Лебеденко В.М.

ВИНИТИ 1971

№ 1499-70 Деп.

В.М.ЛЕБЕДЕНКО

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ СО СВОЙСТВОМ (Р)

I. Введение

В этой работе рассматриваются абелевы группы, у которых любая система образующих содержит неприводимую подсистему. В дальнейшем это свойство групп мы будем обозначать буквой "P".

Общеизвестно, что этим свойством обладают группы с конечным числом образующих. Класс всех абелевых групп с этим свойством гораздо шире. Например, в своей работе [4] Властимил Длаб показал, что среди примарных абелевых групп свойством (P) обладают ограниченные[x)] группы, и только они. В той же статье В. Длаб выдвинул гипотезу: для того, чтобы периодическая абелева группа обладала свойством (P), необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной. (Вопрос о справедливости этой гипотезы остается пока открытым). Из последующего будет видно, что это условие необходимо. Что касается достаточности, то мы лишь покажем, что свойством (P) обладают периодические группы вида $T = G_p + G^*$, где G_p - произвольная ограниченная примарная группа, а G^* - произвольная конечная группа.

Ниже будет показана справедливать и более сильного утверждения: свойством (P) обладают смешанные группы вида: $T + \mathcal{T}_n$, где T - периодическая ограниченная группа указанного выше типа, а $\mathcal{T}_n$ - свободная абелева группа конечного ранга $n > 0$.

Проводя рассмотрение иного плана, мы покажем, что среди абелевых групп без кручения свойством (P) обладают свободные группы конечного ранга, и только они, а среди смешанных групп этим свойством могут обладать только группы вида

$$T + \mathcal{T}_n \qquad (I)$$

---

x) В дальнейшем мы будем называть группу ограниченной, если она периодическая, и порядки ее элементов ограничены в совокупности.

где T - ограниченная периодическая группа, а $\mathcal{T}_n$ - свободная абелева группа конечного ранга $n \geqslant 0$.

П. Определения и терминология

В дальнейшем будем понимать под „$\subset$" строгое вложение подмножеств, в отличие от „$\subseteq$".

Теоретико-множественную разность множеств A и B будем обозначать через $A \setminus B$. Если множество B состоит из одного элемента g, то разность $A \setminus B$ будем записывать как $A \setminus g$. Иногда мы будем употреблять сокращение: „$g.s.$" - система образующих.

Множества элементов g_λ, где $\lambda \in \Lambda$, будем записывать в виде: $[g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ или в виде $[g_i]_1^n$, где $1 \leqslant n \leq \aleph_0$, если это множество не более, чем счетно. Если фактор-группа $G/A = \{\bar{\mathcal{D}}\}$, где $\bar{\mathcal{D}} = [\bar{g}_\delta]_{\delta \in \Delta}$, то переход $\bar{\mathcal{D}} \to \mathcal{D} = [g_\delta]_{\delta \in \Delta}$ будет означать (если это специально не оговорено) выбор представителей $g_\delta \in \bar{g}_\delta$ в классах из $\bar{\mathcal{D}}$ (по одному в каждом), и наоборот, $g_\delta \to \bar{g}_\delta$ ($\mathcal{D} \to \bar{\mathcal{D}}$) будет означать, что каждому элементу ставится в соответствие его образ в G/A. Иногда мы будем употреблять сокращение $g = f(\mathcal{D})$, где $f(\mathcal{D})$ некоторая линейная комбинация элементов $\mathcal{D}$: $g = f(\mathcal{D}) = k_1 g_{\delta_1} + \dots + k_n g_{\delta_n}, 0 < n < \aleph_0$, k_i - целые числа, $g_{\delta_i} \in \mathcal{D}$. Таким образом,

$$g = f(\mathcal{D}) \Leftrightarrow g \in \{\mathcal{D}\} \qquad (2)$$

Определение I. Пусть некоторая группа $G = \{\mathcal{D}\}$. Определим непустое подмножество $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$ как относительно неприводимое подмножество, если для любого $g \in \mathcal{D}_0$ выполняется соотношение:

$$g \ne g(\mathcal{D}\setminus g) = g'(\mathcal{D}_0\setminus g) + g''(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0) \qquad (3)$$

(т.е. $g \,\overline{\in}\, \{\mathcal{D}\setminus g\}$ при $\forall g \in \mathcal{D}_0$). Если (3) выполняется, то будем писать

$$\mathcal{D}_0 \underset{\text{о.н}}{\subseteqq} \mathcal{D} \qquad (4)$$

Замечания:

а) если $\mathcal{D}_0 \underset{\text{о.н.}}{\subseteqq} \mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$, то из (3) следует, что это просто неприводимая $g.s.$ G ;

в) если $\mathcal{D}_0 \setminus g = \varnothing$ (пустое множество), то положим соответствующий член в (3) равным нулю.

Ниже мы будем использовать классификацию систем образующих введенную В.Длабом[2].

Различные типы $g.s.$ как здесь, так и ниже, будем обозначать римскими цифрами в круглых скобках. Таким образом, будем различать следующие типы (определения см. ниже).

(I) - неприводимая $g.s.$;

(П) - приводимая, но не сильно приводимая и не наследственно приводимая $g.s.$;

(Ш) - сильно приводимая, но не наследственно приводимая $g.s.$;

(IУ) - наследственно приводимая $g.s.$, но не сильно приводимая;

(У) - наследственно и сильно приводимая $g.s.$, но не наследственно сильно приводимая;

(УI) - наследственно сильно приводимая $g.s.$.

Пояснение. Эта классификация проведена по отношению $g.s.(\mathcal{D})$ к равенству

$$g = f(\mathcal{D}), \tag{5}$$

где $g \in \mathcal{D}$, $\{\mathcal{D}\} = G$. Если (5) не выполняется ни для одного $g \in \mathcal{D}$, то $\mathcal{D}$ - неприводимая $g.s$, а в противном случае $\mathcal{D}$ - приводимая $g.s.$.

Если $\mathcal{D}$ - такая приводимая $g.s.$, что и любая ее подсистема $\mathcal{D}'$, где $\{\mathcal{D}'\} = \{\mathcal{D}\}$, приводима, то такая $g.s.$ называется наследственно приводимой.

Сильно приводимой называется такая $g.s.$ $\mathcal{D}$, у которой соотношение (5) выполняется для любого $g \in \mathcal{D}$. А Наследственно сильно приводимой называется такая $g.s.$, что любая ее подсистема $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$, где $\{\mathcal{D}'\} = \{\mathcal{D}\}$ сильно приводима.

В.Длаб[2,3] показал, что в одной и той же группе могут сосуществовать несколько типов (из (I) - (УI)) систем образующих и что (в его систематике) возможны только 8 комбинаций этих типов.

В дальнейшем будем употреблять для классов групп, характеризуемых этими комбинациями типов систем образующих, следующие обозначения: каждый класс обозначается буквой $\mathcal{D}$ с шестизначным комплексом из нулей и единиц, в зависимости от наличия в его группах систем образующих того или иного типа. Например, $\mathcal{D}(1,1,1,0,0,0)$ (интересующий нас) класс с комбинацией типов $g.s.$ (I), (П), (Ш).

Таким образом, все абелевы группы распадаются на восемь непересекающихся классов (в смысле В.Длаба[3]):

$\mathcal{D}(1,0,0,0,0,0)$ - состоит из нулевой группы

$\mathcal{D}(1,1,0,0,0,0)$ - состоит из одной группы $C(2)$ (циклическая второго порядка).

$\mathcal{D}(1,1,1,0,0,0)$ - ?*

$\mathcal{D}(1,1,1,1,1,0)$ - ?

$\mathcal{D}(1,1,1,1,1,1)$ - ?

$\mathcal{D}(0,0,0,1,1,0)$ - ?

$\mathcal{D}(0,0,0,1,1,1)$ - ?

$\mathcal{D}(0,0,0,0,0,1)$ - состоит из всех полных групп (см. Длаб[2]).

<u>Замечание</u>. Класс $\mathcal{D}(1,1,1,0,0,0)$ характеризуется свойством (P), т.е. в любой его группе любая $g.s.$, содержит неприводимую подсистему $(g.s.)$. Таким образом, (при $|G|>2$) $G\in\mathcal{D}(1,1,1,0,0,0)$, тогда и только тогда, когда G обладает свойством (P).

Если группа $G\supseteq K\neq\emptyset$, то символом $\{K\}_*$ в случае, когда G без кручения, будем обозначать сервантную подгруппу группы G, порожденную K.

Тип элемента a группы без кручения и его характеристику (А.Курош[I]) будем обозначать, соответственно, через $T(a)$ и $H(a)=(k_1,k_2,\ldots\ldots)$.

В дальнейшем под группами будем понимать абелевы группы.

Ш. <u>О периодических группах</u>

Лемма I. Если группа G обладает свойством (P), то и любое ее прямое слагаемое обладает этим свойством.

19267

Доказательство. Если $G = A + B$ и $A = \{K\}$, то $K \cup L$, где $\{L\} = B$, система образующих группы G. Она, по условию, содержит неприводимую подсистему $K' \cup L'$, где $K' \subseteq K$, $L' \subseteq L$. Отсюда следует, что $\{K'\} = A$ и K' -неприводима.

Следствие. Если прямое слагаемое группы обладает наследственно приводимой системой образующих, то и группа обладает системой такого рода.

Лемма 2. Любая периодическая группа типа $G^* = \sum_{i=1}^{\infty} C(p_i^{k_i})$, где $0 < k_i < \infty \ (i = 1, 2, \dots)$, $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, p_i -простые числа, $C(p_i^{k_i})$ -циклические группы порядков $p_i^{k_i}$, обладает наследственно приводимой $g.s.$ типа (УI).

Доказательство. Пусть $C(p_i^{k_i}) = \{b_i\}$, т.е. $O(b_i) = p_i^{k_i}$. Образуем элементы $d_n^* = \sum_{i=1}^{n} b_i \ (n = 1, 2, \dots)$. Очевидно, что $O(d_n^*) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$ и все d_n^* удовлетворяют соотношениям: при любых n и m $(n < m)$

$$d_n^* = S_{n,m} \left(\prod_{i=n+1}^{m} p_i^{k_i} \right) d_m^* \tag{6}$$

где $S_{n,m}$ -некоторое целое число, такое, что $(S_{n,m}, p_1 \cdots p_n) = 1$. В частности (это будет использовано в главе IУ), элементы d_i^* удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} p_1^{k_1} d_1^* = 0 \\ d_1^* - S_{1,2} p_2^{k_2} d_2^* = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ d_n^* - S_{n,n+1} p_{n+1}^{k_{n+1}} d_{n+1}^* = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{6'}$$

Очевидно также, что $\mathcal{D}^* = [d_1^*, d_2^*, \dots, d_n^*, \dots]$ - $g.s.$ G^* и что G^* не с конечным числом образующих. Следовательно, любая подсистема из $\mathcal{D}^*$, порождающая G^*, счетна. Но, как показывают сооношения (6), любая счетная подсистема из $\mathcal{D}^*$ порождает G^*.

Таким образом $\mathcal{D}^*$ -наследственно сильно приводимая g.s. (тип (УI)). Лемма доказана.

Следствие. $G^* \in \mathcal{D}(1,1,1,1,1,1)$ (см. В.Длаб /2,3/).

Теорема I. Среди периодических абелевых групп свойством (P) могут обладать только ограниченные группы.

Доказательство. Допустим, что неограниченная группа G обладает свойством (P).

Возможны два случая:

I) хоть одна из примарных компонент G неограничена

2) все примарные компоненты G ограничены, но их бесконечное множество.

В первом случае получаем, что неограниченная примарная компоненты группы G имеет наследственно приводимую g.s. (В. Длаб /4/). Это противоречит лемме I.

Во втором случае группа G должна иметь прямое слагаемое типа G^* (лемма 2) и поэтому, ввиду следствия леммы I, группа должна обладать наследственно приводимой g.s. .

Итак, предположив, что неограниченная группа G обладает свойством (P), мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 2. Если группа $G = A + \sum_{i=1}^{n} \{b_i\}$, где $0 \le n < \infty$, $\{b_i\}$ -какие-то циклические группы и A обладает свойством (P), то G обладает свойством (P).

Доказательство. Пусть $G = \{\mathcal{D}\}$, где $\mathcal{D} = [g_\delta]_{\delta \in \Delta}$. Тогда при каждом $\delta \in \Delta$ $g_\delta = a_\delta + b_\delta$, где $a_\delta \in A$, $b_\delta \in \sum_{i=1}^{n}\{b_i\}$ и $[a_\delta]_{\delta \in \Delta}$ - g.s. A , группы со свойством (P). Следовательно, есть $\Delta_1 \subseteq \Delta$, такое, что $[a_\delta]_{\delta \in \Delta_1}$ -неприводимая g.s. A .

13267

Пусть $\mathcal{D}_1=[g_\delta]_{\delta\in\Delta_1}$ и $b_1,\dots,b_n\in\{g_{\delta_1},\dots,g_{\delta_m}\}$ $(g_{\delta_i}\in\mathcal{D})$.

Тогда $\mathcal{D}_1\cup[g_{\delta_i}]_1^m$ g.s. G. Если при этом $[g_{\delta_i}]_1^m\subseteq\{\mathcal{D}_1\}$, то $\mathcal{D}_1$ - g.s. G и неприводимая, ввиду выбора Δ_1. Поэтому будем считать, что $\{\mathcal{D}_1\}\subset G$, $b_i\in\{[g_{\delta_i}]_1^m\cup\mathcal{D}_1\}$ $(1\le i\le n)$, где $[g_{\delta_i}]_1^m\cap\mathcal{D}_1=\varnothing$, что $[g_{\delta_i}]_1^m\subseteq_{\text{О.Н.}}[g_{\delta_i}]_1^m\cup\mathcal{D}_1$ (так как в противном случае можно удалить некоторые g_{δ_i}).

Пусть $g_{\delta_i}=a_{\delta_i}+b_{\delta_i}$ $(i=1,\dots,m)$, где $b_{\delta_i}\in\sum\limits_{i=1}^{n}\{b_i\}$, $a_{\delta_i}\in A$.

Если $a_{\delta_i}=0$ $(i=1,2,\dots,m)$, то система $[g_{\delta_i}]_1^m\cup\mathcal{D}_1$ -неприводимая g.s. G, т.к. при этом любая линейная комбинация элементов g_{δ_i} $(i=1,\dots,m)$ содержится в $\sum\limits_{i=1}^{n}\{b_i\}$, а для любых $g_\delta\in\mathcal{D}_1$ выполняются соотношения: $g_\delta\ne f(\mathcal{D}\setminus g_\delta)+b$, где $b\in\sum\limits_{i=1}^{n}\{b_i\}$.

Поэтому не будем считать, что $a_{\delta_i}=0$ (при всех $i=1,2,\dots,m$). Пусть $a_{\delta_1},\dots,a_{\delta_m}\in\{a_{\delta'_1},\dots,a_{\delta'_s}\}$ (где $\delta'_i\in\Delta_1$).

Тогда при любом $g_{\delta_0}\in\mathcal{D}_1\setminus[g_{\delta'_i}]_1^s$

$$g_{\delta_0}\ne f(\mathcal{D}_1\setminus g_{\delta_0})+\sum_1^m k_i g_{\delta_i} \qquad (7)$$

так как в противном случае, учитывая, что $a_{\delta_0}\in\left([a_\delta]_{\delta\in\Delta_1}\right)\setminus\left([a_{\delta'_i}]_1^s\right)$ и

$$\sum_{i=1}^m k_i a_{\delta_i}=\sum_{i=1}^s l_i a_{\delta'_i}\ \left(a_{\delta_i}\in\{a_{\delta'_1},\dots,a_{\delta'_s}\},\ i=1,2,\dots,m\right)$$

получаем соотношение:

$$a_{\delta_0}=f\left(([a_\delta]_{\delta\in\Delta_1}\setminus a_{\delta_0}\right)+\sum_{i=1}^s l_i a_{\delta'_i}=f'\left(([a_\delta]_{\delta\in\Delta_1})\setminus a_{\delta_0}\right)$$

Но $[a_\delta]_{\delta\in\Delta_1}$ -неприводимая g.s. A.

Следовательно, справедливы соотношения (7), т.е. $(\mathcal{D}_1\setminus[g_{\delta'_i}]_1^s)\cup(g_{\delta_1},\dots,g_{\delta_m})\subseteq_{\text{О.Н.}}\mathcal{D}_1\cup[g_{\delta_1},\dots,g_{\delta_m}]$

Если вся g.s. $\mathcal{D}_1\cup[g_{\delta_1},\dots,g_{\delta_m}]$ приводима, то, удалив не более s элементов из ее подмножества $[g_{\delta'_i}]_1^s\subseteq\mathcal{D}_1$, получим неприводимую g.s. G. Теорема доказана.

Так как ограниченные примарные группы обладают свойством (P) (В.Длаб /4/), то из теоремы 2 получаем следствие: всякая группа, представимая в виде:

$$G = T_p + T' + \mathfrak{F}(n) \tag{8}$$

где T_p -произвольная ограниченная примарная группа, T' произвольная конечная группа, $\mathfrak{F}(n)$ -свободная группа конечного ранга $n \geqslant 0$, обладает свойством (P).

Теорема I утверждает, что условие ограниченности периодической группы G является необходимым для того, чтобы G обладала свойством (P). Достаточность этого условия пока не доказана, но мы можем привести доказательство более слабого утверждения.

Теорема 3. Ограниченные периодические группы не обладают наследственно сильно приводимыми системами образующих (тип (УI)).

Доказательство. Пусть G ограниченная периодическая группа $(mG = 0, m \neq 0)$, тогда $G = G_{p_1} + \dots + G_{p_n}$ где G_{p_i} -различные примарные ограниченные компоненты G.

Будем применять индукцию по n.

При $n=1$ утверждение теоремы справедливо (В.Длаб /4/).

Пусть наше утверждение справедливо при некотором $n \geqslant 1$. Докажем его справедливость в случае $n+1$.

Пусть

$$G = G_{p_1} + \dots + G_{p_n} + G_{p_{n+1}} = \{\mathfrak{D}\}, \quad \mathfrak{D} = [f_\delta]_{\delta \in \Delta} -$$

произвольная $f.s.$ G. При каждом $\delta \in \Delta$ $f_\delta = f_\delta^{(1)} + \dots + f_\delta^{(n)} + f_\delta^{(n+1)}$ где $f_\delta^{(i)} \in G_{p_i}$.

Пусть $\mathcal{D}$ устроена так, что для любого $\Delta' \subseteq \Delta$, удовлетворяющего соотношению:

$$\{[\tilde{f}_\delta]_{\delta\in\Delta'}\} = G_{p_{i_1}} + \dots + G_{p_{i_n}} \subset G \tag{9}$$

где $\tilde{f}_\delta = f_\delta^{(i_1)} + \dots + f_\delta^{(i_n)}$, справедливо $\{[f_\delta]_{\delta\in\Delta'}\} = G$. Тогда из этого уже следует, что все подсистемы f.s. из $\mathcal{D}$ устроены так же, как $\mathcal{D}$ (в отношении выполнения условия (9)).

Теперь, если $\mathcal{D}$-наследственно сильно приводимая (тип (УI)), то ввиду ее предполагаемого свойства, $[\tilde{f}_\delta]_{\delta\in\Delta}$ (где $\tilde{f}_\delta = f_\delta^{(1)} + \dots + f_\delta^{(n)}$) типа (УI) для $G_{p_1} + \dots + G_{p_n}$. Действительно, $[\tilde{f}_\delta]_{\delta\in\Delta}$ - f.s. $G_{p_1} + \dots + G_{p_n}$. Если, при некотором $\Delta' \subseteq \Delta$ $[\tilde{f}_\delta]_{\delta\in\Delta'}$ тоже порождает эту группу, то $[f_\delta]_{\delta\in\Delta}$ - f.s. G, содержащаяся в $\mathcal{D}$, т.е. сильно приводимая. Следовательно, $[\tilde{f}_\delta]_{\delta\in\Delta'}$ сильно приводима. Поэтому $[\tilde{f}_\delta]_{\delta\in\Delta}$ - типа (УI). Но это противоречит индуктивному предположению.

Пусть $\mathcal{D}$ не обладает рассмотренным свойством. Тогда есть такое $\Delta' \subset \Delta$, что, при $\tilde{f}_\delta = f_\delta^{(i_1)} + \dots + f_\delta^{(i_n)}$, $\{[\tilde{f}_\delta]_{\delta\in\Delta'}\} = G_{p_{i_1}} + \dots + G_{p_{i_n}} \subset G$ и $\{[f_\delta]_{\delta\in\Delta'}\} \subset G$. В этом случае, при $\mathcal{D}' = [f_\delta]_{\delta\in\Delta'} \subset \mathcal{D}$ фактор-группа $G/\{\mathcal{D}'\} \neq \bar{0}$ -ограниченная примарная группа (так как $\{\mathcal{D}'\} \supset G_{p_{i_1}} + \dots + G_{p_{i_n}}$).

Таким образом, она обладает свойством (P). Поэтому $G/\{\mathcal{D}'\} = \{\overline{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'}\}$, и существует $\varnothing \neq \bar{\mathcal{D}}_0 \subseteq \overline{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'}$, где $\bar{\mathcal{D}}_0$ -неприводимая f.s. $G/\{\mathcal{D}'\}$. Поэтому при переходе в группу G $(\varnothing \neq \bar{\mathcal{D}}_0 \to \mathcal{D}_0 \neq \varnothing)$, получим

$$\varnothing \neq \mathcal{D}_0 \underset{\text{о.н.}}{\subsetneq} \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D} \quad (G = \{\mathcal{D}' \cup \mathcal{D}_0\})$$

Следовательно, $\mathcal{D}$ не типа (УI). Теорема доказана.

Следствие. В каждой системе образующих ограниченной группы содержится подсистема с непустым относительно неприводимым множеством.

В работе /4/ В.Длаб предложил метод с помощью которого вопрос о наличии свойства (P) у ограниченных групп сводится к аналогичной проблеме для групп вида:

$$G_{p_1} + \cdots + G_{p_n} \quad (n < \infty)$$

где G_{p_i} -элементарные группы по различным простым числам. Но на этом пути успех пока не достигнут (даже для суммы двух счетных примарных групп).

IУ. <u>О группах без кручения класса</u> $\mathcal{D}(1,1,1,0,0,0)$

В этой главе дается полное описание всех групп без кручения со свойством (P).

Прежде всего докажем следующее:

Лемма 3. Пусть группа $G \supset A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

Тогда I. Из существования в G/A наследственно приводимой $g.s.$ следует существование наследственно приводимой $g.s.$ в G .

2. Если G/A имеет прямое слагаемое $\bar{B} = \{\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_k, \cdots\}$, которое не является группой с конечным числом образующих и в котором элементы $\bar{b}_i$ связаны соотношениями:

$$\begin{array}{l} \bar{b}_1 - n_2 \bar{b}_2 = \bar{0} \\ \text{-------} \\ \bar{b}_k - n_{k+1} \bar{b}_{k+1} = \bar{0} \\ \text{-------} \end{array} \quad (n_i \neq 0) \qquad (10)$$

то G обладает наследственно приводимой $g.s$.

Доказательство. Убедимся в справедливости первого утверждения.

Пусть $A = \{a_1, \cdots, a_n\} \subset G$ и $G/A = \{\bar{\mathcal{D}}\}$, где $\bar{\mathcal{D}} = [\bar{g}_\delta]_{\delta \in \Delta}$ -наследственно приводимая $g.s.$. Обозначим: $[a_1, \cdots, a_n] = L$. Выберем представители $g_\delta \in \bar{g}_\delta$, $(\delta \in \Delta)$. Тогда, при $\mathcal{D} = [g_\delta]_{\delta \in \Delta}$, $G = \{\mathcal{D} \cup L\}$. Покажем, что система $\mathcal{D} \cup L$ наследственно приводима.

19267

Пусть $L'\cup\mathcal{D}'\subset L\cup\mathcal{D}$ $(L'\subseteq L, \mathcal{D}'\subseteq\mathcal{D})$ и $\{L'\cup\mathcal{D}'\}=G$. Для конечного множества L можно выбрать такое конечное множество $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}'$, что $L\subseteq\{L'\cup\mathcal{D}_0\}$. В факторгруппе G/A системе $\mathcal{D}'$ соответствует $\bar{\mathcal{D}}'\subseteq\bar{\mathcal{D}}$, системе $\mathcal{D}_0$ – $\bar{\mathcal{D}}_0\subseteq\bar{\mathcal{D}}$, и $G/A=\{\bar{\mathcal{D}}'\}$. Очевидно, что $\bar{\mathcal{D}}_0\subset\bar{\mathcal{D}}'$.

Предположим, что $\varnothing\neq\bar{\mathcal{D}}'\setminus\bar{\mathcal{D}}_0\subseteq_{0,H}\bar{\mathcal{D}}'$.
Отсюда следует, что $\bar{\mathcal{D}}'$ должна содержать неприводимую подсистему образующих, так как $\bar{\mathcal{D}}_0$-конечна, а это противоречит наследственной приводимости. Наше предположение неверно и поэтому найдется такой элемент $\bar{g}_\delta\in\bar{\mathcal{D}}'\setminus\bar{\mathcal{D}}_0$, что $\bar{g}_\delta=f(\bar{\mathcal{D}}'\setminus\bar{g}_\delta)$. Следовательно, в группе G, $g_\delta\in\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}_0$ и $g_\delta=f(\mathcal{D}'\setminus g_\delta)+a\,(a\in A)$. Но $a\in A=\{L\}\subseteq\{\mathcal{D}_0\cup L'\}$, т.е. $a=f'(\mathcal{D}_0\cup L')$. Поэтому $g_\delta=f(\mathcal{D}'\setminus g_\delta)+f'(\mathcal{D}_0\cup L')=f''((\mathcal{D}'\cup L')\setminus g_\delta)$ (так как $g_\delta\in\mathcal{D}'\setminus\mathcal{D}_0$).

Итак, нами доказано первое утверждение леммы. Для доказательства второго достаточно показать, что прямое слагаемое $\bar{B}=\{b_1,\dots,b_n,\dots\}\subseteq G/A$, образующие которого связаны соотношениями (I0), обладает наследственно приводимой $g.s.$.

Действительно, из соотношений (I0) следует, что для любых двух элементов $\bar{b}_m$ и $\bar{b}_{m'}$ $(m<m')$

$$\bar{b}_m=n_{m+1}n_{m+2}\cdots n_{m'}\bar{b}_{m'} \qquad (II)$$

Так как группа $\bar{B}$ не с конечным числом образующих, то любая $g.s.$ $\bar{B}$, содержащаяся в $[\bar{b}_i]_1^\infty$-счетна и приводима, в виду соотношений (II).

Итак, $\bar{B}$ -обладает наследственно приводимой $g.s.$.

Применяя лемму I, получим, что и G/A обладает наследственно приводимой $g.s.$. Остается применить I.

Лемма 4. Если абелэва группа без кручения обладает свойством (P), то она не содержит элементов бесконечной высоты.

Доказательство. Допустим, что группа G -обладает свойством (P) и $G \ni a \neq 0$, где $T(a) \ni H(a) = (k_1, \dots, k_n, \dots)$ и $k_n = \infty$ при некотором $p_n = p$, то есть $H_p(a) = \infty$. Тогда $G/\{a\} = \bar{B} + \bar{H}$, где $\bar{B} \cong C(p^\infty)$ обладает системой образующих с соотношениями (типа (I0)): $\bar{b}_1 - p\bar{b}_2 = \bar{0}$, $\bar{b}_2 - p\bar{b}_3 = \bar{0}, \dots$.

Поэтому, ввиду леммы 3, заключаем, что G обладает наследственно приводимой системой образующих. А это противоречит условию леммы.

Лемма 5. Если группа без кручения обладает свойством (P), то она конечного ранга $r_0(G)$.

Доказательство. Допустим, что группа G -без кручения, обладает свойством (P) и ее ранг бесконечен.

Рассмотрим фактор-группу G/pG (где p -произвольное простое число). Предположим, что она имеет конечный p -ранг $r_p(G/pG)$, $0 \leq r_p < \infty$. Тогда $G/pG = \sum_{i=1}^{n} \{\bar{b}_i\}$ $(n = r_p(G/pG))$. Следовательно, при любом выборе представителей $b_i \in \bar{b}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ $G = \{b_1, \dots, b_n, pG\}$. Иными словами, для любого элемента $g \in G$ и для любого $k > 0$ справедлива запись $g = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i + p^k g_k$. Тогда в фактор-группе $G/\{b_1, \dots, b_n\}$ любой элемент имеет бесконечную высоту по p. Пусть $0 \neq \bar{a} \in G/\{b_1, \dots, b_n\}$, $H_p(\bar{a}) = \infty$, и $\bar{x}_i \in G/\{b_1, \dots, b_n\}$ такие, что

$$\begin{gathered} p\bar{x}_1 = \bar{a} \\ \bar{x}_1 - p\bar{x}_2 = \bar{0} \\ \dots\dots\dots \\ \bar{x}_k - p\bar{x}_{k+1} = \bar{0} \\ \dots\dots\dots \end{gathered}$$

тогда при любом выборе представителей $x_i \in \bar{x}_i$ и $a \in \bar{a}$ в фактор-группе $\hat{G} = G/\{b_1, \dots, b_n, a\}$ содержится подгруппа $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, \dots\}$, где $\hat{x}_i = x_i + \{b_1, \dots, b_n, a\}$, причем $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, \dots\} \cong C(p^\infty)$.

Применяя лемму 3, мы приходим к противоречию с условием леммы.

Покажем, что и при $r(G/pG) \geq \aleph_0$ группа G также обладает наследственно приводимой $g.s.$.

Пусть $[\bar{b}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ -бесконечный базис G/pG. Выберем в каждом классе $\bar{b}_\lambda$ по представителю $b_\lambda \in \bar{b}_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$. Тогда система $[b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ линейно независима в G . Кроме того, $G=\{[b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}, pG\}$ и

$$[b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda} \underset{0,H}{\subseteq} ([b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}) \cup pG \tag{12}$$

Пусть $[b_i]_1^\infty$-счетная подсистема в $[b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$.

Образуем элементы h_i :

$$\begin{aligned} h_1 &= pb_1 \\ h_2 &= b_1 - pb_2 \\ &\cdots\cdots \\ h_{k+1} &= b_k - pb_{k+1} \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{13}$$

В G/pG им соответствуют элементы $\bar{h}_i = \bar{b}_{i-1}\ (i=2,3,\dots)$, $\bar{h}_1=\bar{0}$.

Следовательно

$$G=\{[h_i]_1^\infty, ([b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda})\setminus[b_i]_1^\infty, pG\} \tag{14}$$

и

$$[h_i]_2^\infty \underset{0,H}{\subseteq} [h_i]_1^\infty \cup ([b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}\setminus[b_i]_1^\infty)\cup pG$$

Пусть $\sum_{i=1}^\infty\{b_i\} = B$ и $H=\sum_{i=1}^\infty\{h_i\}$. Тогда $B/H \cong C(p^\infty)$. Пусть $H_1=\{H, ([b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda})\setminus[b_i]_1^\infty\}$. Тогда $G/H_1 \supset \{B,H_1\}/H_1 \cong B/H \cong C(p^\infty)$.

Следовательно,

$$G/H_1 = \{B,H_1\}/H_1 + W/H_1 \tag{15}$$

Так как $G=\{H_1,B,pG\}$ и $p(\{B,H_1\}/H_1)=\{B,H_1\}/H_1$, то

$$G/H_1=\{pG,H_1\}/H_1 \tag{16}$$

Поэтому $W/H_1 \subset \{pG,H_1\}/H_1$ и $W=\{[w_\delta]_{\delta\in\Delta}\cup H_1\}$

где $w_\delta \in pG \quad (\delta\in\Delta)$ (17)

Теперь построим наследственно приводимую $g.s\ G$.

Образуем элементы $b_i^* = pb_{i+1}\ (i=1,2,\dots)$.

Тогда, ввиду формул (15), (16) и (17), $G=\{\mathcal{D}\}$

где $\mathcal{D}=[h_i]_1^\infty \cup ([b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}\setminus[b_i]_1^\infty)\cup[b_i^*]_1^\infty\cup[w_\delta]_{\delta\in\Delta}$ (18)

Действительно, $H_1=\{[h_i]^\infty, ([b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda})\setminus[b_i]_1^\infty\} \supset H=\{[h_i]_1^\infty\}$

Элементы $b_i^*\ (i=1,2,\dots) \in G/H_1$ переходят в $\bar{b}_i^*=\bar{b}_i$, поэтому в G/H_1 : $\{[\bar{b}_i^*]_1^\infty\} = \{B_1 H_1\}/H_1$. и, наконец, элементы $w_\delta (\delta \in \Delta)$. переходят в $\bar{w}_\delta \in G/H_1$, которые порождают дополнительное к $\{B_1 H_1\}/H_1$ слагаемое W/H_1.

Так как $[b_i^*]_1^\infty \cup [w_\delta]_{\delta\in\Delta} \subseteq PG$, то ввиду соотношения (I4)

$$[h_i]_2^\infty \subseteq_{0 \,\mathrm{in}} \mathcal{D} \qquad (19)$$

Элементы $[b_i^*]_1^\infty$ и $[w_\delta]_{\delta\in\Delta}$ выбраны нами так, что $G/H_1 = \{[\bar{b}_i^*]_1^\infty \cup [\bar{w}_\delta]_{\delta\in\Delta}\}$, причем, только элементы $[\bar{b}_i^*]_1^\infty$ порождают прямое слагаемое $\{B_1 H_1\}/H_1 \cong C(p^\infty)$. Отсюда мы заключаем, что любая подсистема системы $\mathcal{D}$, которая порождает G, должна содержать бесконечное множество элементов b_i^*.

Покажем, что $\mathcal{D}$ наследственно приводима.

Пусть $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ и $\{\mathcal{D}'\} = \{\mathcal{D}\}$.

Тогда ввиду (I9), $[h_i]_2^\infty \subset \mathcal{D}'$.

Существует конечное множество $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}'$, такое, что $h_1 \in \{\mathcal{D}_0\}$. Из сказанного выше следует, что $\mathcal{D}' \setminus (\mathcal{D}_0 \cup [h_i]_2^\infty)$ содержит счетное множество элементов b_i^*. Пусть $b_n, b_m \in \mathcal{D}' \setminus (\mathcal{D}_0 \cup [h_i]_2^\infty)$ $(n < m)$. Тогда $b_n^* = p^{m-n} b_m^* + h$

где $h \in H = \{\cdots, h_1, \cdots\} \subseteq \{\mathcal{D}_0 \cup [h_i]_2^\infty\}$

Отсюда следует, что $b_n^* \in \{\mathcal{D}' \setminus b_n^*\}$.

Нами доказано, что произвольная подсистема $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$, $\{\mathcal{D}'\} = G$, приводима, т.е. $\mathcal{D}$-наследственно приводима.

Но это противоречит условию теоремы.

Теорема 4. Среди групп без кручения свойством (P) могут обладать только свободные группы конечного ранга.

19267

Доказательство. Пусть группа без кручения обладает свойством (P). Тогда, ввиду леммы 5, $r_0(G)=n<\infty$. На основании леммы 4 заключаем, что G не содержит элементов бесконечной высоты. Покажем, что все ее элементы имеют нулевой тип.

Пусть $G\ni a\neq 0$ и $T(a)\neq(0,0,\cdots)$. Тогда $H(a)=(k_1,k_2,\cdots)$, где $k_i\neq 0$ для счетного множества индексов i. Следовательно,

$$\{a\}_*/\{a\}\cong\sum_{i=1}^{\infty}C(p_i^{k_i}) \qquad (20)$$

где $p_i\neq p_j$ при $i\neq j$ и $k_i>0$ для счетного множества индексов i (L. Fuchs [5], p.149). Вложим a в некоторую максимальную линейно независимую систему группы :

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1}$$

Тогда $G/\{a,a_1,\cdots,a_{n-1}\}$ периодическая группа, у которой счетное множество ненулевых примарных компонент.

Действительно, $G/\{a,a_1,\cdots,a_{n-1}\}\supseteq$
$$\supseteq\{\{a\}_*,a_1,\cdots,a_{n-1}\}/\{a,a_1,\cdots,a_{n-1}\}\cong\{a\}_*/\{a\}\cong\sum_{i=1}^{\infty}C(p_i^{k_i}) \qquad \text{(см. 20)}$$

Поэтому $G/\{a,a_1,\cdots,a_{n-1}\}$ должна содержать прямое слагаемое $\bar{B}\cong\sum_{i=1}^{\infty}C(p_i^{k_i'})$ (где $p_i\neq p_j$, при $i\neq j$, $\infty>k_i'>0$) которое, как показано в лемме 2, обладает системой образующих $[\bar{b}_i]_1^{\infty}$ с соотношениями

$$\begin{aligned}\bar{b}_1&=s_{12}p_2^{k_2'}\bar{b}_2\\ \bar{b}_2&=s_{23}p_3^{k_3'}\bar{b}_3\\ &\cdots\cdots\\ \bar{b}_m&=s_{m\,m+1}p_{m+1}^{k_{m+1}'}\bar{b}_{m+1}\\ &\cdots\cdots\end{aligned} \qquad \text{(см. (6'))}$$

Применяя к этому случаю лемму 3, получим, что G должна обладать наследственно приводимой f.s.. Это противоречит условию. Поэтому все элементы должны иметь нулевой тип.

Теперь покажем, что G-свободная группа ранга n.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ -максимальная линейно независимая система элементов G. Рассмотрим сервантную подгруппу $\{a_1, \dots, a_n\}_* \subset G$.

Фактор-группа $\bar{G} = G/\{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*$ -группа без кручения ранга I. Пусть $\bar{a}_n = a_n + \{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*$. Если мы покажем, что $T(\bar{a}_n) = (0, 0, 0, \dots)$, то получится, что $\bar{G}$ бесконечная циклическая группа.

Пусть $T(\bar{a}_n) \neq (0, 0, 0, \dots)$. Тогда $H(\bar{a}_n) = (k_1, k_2, \dots)$ где-либо все $k_i \neq \infty$ и среди них счетное множество ненулевых либо $k_i = \infty$ хотя бы для одного i. Тогда $\bar{G}/\{\bar{a}_n\} \cong \sum_{i=1}^{\infty} C(p_i^{k_i})$, т.е. $\bar{G}/\{\bar{a}_n\}$ либо содержит прямое слагаемое типа $C(p^\infty)$, либо счетное множество слагаемых где k_i отлично от нуля. Но $\bar{G}/\{\bar{a}_n\} = (G/\{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*)/\{\bar{a}_n\} =$

$$= (G/\{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*)/(\{a_n, \{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*\}/\{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*) \cong$$

$$\cong G/\{a_n, \{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*\} \cong$$

$$\cong (G/\{a_n, a_1, \dots, a_{n-1}\})/(\{a_n, \{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*\}/\{a_n, a_1, \dots, a_{n-1}\})$$

Поэтому периодическая группа $G/\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ либо имеет неограниченную примарную компоненту, либо содержит прямое слагаемое типа $\sum_{i=1}^{\infty} C(p_i^{s_i})$, где $0 < s_i < \infty$, а p_i -различные простые числа. В обоих случаях $G/\{a_1, \dots, a_n\}$ должна иметь наследственно приводимую $g.s.$. Следовательно, и G должна иметь систему образующих такого типа (лемма 3), а это противоречит условию теоремы.

Мы пришли к заключению, что

$$T(G/\{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*) = (0, 0, 0, \dots)$$

т.е. $G/\{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*$ -циклическая группа бесконечного порядка. Следовательно,

$$G = \{b_1\} + \{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*$$

где $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}_*$ должна обладать свойством (P), как прямое слагаемое группы с тем же свойством.

Тем же способом мы можем доказать, что

$$\{a_1,\dots,a_{n-1}\}_* = \{a_1,\dots,a_{n-2}\} + \{b_2\} \qquad \text{и т.д.,}$$

пока не получим разложения

$$G = \{b_1\} + \{b_2\} + \dots + \{b_n\} = \mathfrak{J}_n$$

Утверждение доказано.

Следствие I. Группа без кручения обладает свойством (P) (т.е. принадлежит $\mathcal{D}(1,1,1,0,0,0)$) тогда и только тогда, когда она – свободная группа конечного ранга.

Следствие 2. Если смешанная группа $G = T + J$, где T -периодическая группа, J – группа без кручения, обладает свойством (P), то T -ограниченная группа, J – свободная конечного ранга.

Действительно, если G обладает свойством (P), то по лемме I, T и J также обладают свойством (P).

У. <u>О смешанных группах класса $\mathcal{D}(1,1,1,0,0,0)$</u>

Теорема 5. Среди смешанных групп конечного свободного ранга (r_0) свойством (P) могут обладать только группы вида

$$T + \mathfrak{J}_n$$

где T -ограниченная периодическая группа, а $\mathfrak{J}_n$ свободная группа конечного ранга $(0 < n < \infty)$.

Доказательство. Пусть G обладает свойством (P) и $r_0(G) = n > 0$. Тогда периодическая часть $T \subset G$ должна быть ограниченной. Допустим, что T не ограничена.

Для любой максимальной линейно-независимой системы $a_1, a_2, \dots, a_n$ элементов группы G фактор-группа $G/\{a_1,\dots,a_n\}$ -периодическая группа.

Группа $G/\{a_1,\dots,a_n\} \cong \{T,a_1,\dots,a_n\}/\{a_1,\dots,a_n\} \cong T$

и поэтому не ограничена. Следовательно, по теореме I $G/\{a_1,\dots,a_n\}$ должна обладать наследственно приводимой $g.s.$ и G, в свою очередь, должна обладать системой такого типа (лемма 3).

Итак, мы пришли к противоречию, предположив, что периодическая часть T -не ограничена. Следовательно, группа имеет прямое разложение

$$G = T + J$$

Остается применить следствие 2 из теоремы 4.

Теорема 6. Если смешанная группа G обладает свойством (P), то $G = T + \mathfrak{F}_n$, где T -ограниченная периодическая группа, а $\mathfrak{F}_n$ -свободная группа конечного ранга.

Доказательство. Как следует из вышесказанного (следствие 2 теоремы 4 и теорема 5), достаточно рассмотреть случай, когда группа имеет бесконечный свободный ранг $(r_0(G) \geq \aleph_0)$ и ее периодическая часть T не ограничена. Допустим, что такая группа обладает свойством (P).

Из условия $r_0(G/T) > \aleph_0$ следует, что G $\sum^2$-циклическая группа /6/. Иными словами,

$$G = \{A, B\}$$

где A и B -прямые суммы циклических групп.

Пусть $A = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\{a_\lambda\}$; $B = \sum\limits_{\mu\in M}\{b_\mu\}$.

Тогда $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $M = M_1 \cup M_2$, где $a_\lambda, b_\mu \in T$ при $\lambda \in \Lambda_1$, $\mu \in M_1$, а при $\lambda \in \Lambda_2$, $\mu \in M_2$, $a_\lambda, b_\mu \in G \setminus T$.

Введем обозначения

$$K_i = [a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda_i} \ (i=1,2), \ K = K_1 \cup K_2$$

$$L_i = [b_\mu]_{\mu \in M_i} \ (i=1,2), \ L = L_1 \cup L_2$$

Ясно, что $K \cup L$ система образующих группы G. Так как G обладает свойством (P), то можно считать, что $K \cup L$ -неприводимая $g.s.\ G$. Множество всех элементов бесконечного порядка этой системы $K_2 \cup L_2$ обладает свойством: $G/\{K_2 \cup L_2\}$-периодическая группа. Поэтому $K_2 \cup L_2$ должна содержать максимальную линейно независимую систему группы G.

Действительно, пусть $K_3 \subseteq K_2$, $L_3 \subseteq L_2$ и $K_3 \cup L_3$ -максимальная линейно независимая (в смысле свободного ранга) система в подгруппе $\{K_2 \cup L_2\}$. Тогда для любого элемента $g \in G$ найдется такое $m \neq 0$, что $mg \in \{K_2 \cup L_2\}$. Но для него, в свою очередь, найдется такое m', что $m'mg \in \{K_3 \cup L_3\}$.

Поэтому $K_3 \cup L_3$ максимальная линейно независимая система всей группы G.

$K_3 \cup L_3$ обозначим через S, а $(K \cup L) \setminus S$ через Z. Тогда

$$K \cup L = Z \cup S \underset{o.н}{\supseteq} S$$

Фактор-группа $G/\{S\}$ периодическая и неограниченная, так как содержит $\{T, S\}/S \cong T$, и поэтому обладает наследственно приводимой системой образующих.

Пусть $\overline{W} = [\overline{w}_\delta]_{\delta \in \Delta}$ такая $g.s$.

В каждом классе $\overline{w}_\delta$ можно выбрать по представителю $w_\delta \in \overline{w}_\delta \ (\delta \in \Delta)$, где $w_\delta \in \{Z\}$. Если $W = [w_\delta]_{\delta \in \Delta}$, то $W \cup S$ система образующих G и, так как $W \subseteq \{Z\}$, а $S \underset{o.н}{\subseteq} S \cup Z$, то $S \underset{o.н}{\subseteq} W \cup S$.

Покажем, что наследственно приводимая $g.s.\ G$ __ $W \cup S$

Пусть

$$W \cup S \supseteq W' \cup S \quad (W \supseteq W'), \quad \{W; S\} = G$$

Тогда множеству W' в фактор-группе $G/\{S\}$ соответствует $\overline{W}'$ – $g.s.\ G/\{S\}$. Следовательно, найдется $\bar{w}_\delta \in \overline{W}'$,

$$\bar{w}_\delta = f(\overline{W}' \setminus \bar{w}_\delta)$$

А в группе G элемент

$$w_\delta = f(W' | w_\delta) + s, \quad s \in \{S\}, \quad S \subset S \cup W'$$

Значит, $w_\delta = f'((W' \cup S) \setminus w_\delta)$, т.е. $W' \cup S$ приводима.

Мы пришли к противоречию с условием. Теорема доказана.

Автор приносит благодарность А.П.Мишиной за постоянную помощь, А.Г.Курошу – за интерес к работе и ценные замечания.

Литература:

1. А.Г.Курош. Теория групп. Москва, 1967 г.
2. В.Длаб. Заметка к теории полных абелевых групп. Чех. мат. журнал 8 (83), 1958, 54-61.
3. В.Длаб. Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп. Чех. мат. журнал т.9 (84) 1959, 161-169.
4. V.Dlab, On a characterization of primary abelian groups of bounded order, Journal London Math. Soc. 36 (1961), 139-144.
5. L.Fuchs. Abelian Groups.
6. Irwin, Khabbaz, On generating subgroups of abelian groups, Proc. colloq on abelian groups, 1963, Budapest, Hung, Acad. 1964, 87-97.

Печатается в соответствии с постановлением Президиума Академии Наук СССР № 830 от 6 октября 1961 г.
В печать от 26/VIII-69
Тир. 3 Цена 1 руб. 30 коп. Зак. 19287

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр. 403