ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

И.М. Граменицкий, М.И. Подгорецкий

1505

СТАТИСТИКА ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ СО ШКАЛОЙ

Дубна 1964

И.М. Граменицкий, М.И. Подгорецкий

1505

СТАТИСТИКА ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ СО ШКАЛОЙ

Дубна 1964

Обычно предполагается, что результат измерения y связан с измеряемой величиной x соотношением

$$y = x + \eta \quad , \tag{1}$$

где η – непрерывная случайная величина, имеющая смысл ошибки измерения. Если систематические ошибки отсутствуют, то дифференциальный закон распределения $\phi(\eta)$ является четной функцией, монотонно убывающей с ростом $|\eta|$. Точность одиночного измерения характеризуется величиной $D_y^{1/2}$, где

$$D_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\eta)\, \eta^2\, d\eta \; . \tag{2}$$

Во многих случаях можно считать, что

$$\phi(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\, e^{-\eta^2/2D} \; , \tag{3}$$

и тогда $D_y = D$. Если произведено N независимых измерений, то рассматривают вспомогательную случайную величину

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_1^N y_i \; , \tag{4}$$

для которой $\bar{y}_N = x$, а дисперсия

$$D_{y_N} = D_y / N \; . \tag{5}$$

Отсюда следует, что при достаточно большом числе измерений можно получить любую точность.

В реальных условиях измерения всегда производятся с помощью различного рода шкал. Это значит, что, вопреки обычному предположению, результат измерения y является дискретной случайной величиной, принимающей только те значения, которые отстоят друг от друга на цену деления Δ. Практическая значимость этого обстоятельства зависит от величины параметра $z = \Delta/\sqrt{D}$. Если выполнено крайнее условие

$$z \gg 1 \; , \tag{6}$$

то соотношение (2) полностью теряет свою силу; все измерения дают одинаковый результат, т.е. $D_y = 0$. Ясно также, что в этом случае не происходит никакого увеличения точности определения x с ростом числа измерений. В противоположном предельном случае, когда

$$z << 1 , \tag{6}$$

возможные значения результатов измерений очень близки друг к другу и величина y может считаться непрерывной, что влечет за собой выполнение соотношений (2) и (5). Цель настоящей работы состоит в исследовании промежуточной области, когда $z \sim 1$, и ее связей с двумя указанными крайними случаями.

При измерениях с помощью шкалы необходимо условиться о способе округления. Можно, например, приписывать величине y значение, равное ближайшему к ней левому делению шкалы, либо ближайшему правому; можно считать, что величина y равна полусумме этих значений и т.д. Ясно, что результаты, получаемые при каждом из этих способов, отличаются друг от друга только на соответствующее постоянное число ($\Delta, -\Delta, \pm\Delta/2$ и т.д.). Ниже мы всюду будем для определенности предполагать, что округление производится по ближайшему левому делению шкалы. Ясно также, что, не нарушая общности, можно считать измеряемую величину x заключенной в пределах $(0, \Delta)$ или, учитывая симметрию задачи, даже в пределах $(0, \Delta/2)$. Функцию распределения $\phi(\eta)$ мы будем считать произвольной и только при получении некоторых окончательных численных результатов будем пользоваться выражением (3).

На рис. 1 схематически изображены шкала, измеряемая величина x и кривая $\phi(\eta)$, расположенная таким образом, что ее максимум находится в точке x. В соответствии со сказанным выше, результат измерения может быть равен $k\Delta$, где $K=0, \pm 1, \pm 2...$. Для соответствующих вероятностей p_k справедливы, как легко видеть, равенства:

$$p_0 = \int_0^x \phi(\eta)\,d\eta + \int_0^{\Delta-x} \phi(\eta)\,d\eta ,$$

$$p_1 = \int_{\Delta-x}^{2\Delta-x} \phi(\eta)\,d\eta , \quad p_2 = \int_{2\Delta-x}^{3\Delta-x} \phi(\eta)\,d\eta, \ldots \quad p_k = \int_{k\Delta-x}^{(k+1)\Delta-x} \phi(\eta)\,d\eta, \ldots \tag{7}$$

$$p_{-1} = \int_x^{\Delta+x} \phi(\eta)\,d\eta, \quad p_{-2} = \int_{\Delta+x}^{2\Delta+x} \phi(\eta)\,d\eta, \ldots \quad p_{-k} = \int_{(k-1)\Delta+x}^{k\Delta+x} \phi(\eta)\,d\eta, \ldots$$

Среднее значение

$$\bar{y} = \Delta \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} k\,p_k$$

с помощью соотношений (7) может быть после простых преобразований приведено к виду:

$$\bar{y} = -\frac{\Delta}{2} + \Delta \left\{ \int_0^x \phi(\eta)\, d\eta + \int_{\Delta-x}^{\Delta+x} \phi(\eta)\, d\eta + \int_{2\Delta-x}^{2\Delta+x} \phi(\eta)\, d\eta + \ldots \right\}. \tag{8}$$

Рассмотрим некоторые свойства этого выражения. Дифференцирование по x дает

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \Delta \left\{ \phi(x) + \phi(\Delta - x) + \phi(\Delta + x) + \phi(2\Delta - x) + \ldots \right\}$$

т.е. $\bar{y}$ монотонно растет вместе с x.

Предположим теперь, что выполнено условие (6'). Тогда в каждом из входящих в (8) интегралов верхний и нижний пределы очень близки друг к другу, и, как легко видеть, выражение в фигурных скобках приближенно равно

$$\frac{2x}{\Delta} \int_0^\infty \phi(\eta)\, d\eta = \frac{x}{\Delta},$$

что дает

$$\bar{y} = -\frac{\Delta}{2} + x. \tag{8'}$$

Интересно заметить, что этот же результат справедлив точно при любом соотношении между Δ и D, если только $x = 0$, либо $x = \Delta/2$. Действительно, при $x = 0$ из (8) сразу получаем

$$\bar{y} = -\frac{\Delta}{2},$$

что согласуется с (8'). При $x = \Delta/2$ соотношение (8) принимает вид:

$$\bar{y} = -\frac{\Delta}{2} + \Delta \left\{ \int_0^{\Delta/2} \phi(\eta)\, d\eta + \int_{\Delta/2}^{3\Delta/2} \phi(\eta)\, d\eta + \ldots \right\} = -\frac{\Delta}{2} + \Delta \int_0^\infty \phi(\eta)\, d\eta,$$

т.е. $\bar{y} = 0$, что снова совпадает с (8').

Предположим теперь, что, вместо (6'), выполнено неравенство (6). Тогда (8) принимает вид:

$$\bar{y} = -\frac{\Delta}{2} + \Delta \left\{ \int_0^x \phi(\eta)\, d\eta + \int_{\Delta-x}^{\Delta+x} \phi(\eta)\, d\eta \right\}. \tag{8''}$$

Если еще дополнительно предположить, что $x < \Delta/2$, то второй интеграл исчезает и

$$\bar{y} = -\frac{\Delta}{2} + \int_0^x \phi(\eta)\, d\eta = -\Delta \int_x^\infty \phi(\eta)\, d\eta. \tag{8'''}$$

При $x \gg \sqrt{D}$ из (8''') следует, что $\bar{y}$ очень быстро стремится к нулю, т.е. результат измерения практически не зависит от x. Как уже говорилось выше, в этих условиях повторные измерения не приводят к увеличению точности.

В общем случае соотношение (8) неудобно для практического использования. Поэтому в таблице 1 даны численные значения величины $\bar{y}$ в зависимости от x при разных соотношениях между Δ и $\sqrt{D}$; в соответствии с указанными ранее особенностями рассматриваемой задачи, величина x изменяется только от 0 до $\Delta/2$.

Перейдем теперь к исследованию поведения $\overline{y^2}$. По определению имеем

$$\overline{y^2} = \Delta \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} k^2 p_k \ , \tag{9}$$

что дает

$$\frac{1}{\Delta^2}\overline{y^2} = 1^2\left\{\int_x^{\Delta+x}\phi(\eta)\,d\eta + \int_{\Delta-x}^{2\Delta+x}\phi(\eta)\,d\eta\right\} + 2^2\left\{\int_{\Delta+x}^{2\Delta+x}\phi(\eta)\,d\eta + \int_{2\Delta-x}^{3\Delta-x}\phi(\eta)\,d\eta\right\} + \dots \tag{9'}$$

Дифференцируя (9'), можно легко получить равенство

$$\frac{1}{\Delta^2}\frac{d\overline{y^2}}{dx} = \{\phi(\Delta-x) + 3\phi(2\Delta-x) + 5\phi(3\Delta-x) + \dots\} -$$
$$-\{\phi(x) + 3\phi(\Delta+x) + 5\phi(2\Delta+x) + \dots\} .$$

Если $x < \Delta/2$, то аргумент каждого члена нижней суммы больше аргумента соответствующего члена верхней суммы. Отсюда следует, что $\frac{d\overline{y^2}}{dx} < 0$, поскольку $\phi(x)$ монотонно уменьшается с ростом x. Таким образом, при $x < \Delta/2$ величина $\overline{y^2}$ уменьшается при увеличении x, в то время, как $\bar{y}$ – растет. Отсюда следует, что дисперсия D_y в рассматриваемом интервале $(0, \Delta/2)$ монотонно уменьшается[x)].

Если справедливо неравенство (6'), то из (9) непосредственно следует, что

$$\overline{y^2} \to \int \eta^2\phi(\eta)\,d\eta ,$$

т.е. дискретность отсчетов перестает влиять на результаты измерений. В общем случае приходится ограничиться определением численных значений $\overline{y^2}$ и D_y.

Величины D_y/D для $x = 0$ и $x = \Delta/2$ при различных $\Delta/\sqrt{D}$ приведены в таблице 2. Для малых $\Delta/\sqrt{D}$ точки, соответствующие промежуточным значениям x, не приведены, так как выше была доказана монотонность изменения дисперсии с ростом x. Для $\Delta/\sqrt{D}=2$ и $\Delta/\sqrt{D}=3$ показана также зависимость D_y от x (см. таблицу 3).

Обращает на себя внимание, что даже при $\Delta/\sqrt{D}=2$ отличие D_y от D не очень велико. Однако при $\Delta/\sqrt{D}=3$ оно уже значительно больше и быстро увеличивается с дальнейшим ростом $\Delta/\sqrt{D}$. В частности, в условиях, в которых справедливо (8''), выражение для $\overline{y^2}$ переходит, как легко видеть, в

$$\overline{y^2} = \Delta^2\int_x^{\infty}\phi(\eta)\,d\eta ,$$

т.е. дисперсия

---

x) Из симметрии задачи ясно, что в интервале $(\Delta/2, \Delta)$ дисперсия монотонно растет.

$$D_y = \Delta^2 \left(1 - \int_x^\infty \phi(\eta)\, d\eta\right) \int_x^\infty \phi(\eta)\, d\eta \ . \tag{10}$$

Если еще $x/\sqrt{D} \gg 1$, то интегралом в скобках можно пренебречь, что дает

$$D_y = \Delta^2 \int_x^\infty \phi(\eta)\, d\eta \ . \tag{10'}$$

При большом числе измерений N, в соответствии с (5), имеем также

$$D_{y_N} = \frac{\Delta^2}{N} \int_x^\infty \phi(\eta)\, d\eta \ . \tag{10''}$$

Решая задачу определения величины x по результату измерения y_N, экспериментатор обычно считает, что x является корнем уравнения (8), в левую часть которого вместо $\bar{y}$ подставлена величина y_N, определенная с точностью $D^{1/2}_{y_N}$. Как легко показать, из указанной процедуры сразу следует, что в интересующем нас крайнем случае квадрат относительной ошибки вычисляемого таким образом значения x

$$\delta_x^2 = \int_x^\infty \phi(\eta)\, d\eta \ / \ N\, x^2 \phi^2(x). \tag{11}$$

Эта величина очень быстро растет вместе с x. Иллюстрацией может служить рис. 2, на котором показана функция $a(x) = \dfrac{\int_x^\infty \phi(\eta)\, d\eta}{x^2 \phi^2(x)}$ в случае, когда $\phi(\eta)$ определена в соответствии с (3) при $D=1$ (иными словами, x выражено в долях $\sqrt{D}$). Ясно, что в рассматриваемом случае для получения приемлемой точности в определении x требуется нереально большое число измерений, катастрофически растущее с увеличением $x/\sqrt{D}$. С практической точки зрения возникает ситуация, в которой результат измерения не зависит от значения измеряемой величины x, а повторение измерений не приводит к увеличению точности.

На первый взгляд положение кажется безвыходным. Известно, однако, что и в этом случае возможно сколь угодно точное определение x при условии некоторого изменения процедуры измерения. Именно, начало измеряемого отрезка следует совмещать со шкалой не в нулевой точке шкалы, а случайным образом, равновероятно внутри интервала $(0,\Delta)$. В результате такого совмещения правый конец деления, т.е. точка Δ, может оказаться либо внутри измеряемого отрезка x, либо вне его. Вероятность первого исхода мы обозначим p, и ясно, что

$$p = x/\Delta \ . \tag{12}$$

Для числа соответствующих измерений n справедливы соотношения

$$\bar{n} = Np, \qquad D_n = N_p(1-p), \tag{13}$$

где N – полное число измерений.

Ясно поэтому, что величина x может быть определена равенством

$$x = n/N, \tag{14}$$

причем из (13) сразу следует, что квадрат относительной ошибки

$$\delta_x^2 = \frac{1-(x/\Delta)}{(x/\Delta)} \quad \frac{1}{N} \tag{15}$$

быстро уменьшается с ростом N .

Заметим, что смысл рассмотренного изменения процедуры измерения сводится к добавлению к величине $x+\eta$ некоторой вспомогательной величины ξ и измерению суммы $x+\eta+\xi$. Далее считалось, что величина ξ распределена равномерно в интервале $(0,\Delta)$. Ясно, что сходный результат может быть получен и при других законах распределения ξ , например, при гауссовом распределении. В некоторых случаях такой обобщенный подход может быть более удобным.

Авторы благодарны Е.Богдановичу, Й.Л.Розенталю и Л.И.Сарычевой за интересные замечания, способствовавшие выполнению настоящей работы.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1963 г.

Таблица I

$\frac{\Delta}{\sqrt{D}} = 0{,}25$		$\frac{\Delta}{\sqrt{D}} = 0{,}5$		$\frac{\Delta}{\sqrt{D}} = 1{,}0$		$\frac{\Delta}{\sqrt{D}} = 2{,}0$		$\frac{\Delta}{\sqrt{D}} = 3{,}0$	
$\frac{x}{\sqrt{D}}$	$\frac{\bar{y}}{\sqrt{D}}$	$\frac{x}{\sqrt{D}}$	$\frac{\bar{y}}{\sqrt{D}}$	$\frac{x}{\sqrt{D}}$	$\frac{\bar{y}}{\sqrt{D}}$	$\frac{x}{\sqrt{D}}$	$\frac{\bar{y}}{\sqrt{D}}$	$\frac{x}{\sqrt{D}}$	$\frac{\bar{y}}{\sqrt{D}}$
0,00	-0,I25	0,00	-0,250	0,00	-0,500	0,0	- I,000	0,0	-I,500
0,0I	-0,II5	0,02	-0,230	0,05	-0,450	0,I	- 0,899	0,2	-I,25I
0,02	-0,I06	0,04	-0,2II	0,I0	-0,400	0,2	- 0,797	0,4	-I,09I
0,03	-0,096	0,06	-0,I9I	0,I5	-0,350	0,3	-0,696	0,6	-0,799
0,05	-0,077	0,I0	-0,I52	0,25	-0,250	0,5	-0,496	I,0	-0,408
0,07	-0,057	0,I2	-0,I33	0,30	-0,200	0,6	-0,396	I,2	-0,239
0,08	-0,048	0,I4	-0,III	0,35	-0,I50	0,7	-0,296	I,5	0,000
0,09	-0,038	0,I6	-0,094	0,40	-0,I00	0,8	-0,I97		
0,I0	-0,028	0,I8	-0,074	0,45	-0,049	0,9	-0,099		
0,II	-0,0I8	0,20	-0,055	0,50	0,000	I,0	0,000		
0,I2	-0,008	0,22	-0,035						
0,I25	0,000	0,25	0,000						

Таблица II

$\Delta/\sqrt{D}$		0,25	0,50	I,0	2,0	3,0
$\frac{D_y}{D}$	при $x=0$	I,02I	I,02I	I,084	I,363	2,299
	при $x=\frac{\Delta}{2}$	I,004	I,020	I,083	I,279	I,202

Таблица III

$\Delta/\sqrt{D}=2$		$\Delta/\sqrt{D}=3$	
$x/\sqrt{D}$	D_y/D	$x/\sqrt{D}$	D_y/D
0,0	I,363	0,0	2,299
0,I	I,36I	0,2	2,249
0,2	I,357	0,4	2,II0
0,3	I,349	0,6	I,908
0,4	I,339	0,8	I,680
0,5	I,328	I,0	I,469
0,6	I,3I7	I,2	I,302
0,7	I,306	I,5	I,202
0,8	I,296		
0,9	I,286		
I,0	I,279		

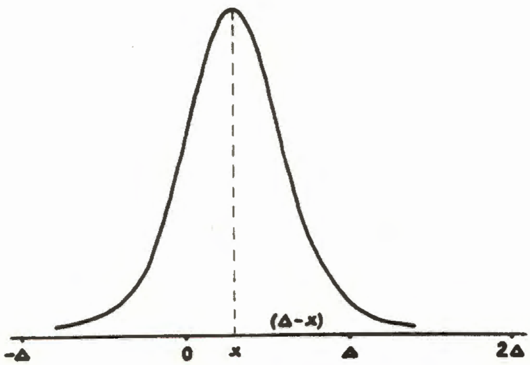

Рис. 1.

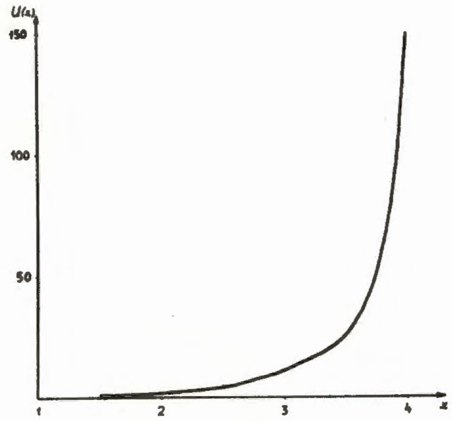

Рис. 2. Зависимость величины $u(x) = \int_x^\infty \phi(\eta)\, d\eta \,/\, x^2 \phi^2(x)$ от x.