] = \frac{\omega}{c}\vec{B} ,$$

получим

$$j_1(\omega, \vec{k}) = \sigma_{1j}(\omega, \vec{k})\, \ddot{E}_j(\omega, \vec{k}) , \tag{5}$$

где σ_{1j} – тензор проводимости для бесконечной плазмы, а $\ddot{E}_j(\omega, \vec{k})$ – фурье-образ функции $E_j(\vec{r}, t)\sigma(r_0 - r)$.

Выпишем компоненты тензора проводимости в явном виде в цилиндрических координатах:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{\omega}{4\pi i}\sum_a \left(\frac{\Omega_a}{\omega^2 - \omega^2_{Ha}} + \frac{\Omega'_a(\omega - k_{\parallel} u_0)}{\omega^2[(\omega - k_{\parallel} u_0)^2 - \omega'^2_{Ha}]} \right),$$

$$\sigma_{33} = -\frac{\omega}{4\pi i}\sum_a \left(\frac{\Omega_a^2}{\omega^2} + \frac{\Omega'^2_a}{\omega^2}\left[\frac{\omega^2}{\gamma_0^2(\omega - k_{\parallel} u_0)^2} + \frac{(k_{\perp} u_0)^2}{(\omega - k_{\parallel} u_0)^2 - \omega'^2_{Ha}} \right] \right)$$

$$\sigma_{12} = -\sigma_{21} = -\frac{\omega}{4\pi i}\sum_a \left(\frac{i\Omega_a^2 \omega'_{Ha}}{\omega(\omega^2 - \omega^2_{Ha})} + \frac{i\Omega'^2_a \omega_{Ha}(\omega - k_{\parallel} u_0)}{\omega^2[(\omega - k_{\parallel} u_0)^2 - \omega'^2_{Ha}]} \right),$$

$$i\sigma_{13} = (i\sigma_{31})^* = -\frac{\omega}{4\pi}\sum \frac{\Omega'^2_a}{\omega^2}\left(\frac{(\omega - k_{\parallel} u_0)\, k_1 u_0}{(\omega - k_{\parallel} u_0)^2 - \omega'^2_{Ha}} + i\, \frac{\omega'_{Ha} k_2 u_0}{(\omega - k_{\parallel} u_0)^2 - \omega'^2_{Ha}} \right),$$

$$i\sigma_{23} = -i\sigma^*_{32} = -\frac{\omega}{4\pi}\sum_a \frac{\Omega'^2_a}{\omega^2}\left(\frac{(\omega - k_{\parallel} u_0)\, k_2 u_0}{(\omega - k_{\parallel} u_0)^2 - \omega'^2_{Ha}} + i\, \frac{\omega'_{Ha} k_1 u_0}{(\omega - k_{\parallel} u_0)^2 - \omega'^2_{Ha}} \right);$$

где $\Omega_a^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_a}$, $\Omega'^2_a = \frac{4\pi e^2 n'}{m_a \gamma_0}$ – ленгмюровские частоты частиц a -го сорта в плазме и пучке, и соответствие индексов устанавливается следующим образом: $1 = r$, , $2 = \theta$, $3 = z$, ось z направлена по магнитному полю. При этом выражения для токов возмущения можно переписать в следующем виде:

$$j_z = \frac{i}{4\pi\omega}\left\{ \omega^2(1 - \eta)\ddot{E}_z + \Omega'^2_3 b^2 k_{\perp}^2 \ddot{E}_z + \Omega'^2_3 b(\vec{k}_{\perp} \ddot{\vec{E}}_{\perp}) + \Omega'^2_4 ib[\vec{k}\ddot{\vec{E}}]_z \right\}, \tag{6}$$

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{i}{4\pi\omega}\left\{ \omega^2(1 - \epsilon)\ddot{\vec{E}}_{\perp} + \Omega'^2_3 b\vec{k}_{\perp} \tilde{E}_z + \Omega'^2_4 ib[\vec{k}\vec{h}]_{\perp}\ddot{E}_z + \Omega^2 i[\vec{E}\vec{h}]_{\perp} \right\};$$

здесь введены следующие обозначения:

$\vec{h} = \frac{\vec{B}_0}{B_0}$ – единичный вектор, направленный по магнитному полю,

$$\eta = 1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2(\omega - k_{\parallel} u_0)^2} \qquad \Omega_1^2 = \sum_a \Omega_a^2 ,\; \Omega_2^2 = \sum_a \Omega'^2_a ;$$

$$\epsilon = 1 - \frac{\Omega_3^2 + \Omega'^2_3}{\omega^2} , \qquad \Omega_3^2 = \sum_a \frac{\Omega_a^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega^2_{Ha}} ; \quad \Omega'^2_3 = \sum_a \frac{\Omega_a^2(\omega - k_{\parallel} u)^2}{(\omega - k_{\parallel} u_0)^2 - \omega'^2_{Ha}} ;$$

$$\Omega^2 = \Omega_4^2 + \Omega'^2_4 , \quad \Omega_4^2 = \sum \frac{\Omega_a^2 \omega\, \omega_{Ha}}{\omega^2 - \omega^2_{Ha}} , \quad \Omega'^2_4 = \sum_a \frac{\Omega'^2 \omega'_{Ha}(\omega - k_{\parallel} u_0)}{(\omega - k_{\parallel} u_0)^2 - \omega'^2_{Ha}} ,$$

$$b = \frac{u_0}{\omega - k_{\parallel} u_0} .$$

2. Вывод дисперсионного уравнения

Формулы (6) вместе с уравнениями Максвелла

$$\mathrm{rot}\, \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} , \tag{7.1}$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7.2}$$

и граничными условиями определяют линейные возмущения системы плазма-пучок.

Исключая из уравнений (7) $\vec B$, получим:

$$\Delta \vec E - \vec\nabla(\vec\nabla \vec E) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \vec j}{\partial t}. \qquad (8)$$

Замечая, что умножению $\tilde{\tilde E}_j$ на $i\vec k$ соответствует фурье-образ $F(i\vec k\, \tilde{\tilde E}_j) = \begin{cases}\frac{\partial E_j}{\partial \vec r}, & r_0 > r\\ 0, & r_0 < r\end{cases}$, переходим в (6) к координатному представлению заменой $\vec k$ соответствующими дифференциальными операторами в x -представлении. Тогда уравнение (8) в области $r < r_0$ запишется в виде (заметим, что решение ищем в виде $\vec E = \vec E(r)\, e^{i(kz+n\vartheta-\omega t)}$):

$$\Delta_\perp E_z - ik_\| (\vec\nabla_\perp \vec E_\perp) = -\frac{\omega^2}{c^2}\eta E_z - \frac{\Omega'^2}{c^2} b^2 \Delta_\perp E_z - i\frac{\Omega_3'^2}{c^2} b(\vec\nabla_\perp \vec E_\perp) + \frac{\Omega_4'^2}{c^2} b[\vec\nabla_\perp \vec E]_z \qquad (9.1)$$

$$-k_\|^2 \vec E_\perp + \Delta_\perp \vec E_\perp - \vec\nabla_\perp(\vec\nabla_\perp \vec E_\perp) - ik_\|\vec\nabla_\perp E_z = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon \vec E_\perp - i\frac{\Omega_3'^2}{c^2} b\,\vec\nabla_\perp E_z + \frac{\Omega_4'^2}{c^2} b[\vec\nabla_\perp \vec h]E_z + \frac{i\Omega^2}{c^2}[\vec E \vec h].$$

Умножая скалярно оператор $\vec\nabla_\perp$ на уравнение (9.2), получаем

$$\vec\nabla_\perp \vec E_\perp = \frac{i\left(k_\| - \frac{\Omega_3'^2}{c^2}b\right)\Delta_\perp E_z}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2} + \frac{i\frac{\Omega^2}{c^2}[\vec\nabla \vec E]_z}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2}. \qquad (10)$$

Подставляем это выражение в уравнение (9.1), используя при этом уравнение поля (7.2)

$$\left[1 + \frac{\Omega_3'^2}{c^2}b^2 + \frac{\left(k_\| - \frac{\Omega_3'^2 b^2}{c^2}\right)^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2}\right]\Delta_\perp E_z + \frac{\omega^2}{c^2}\eta E_z = \frac{i\omega}{c}\left[\frac{\Omega_4'^2}{c^2}b - \frac{\left(k_\| - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2}\right)\frac{\Omega^2}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k^2}\right]B_z. \qquad (11)$$

В результате векторного умножения оператора $\nabla_\perp$ на уравнение (9.2) и использования формул (10) и (7.2), получим

$$\frac{i\omega}{c}\,\frac{\frac{\Omega^4}{c^4} - \left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2\right)^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2}B_z - \frac{i\omega}{c}\Delta_\perp B_z = \left[\frac{\Omega_4'^2 b}{c^2} - \frac{\left(k_\| - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2}\right)\frac{\Omega^2}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2}\right]\Delta_\perp E_z. \qquad (12)$$

Исключая B_z из уравнений (11) и (12), получаем

$$\Delta_\perp^2 E_z + 2A\Delta_\perp E_z + BE_z = 0, \qquad (13)$$

где

$$A = \frac12\, \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\eta + \left[\frac{\frac{\Omega^2}{c^2}\left(k_\| - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2}\right)^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2} - \frac{\Omega_4'^2 b}{c^2}\right]^2}{1+\frac{\Omega_3'^2}{c^2}b + \frac{\left(k_\| - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2}\right)^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2}} - \frac12\,\frac{\frac{\Omega^4}{c^4} - \left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2\right)^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2}, \qquad (14.1)$$

где $k_1 = \frac{\lambda_{1,n-1}}{r_0}$.

$$B = -\frac{\omega^2}{c^2}\eta\,\frac{\frac{\Omega^4}{c^4} - \left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2\right)^2}{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2\right)\left[1 + \frac{\Omega'^2 b^2}{c^2} + \frac{\left(k_\| - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2}\right)^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_\|^2}\right]}. \qquad (14.2)$$

Действуя на уравнение (11) оператором $\Delta_\perp$ и подставляя $\Delta_\perp E_z$ и $\Delta_\perp^2 E_z$ из (12), исключаем E_z из системы (11-12). В результате имеем

$$\Delta_\perp^2 B_z + 2A\Delta_\perp B_z + BB_z = 0, \qquad (15)$$

где A и B определены формулами (14).

Решения уравнений (13-15) будем искать в виде

$$\Delta_\perp X + \frac{\kappa_{1,2}^2}{r_0^2}X = 0, \qquad (16)$$

где κ^2 - решения биквадратного уравнения

$$\frac{\kappa^4}{r_0^4} - 2A\frac{\kappa^2}{r_0^2} + B = 0. \qquad (16)$$

Таким образом, решения уравнений (13-15) представляются как линейные комбинации функций Бесселя:

$$E_z = a_1 X_1(\kappa_1) + a_2 X_2(\kappa_2),$$

$$B_z = b_1 X_1(\kappa_1) + b_2 X_2(\kappa_2),$$

где

$$X_1(\kappa_1) = c_1 j_n\left(\frac{\kappa_1 r}{r_0}\right) + d_1 H_n\left(\frac{\kappa_1 r}{r_0}\right), \qquad (16.2)$$

$$X_2(\kappa_2) = c_2 j_n\left(\frac{\kappa_2 r}{r_0}\right) + d_2 H_n\left(\frac{\kappa_2 r}{r_0}\right).$$

Положив коэффициенты $d_1 = d_2 = 0$, удовлетворяя требованию ограниченности полей возмущений при $r = 0$, получаем для напряженностей поля внутри цилиндра (отмечаемых индексом i, индекс e обозначает внешнее поле).

$$E_{z_i} = a_1 j_n\left(\frac{\kappa_1 r}{r_0}\right) + a_2 j_n\left(\frac{\kappa_2 r}{r_0}\right),$$

$$B_{z_i} = b_1 j_n\left(\frac{\kappa_1 r}{r_0}\right) + b_2 j_n\left(\frac{\kappa_2 r}{r_0}\right). \qquad (17)$$

Подставляя теперь эти решения в исходные уравнения (11) и (12), находим, что коэффициенты, входящие в (17), не являются независимыми, связь между ними задается следующими формулами:

$$b_1 = \beta_1 a_1 ,$$

где

$$a_2 = \beta_2 b_2 ,$$

$$\beta_1 = \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\eta - \left(1 + \frac{\Omega_3'^2 b^2}{c^2} + \frac{(k_{||} - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2})^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_{||}^2}\right)\frac{\kappa_1^2}{r_0^2}}{\frac{i\omega}{c}\left[\frac{\Omega_4'^2 b}{c^2} - \frac{(k_{||} - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2})\frac{\Omega^2}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_{||}^2}\right]} \qquad (18)$$

$$\beta_2 = \frac{\frac{i\omega}{c}\left[\frac{\Omega_4'^2 b}{c^2} - \frac{(k_{||} - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2})\frac{\Omega^2}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_{||}^2}\right]}{\frac{\omega^2}{c^2}\eta - \left(1 + \frac{\Omega_3'^2 b^2}{c^2} + \frac{(k_{||} - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2})^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_{||}^2}\right)\frac{\kappa_2^2}{r_0^2}} .$$

Решения (17) при этом перепишутся в виде:

$$E_{z_1} = a_1 j_n\left(\frac{\kappa_1 r}{r_0}\right) + \beta_2 b_2 j_n\left(\frac{\kappa_2 r}{r_0}\right), \qquad (19)$$

$$B_{z_1} = \beta_1 a_1 j_n\left(\frac{\kappa_1 r}{r_0}\right) + b_2 j_n\left(\frac{\kappa_2 r}{r_0}\right) .$$

Потребуем непрерывность тангенциальных компонент $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $r = r_0$, т.е. граничные условия на поверхности цилиндра зададим в виде

$$E_{z_1} = E_{z_e}, \qquad E_{\theta_1} = E_{\theta_e},$$

$$B_{z_1} = B_{z_e}, \qquad B_{\theta_1} = B_{\theta_e} . \qquad (20)$$

При $k_{||} = 0$ из уравнения (7.2) находим

$$H_\theta = \frac{ic}{\omega}\frac{dE_z}{dr} , \qquad (21.1)$$

$$H_z = -\frac{ic}{\omega}\left[\frac{1}{r}\frac{d(rE_\theta)}{dr} - \frac{in}{r}E_\theta\right] . \qquad (21.2)$$

Уравнение (9.2), расписанное по координатам с использованием формулы (21.2), эквивалентно следующим уравнениям:

$$\left(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2\right)E_r + \frac{n\omega}{rc}H_z - i\left(k_{||} - \frac{\Omega_3'^2}{c^2}b\right)\frac{\partial E_z}{\partial r} - i\frac{\Omega_4'^2 bn}{c^2 r}E_z - \frac{i\Omega^2}{c^2}E_\theta = 0;$$

$$\frac{i\omega}{c}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{(k_{||} - \frac{\Omega_3'^2}{c^2}b)n}{r}E_z + \left(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2\right)E_\theta + \frac{\Omega_4'^2}{c^2}b\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{i\Omega^2}{c^2}E_r = 0. \qquad (22)$$

Исключая из этой системы уравнений E_r, находим

$$E_{\theta_1} = \frac{c^2(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2)}{c^4(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2) - \Omega^4}\left\{\frac{in\omega\,\Omega^2}{rc^3(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2)}H_z - \frac{i\omega}{c}\frac{\partial H_z}{\partial r} - \right. \qquad (23)$$

$$\left. - \frac{(k_{||} - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2} - \frac{\Omega^2\Omega_4'^2 b}{c^4(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2)})n}{r}E_z + \left(\frac{\Omega^2(k_{||} - \frac{\Omega_3'^2 b}{c^2})}{c^2(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_{||}^2)} - \frac{\Omega_4'^2 b}{c^2}\right)\frac{\partial E_z}{\partial r}\right\} .$$

Для полей вне цилиндра при условии, что κ могут находиться в комплексной плоскости, необходимо положить $c_1 = c_2 = 0$ (условие ограниченности возмущений на бесконечности).

Кроме того, для области $r > r_0$ во всех приведенных выше формулах нужно положить $n = n' = 0$. Тогда для $k_{||} = 0$ получаем:

$$\kappa_1^2 = \kappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}r_0^2 = \mu^2$$

и

$$E_{z_e} = A_1 H_n(\mu) , \qquad (24)$$

$$B_{z_e} = B_1 H_n(\mu) .$$

После подстановки (19), (21.1), (23) и (24) в (20) получаем следующую запись граничных условий при $r = r_0$:

$$a_1 j_n(\kappa_1) + \beta_2 b_2 j_n(\kappa_2) = A_1 H_n(\mu),$$

$$a_1\kappa_1 j_n'(\kappa_1) + \beta_2 b_2 j_n'(\kappa_2)\kappa_2 = A_1\mu H_n'(\mu), \qquad (25)$$

$$\beta_1 a_1 j_n(\kappa_1) + b_2 j_n(\kappa_2) = B_1 H_n(\mu),$$

$$a_1[\alpha_1(\kappa_1) + \beta_1\alpha_2(\kappa_1)] + b_2[\alpha_2(\kappa_2) + \beta_2\alpha_1(\kappa_2)] = -\frac{i}{\omega c r_0}B_1\mu H_n'(\mu),$$

где

$$\alpha_1(\kappa) = \left[\frac{\frac{\Omega_3'^2}{c^2}b + \frac{\Omega^2\Omega_4'^2 b}{c^2\epsilon\omega^2})n}{r_0}j_n(\kappa) - \frac{\Omega^2\frac{\Omega_3'^2 b}{c^2} + \frac{\Omega_4'^2 b}{c^2}\epsilon\omega^2}{\epsilon\omega^2 r_0}\kappa j_n'(\kappa)\right]\frac{\epsilon\omega^2}{\epsilon^2\omega^4 - \Omega^4} \qquad (25.1)$$

$$a_2(\kappa) = \left[\frac{in\Omega^2}{r_0 c\epsilon\omega}\, j_n(\kappa) - \frac{i\omega}{cr_0}\kappa j_n'(\kappa)\right]\frac{\epsilon\omega^2}{\epsilon^2\omega^4 - \Omega^4}\,.$$

Из условия совместности уравнений (25) находим дисперсионное уравнение:

$$\Delta M = \begin{vmatrix} j_n(\kappa_1) & \beta_2 j_n(\kappa_2) & H_n(\mu) & 0 \\ \kappa_1 j_n'(\kappa) & \beta_2\kappa_2 j_n'(\kappa_2) & \mu H_n'(\mu) & 0 \\ \beta_1 j_n(\kappa) & j_n(\kappa) & 0 & H_n(\mu) \\ a_1(\kappa_1)+\beta_1 a_2(\kappa_1) & a_2(\kappa_1)+\beta_2 a_1(\kappa_2) & 0 & -\frac{i}{\omega c r_0}\mu H_n'(\mu) \end{vmatrix} = 0 \qquad (26)$$

Как видно из этого уравнения, в общем случае разделение продольных и поперечных волн является невозможным, однако, это удается сделать в ряде предельных случаев, которые рассматриваются ниже.

3. Слабое магнитное поле

Рассмотрим возбуждение азимутальных волн, частоты которых $\omega \gg \omega_{H_e}$, т.е. случай слабого магнитного поля. Тогда $\beta_2 = 0(\frac{\omega_H}{\omega})$, $\beta_1 = 0(\frac{\omega_H}{\omega})$ и с точностью до членов порядка $0(\frac{\omega_H}{\omega})$ дисперсионное уравнение перепишется в виде:

$$\Delta M = \begin{vmatrix} j_n(\kappa_1) & H_n(\mu) \\ \kappa_1 j_n'(\kappa_1) & \mu H_n(\mu) \end{vmatrix}\; \begin{vmatrix} j_n(\kappa_2) & H_n(\mu) \\ a_2(\kappa_2) & -\frac{i}{\omega cr}\mu H_n'(\mu) \end{vmatrix} = 0$$

где

$$\frac{\kappa_1^2}{r_0^2} = \frac{\frac{\omega^4}{c^4}\eta\kappa}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\left(1+\frac{\Omega_2^2 b^2}{c^2}\right) + \frac{\Omega_2^4 b^2}{c^4}}\,, \qquad \frac{\kappa_2^2}{r_0^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\,,$$

$$\epsilon = 1 - \frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{\omega^2}\,, \qquad a_2(\kappa_2) = -\frac{i}{\omega c r_0\epsilon}\kappa_2 j_n'(\kappa_2).$$

Этот случай был рассмотрен в работе Яркового [2], где показано, что для $E_z \neq 0$ при условии $\mu^2 < \frac{\Omega_{1,2}^2 r_0^2}{c^2} \ll 1$ возможны неустойчивые решения. Дисперсионное уравнение для волн $E_z \neq 0$ имеет вид:

$$\frac{2\nu_1}{\gamma_0}\,\frac{\omega^2}{\Omega_1^2}\,\frac{(\omega^2-\Omega_1^2-\Omega_2^2)(\omega^2-\Omega_1^2-\frac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2})}{\omega^2(\omega^2-\Omega_1^2-\frac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2}) - \Omega_1^2\Omega_2^2\frac{u_0^2}{c^2}} = \lambda_{1,n-1}^2\,,$$

где $\lambda_{1,n-1}$, корень $j_{n-1}(\lambda_1) = 0$.

При больших λ_1 получаем апериодическое решение:

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left\{(\Omega_1^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2}) \pm \sqrt{(\Omega_1^2+\frac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2}) + 4\Omega_1^2\Omega_2\frac{u_0^2}{c^2}}\right\}. \qquad (27)$$

Для $E_z = 0$ получаем дисперсионное уравнение:

$$\mu j_n(\kappa_2)H_n'(\mu) - \frac{\kappa_2 j_n'(\kappa_2)H_n(\mu)}{\epsilon} = 0,$$

которое в тех же предположениях $\omega^2 \lesssim \Omega_{1,2}^2$, $\frac{2\nu}{\gamma} \approx \frac{\Omega_{1,2}^2 r_0^2}{c^2} \ll 1$ имеет решение

$$\omega^2 = \frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{2}\,.$$

Заметим, что вид дисперсионного уравнения приведенного выше, совпадает полностью с уравнениями [2], если положить там $\Phi = nj_n(x) - xj_{n-1}(x)$, что и следовало ожидать.

4. Гидродинамические волны

Условие квазинейтральности пучка и плазмы позволяет провести разделение продольных и поперечных волн при очень сильных магнитных полях, т.е. $\omega \ll \omega_H'$. Действительно, при этом $\Omega_4^2 = \Omega_4'^2 = 0$, т.к. $\sum_a e_a N_a = 0$, откуда, используя (14,1-2) и (16), получаем[x)]

$$\frac{\kappa_1^2}{r_0^2} = \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\eta}{1 + \frac{\Omega_3'^2 b^2}{c^2} + \frac{(\frac{\Omega_3'^2 b}{c^2} - k_{||})^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\kappa - k_{||}^2}}\,, \qquad (28.1)$$

$$\frac{\kappa_2^2}{r_0^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_{||}^2\,, \qquad (28.2)$$

$$\beta_2 = 0\,, \quad \beta_1 = 0\left(\frac{\omega^2}{\omega_H^2}\right);$$

x) Приведенные здесь выражения суть разложения до второго порядка по $\frac{\omega}{\omega_H}$ и первого порядка по $\mu = \frac{m_e}{m_i}$, т.к. в этой области частот электронные колебания дают поправку порядка $\mu \ll 1$ и ими можно пренебречь по сравнению с полным вкладом.

где
$$\frac{\Omega_3^2}{\omega^2} = -\frac{c^2}{V_{A1}^2} \qquad \frac{\Omega_3'^2}{\omega^2} = -\frac{c^2}{V_{A1}'^2},$$

$$\epsilon = 1 + \frac{c^2}{V_{A1}^2} + \frac{c^2}{V_{A1}'^2} \quad \text{в области } \omega^2 \lessapprox \Omega_1'^2, \text{ и } \Omega_3^2 = \Omega_3'^2 = 0, \ \eta = 1$$

при $\omega^2 \gg \Omega_1'^2$,

$V_{A1} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_1}}$ и $V'_{A1} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho'_1}}$ альфвеновские скорости ионов плазмы и пучка. Так как детерминант (26) при $\beta_2 = 0$ записывается как произведения двух детерминантов, то дисперсионное уравнение представляется в виде:

$$\Delta M = -\frac{i}{\omega c}\begin{vmatrix} j_n(\kappa_1) & H_n(\mu) \\ \kappa_1 j_n'(\kappa_1) & \mu H_n'(\mu) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} j_n(\kappa_2) & H_n(\mu) \\ \frac{\kappa_2 j_n'(\kappa_2)}{\epsilon} & \mu H_n'(\mu) \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Рассмотрим случай $E_z \neq 0$, что соответствует

$$\mu j_n(\kappa_1) H_n'(\mu) - \kappa_1 j_n'(\kappa_1) H_n(\mu) = 0. \tag{30}$$

В области $\frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \ll 1$ $\kappa_1 \approx \mu$ и уравнение (30) не может удовлетворяться, как вронскиан линейно независимых решений уравнения Бесселя, поэтому эти частоты запрещены. Это соответствует отсутствию волн с фазовой скоростью $V_{A1} \gg c$.

В области определенной обратным неравенством $|\omega^2| \lessapprox |\Omega_3^2 i|$ при дополнительном предположении $2\nu_1 = \frac{\Omega_1^2 r_0^2}{c} \ll 1$, т.е. малой погонной плотности ионов, будем иметь

$$|\mu^2| = \frac{|\omega^2| r_0^2}{c^2} < \frac{\Omega_1^2 r_0^2}{c^2} \ll 1. \tag{31}$$

Это позволяет в (30) провести разложение $H_n(\mu)$ и $H_n'(\mu)$, ограничиваясь первым членом разложения. В результате получим

$$-n\mu\, j_n(\kappa_1)\mu^{-n-1} - \kappa_1 j_n'(\kappa_1)\mu^{-n} = \kappa_1 j_{n-1}(\kappa_1)\mu^{-n} = 0. \tag{32}$$

Из этого уравнения следует, что

$$\kappa_1^2 = \frac{r_0^2 \frac{\omega^2}{c^2}\eta \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon}{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\left(1 + \frac{\Omega_3'^2 b^2}{c^2}\right) + \frac{\Omega_3'^4 b^2}{c^4}} = \lambda_{1,n-1}^2, \tag{33}$$

где $\lambda_{1,n-1}$ – корни уравнения $j_{n-1}(\lambda_{1,n-1}) = 0$.

Уравнение (32) имеет решение

$$\omega^2 = \Omega_1^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2} - k_1^2 c^2 \left\{\frac{u_0^2}{V_{A1}'^2} - \frac{u_0^2 c^2}{V_{A1}'^4\left(1 + \frac{c^2}{V_{A1}^2} + \frac{c^2}{V_{A1}'^2}\right)} - 1\right\}, \tag{34}$$

Для больших волновых векторов, т.е. $k_1^2 c^2 \gg \Omega_1^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2}$, условие возбуждения гидродинамических E –волн с учетом релятивизма запишется в виде:

$$u_0^2 > \frac{V_A^2 + V_A'^2{}_{\text{собств.}}}{\gamma_0^2} \tag{35}$$

здесь $V_A'^2{}_{\text{собств.}} = \gamma_0^2 V_A'^2$.

В нерелятивистском пределе формула (34) переходит в

$$u_0^2 > V_A^2 + V_A'^2,$$

что совпадает с условием, найденным в /3/ для бесконечной плазмы.

Инкремент нарастания гидродинамических волн имеет вид:

$$\gamma^2 = k_1^2 c^2 \left[\frac{u_0^2\left(1 + \frac{V_{A1}^2}{c^2}\right)}{V_{A1}^2 + V_{A1}'^2\left(1 + \frac{V_A^2}{c^2}\right)} - 1\right] - \left(\Omega_1^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2}\right) \tag{36}$$

в нерелятивистском приближении

$$|\gamma| = \sqrt{-\left(\Omega_1^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2}\right) + k_1^2 c^2\left(\frac{u_0^2}{V_{A1}^2 + V_{A1}'^2} - 1\right)}.$$

Рассмотрим спектр H –волн. При этом так же, как и в предыдущем случае, легко убедиться в том, что возмущения с $|\omega^2| \gg \Omega_{31}'^2$ отсутствуют. Действительно, дисперсионное уравнение для этих волн

$$\mu j_n(\kappa_2) H_n'(\mu) - \frac{\kappa_2 j_n'(\kappa_2) H_n(\mu)}{\epsilon} = 0 \tag{37}$$

в этой области не имеет решений, так как $\kappa_2 \approx \mu$ и $\epsilon = 1$.

В области $|\omega^2| \lessapprox |\Omega_{31}|^2$ будем иметь (здесь $|\Omega_{31}|$ выбирается меньшей из $|\Omega_{31}|$ и $|\Omega_{31}'|$):

$$|\mu^2| = \frac{|\omega^2| r_0^2}{c^2} < \frac{\Omega_{31}^2 r_0^2}{c^2} = \frac{\Omega_1^2 \omega^2}{\omega_{H1}^2}\frac{r_0^2}{c^2} \ll \frac{\Omega_1^2 r_0^2}{c^2} \ll 1,$$

$$|\kappa_2^2| = \frac{|\omega^2| r_0^2}{c^2}\epsilon \lessapprox \frac{\Omega_{31}^2 r_0^2}{c^2}\epsilon = \frac{\Omega_1^2 r_0^2}{c^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_{H1}^2}\epsilon\right) \ll 1,$$

так как $\left|\frac{\omega^2}{\omega_{H1}^2}\epsilon\right| \lessapprox 1$ (действительно, разложение велось так, что $\frac{1}{\epsilon} > O\left(\left|\frac{\omega^2}{\omega_{H1}}\right|\right)$, следовательно, $\epsilon < O\left(\left|\frac{\omega_{H1}^2}{\omega^2}\right)$, отсюда следует справедливость написанного выше неравенства).

Раскладывая до второго порядка по κ и μ уравнение (37), находим, что и в этой области в сделанном приближении решений нет, т.е. при сильных магнитных полях при $k_{||} = 0$ есть только E -волны.

5. Слабое магнитное поле и пучок малой плотности

Как было показано в работе /2/, без магнитного поля в рассматриваемой системе возникает апериодическая неустойчивость для азимутальных волн с инкрементом в нерелятивистской пределе $Im\,\omega = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}} \frac{u}{c}$, который при условии $N_{\text{пучк.}} \ll N_{\text{плазмы}}$ можно переписать с точностью до первого порядка по N пучка

$$Im\,\omega = \Omega_2 \frac{u}{c} . \tag{38}$$

В связи с этим оказывается интересным рассмотреть эту область частот при слабых магнитных полях, т.е.

$$\omega_{He}^2 \ll \Omega_e^2 ,$$

причем для пучка это условие не выполняется.

Будем рассматривать также нерелятивистский случай, т.е. $\frac{u^2}{c^2} \ll 1$ и $\omega'_{He} \approx \omega_{He}$. Кроме того, так как решения дисперсионного уравнения ищем в области $\omega \approx \omega_{He}$, то влиянием ионов можно пренебречь с точностью до первого порядка по $\mu = \frac{m_e}{m_i}$. Заметим дополнительно, что в рассматриваемой области, в связи с (38), представляет интерес случай, когда

$$|\omega^2 - \omega_{He}^2| > \Omega_e'^2 \frac{u_0^2}{c^2}$$

$$\omega_{He}^2 \approx \Omega_e'^2 \frac{u_0^2}{c^2} . \tag{40}$$

Рассмотрим выражение

$$\delta^2 = \left| \frac{\left(\frac{\Omega^2 \Omega_3'^2}{\omega^4 \epsilon} + \frac{\Omega_4'^2}{\omega^2}\right) \frac{u_0^2}{c^2}}{\eta} \right| \tag{41}$$

при этих предположениях.

Из них следует, что:

$$\frac{\Omega_3^2}{\omega^2} = \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2} , \quad \frac{\Omega_3'^2}{\omega^2} = \frac{\Omega_e'^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2} .$$

$$\epsilon = - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2} - \frac{\Omega_e'^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2} , \quad \eta = - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} ,$$

$$\frac{\Omega_4^2}{\omega^2} = \frac{\Omega_e^2 \omega_{He}}{\omega(\omega^2 - \omega_{He}^2)} \approx \frac{\Omega_3^2}{\omega^2} , \quad \frac{\Omega_4'^2}{\omega^2} \approx \frac{\Omega_3'^2}{\omega^2} .$$

и следовательно

$$\delta^2 \approx \left| \frac{\Omega_3'^4}{\omega^4 \eta} \right| \frac{u_0^2}{c^2} = \frac{\Omega_e'^4 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_{He}^2)^2 \Omega_e^2} \frac{u_0^2}{c^2} \ll 1,$$

поэтому для нахождения решений уравнения (38) в указанной области можно воспользоваться разложением по δ до второго порядка. Тогда решения уравнения (16-1) запишутся в виде:

$$\frac{\kappa_1^2}{r_0^2} = \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \eta}{1 + \frac{\Omega_e'^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2} \frac{u_0^2}{c^2}} + 0(\delta^2), \tag{42}$$

$$\frac{\kappa_2^2}{r_0^2} = \frac{\frac{\omega^4}{c^4} \epsilon^2 - \frac{\Omega^4}{c^4}}{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon} + 0(\delta^2) .$$

Далее $\beta_1 = \beta_2 = 0(\delta)$ и $a_1 \approx j_{n-1}(\kappa)$ ($a_1 = 0$ $\kappa_1 = \lambda_{1, n-1}$).

Это значит, что с точностью до членов второго порядка возможно разделение продольных и поперечных волн, и дисперсионное уравнение записывается в виде:

$$\Delta M = \left\| \begin{matrix} j_n(\kappa_1) & H_n(\mu) \\ \kappa_1 j_n'(\kappa_1) & \mu H_n(\mu) \end{matrix} \right\| \left. \begin{matrix} j_n(\kappa_2) & H_n(\mu) \\ a_2(\kappa_2) - \frac{i}{\omega c r_0} & \mu H_n'(\mu) \end{matrix} \right| = 0. \tag{43}$$

для волн с $E_z \neq 0$ имеются решения при тех же дополнительных ограничениях, которые накладывались при рассмотрении немагнитоактивной плазмы ($\mu^2 = \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2} \ll 1$).

$$\frac{\frac{\omega^2}{c^2} \eta}{1 + \frac{\Omega_e'^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2} \frac{u_0^2}{c^2}} = k_1^2 \tag{44}$$

Это уравнение для больших k_1 дает

$$\omega^2 = \omega_{He}^2 - \Omega_e'^2 \frac{u_0^2}{c} , \tag{45}$$

т.е. в магнитоактивной плазме неустойчивости типа (38) в нерелятивистском пределе могут быть задавлены магнитным полем при условии, что $\omega^2_{He} \gtrsim \Omega'^2_e \frac{u_0^2}{c^2}$.

Далее можно показать, что формула (45) остается справедливой и в релятивистской области. Действительно, выражение (38) для инкремента в плазме без магнитного поля в нерелятивистском пределе совпадает с $Im\,\omega$ при разложении ω по $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ (предполагается, что $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \ll 1$) с учетом релятивизма . Точно так же можно показать, что в релятивистском случае, вводя параметр малости $\frac{\Omega'^2_e}{\Omega_e^2} \ll \frac{1}{\gamma_0^2}$ и решая дисперсионное уравнение для волн с $E \neq 0$ (и как всюду выше $\vec{k} \perp \vec{u}$) в предположениях (39) и (40) и учитывая также, что $a_1(x) \approx j_{n-1}(\kappa)$, получаем решение в виде (45). Таким образом, неустойчивости типа (38) при сделанных выше ограничения пропадают в релятивистском случае при соответствующем выборе магнитного поля.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность О.И.Ярковому, В.Г.Маханькову и товарищам по работе за полезные обсуждения.

Литература

1. В.П.Силин и А.А.Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Атомиздат, 1961.

2. О.И.Ярковой. Азимутальные волны в системе плазма-пучок ограниченного радиуса. Препринт ОИЯИ Р-1053 Дубна, 1962.

3. В.Г.Маханьков и А.А.Рухадзе. Ядерный синтез, 2, 177 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 января 1964 г.