

18

К-47



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

**ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ**

**В.С. Кладницкий**

**1477**

**ОПТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ  
НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ  
МАГНИТНЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ**

**Дубна 1963**

В.С. Кладницкий

1477

22/6/1, 48.  
ОПТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ  
НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ  
МАГНИТНЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1983

Квадрупольная магнитная линза представляет собой электромагнит с двумя парами полюсов, относительное расположение которых показано на рис. 1. Оба полюса, лежащие друг против друга, имеют одинаковую полярность, противоположную полярности второй пары. В сечении плоскостью, перпендикулярной оси линзы, контур полюса образован сегментом равнобочной гиперболы. Если магнитная индукция в железе полюса далека от значения насыщения, то поверхность полюса является эквипотенциалью магнитного поля. В этом случае силовые линии магнитного поля в точке, достаточно удаленной от краев магнита, имеют форму гипербол, два семейства которых описываются выражением

$$\frac{x^2 - y^2}{a^2} = \pm 1, \quad (1.1)$$

где  $a$  — радиус апертуры линзы. Поперечный градиент магнитного поля  $G$  в такой идеальной линзе повсюду имеет одинаковую величину.

Для расчета оптических параметров линзы надо знать зависимость градиента магнитного поля

$$G = \frac{dB_x}{dy} = \frac{dB_y}{dx}$$

от тока  $I$  в катушках линзы и характер распределения магнитного поля по радиусу линзы и по ее продольной оси  $Oz$ . Ниже приводятся результаты измерений, выполненных с помощью холловского магнитометра<sup>1/</sup>. Небольшой размер датчика /ширина 3 мм и длина 5 мм/ позволил тщательно исследовать топографию магнитного поля. Относительные измерения выполнены с точностью 0,5%, ошибка в определении абсолютной величины магнитного поля не превышает 1%, градиент измерен с точностью 1-2%.

Исследовались квадрупольные магнитные линзы типов МЛ-7, МЛ-17 и МЛ-18. Первая из них представляет четырехполюсный магнит длиной 100 см, у которого радиус  $a$  окружности, вписанной между полюсами, равен 15 см. Линза МЛ-16 тоже имеет длину 100 см, но радиус апертуры у нее 13 см. Длина линзы МЛ-17 равна 60 см, а проходной канал такого же диаметра, как у МЛ-18.

Зависимость градиента от тока  $G(I)$  для линз МЛ-17 и МЛ-7 приведена на рис. 2 и 3. Линейный характер функции  $G(I)$  в линзе МЛ-17 сохраняется только до  $I = 600$  А, а дальше начинает сказываться насыщение железа полюсов. В линзе МЛ-18 градиент растет с увеличением тока практически по такому же закону. Градиент магнитного поля в линзе МЛ-7 значительно ниже, чем в линзах двух

первых типов, и увеличить его за счет тока невозможно из-за слабого охлаждения обмотки.

Магнитное поле линзы не обрывается резко на краях полюсов, а продолжается на некоторое расстояние за физическими пределами магнита. Для того, чтобы определить эффективную длину линзы по магнитному полю, снималось распределение поперечной составляющей магнитного поля  $B_y(z)$  в направлении, параллельном продольной оси линзы  $Oz$ . На рис. 4 представлено распределение  $B_y(z)$  для линзы МЛ-17, снятое в плоскости  $xOz$ . Начало системы координат здесь помещено в центре линзы.

Полюса квадрупольной линзы имеют конечную ширину, поэтому "гиперболический" характер магнитного поля сохраняется только в центральной части апертуры линзы, а на большом расстоянии по радиусу от оси  $Oz$  существенно сказывается влияние краев полюсов. Следовало выяснить, в какой мере распределение  $B_y(z)$  обладает азимутальной симметрией относительно продольной оси линзы. Для этого измерения, аналогичные описанным выше, были проведены также и в плоскости, проходящей через ось  $Oz$  и середины противоположных одноименных полюсов. Сравнение графиков на рис. 4 и 5 показывает, что в плоскости, проходящей через полюса, длина центрального плато в распределении  $B_y(z)$  несколько больше; кроме того, при  $r > 0,5a$  на краю плато появляется характерный выступ, обусловленный влиянием конца полюса линзы. Очевидно, что полной азимутальной симметрии в распределении поперечной составляющей магнитного поля в такой линзе нет, причем асимметрия тем больше, чем больше радиус, на котором проводятся измерения.

Для понимания механизма действия реальной квадрупольной линзы на пучок частиц еще более существенным является тот факт, что зависимость градиента магнитного поля от радиуса не является строго линейной, как это должно быть в идеальной линзе, где  $B = Gr$ . По мере удаления от продольной оси линзы МЛ-17 поперечный градиент постепенно увеличивается (рис. 8), достигает максимального значения в точке  $r = 0,7 - 0,8/a$  и затем быстро спадает к краю апертуры. Такие же результаты получены и для линз МЛ-16 и МЛ-17, и, по-видимому, это общее свойство квадрупольных линз вне зависимости от некоторых частных особенностей их конструкции. Радиальная вариация градиента вынуждает ограничивать поперечный размер пучка на входе в линзу с тем, чтобы частицы не попадали в ту область, где градиент резко меняется.

Заметим, что в данной работе везде приводятся значения градиентов в приосевой области линзы, которые на 3-4% меньше максимальных.

## 2. Эффективная длина линзы, прямоугольная модель магнитного поля

Распределение поперечной составляющей магнитного поля  $B(z)$  аналитически выражается довольно сложной функцией. Между тем оптические параметры линзы можно определить с достаточной точностью / 2%/, если при интегрировании уравнений движения частицы в линзе использовать так называемую "прямоугольную модель" магнитного поля<sup>/2/</sup>. Для этого реальное распределение  $B(z)$  надо заменить прямоугольником, площадь которого равна площади области, заключенной между кривой  $B(z)$  и осью абсцисс, и высота представляет значение магнитного поля в центре линзы ( $z=0$ ). При этом во все формулы для расчета оптических параметров необходимо подставить эффективную длину линзы по магнитному полю, которая определяется как

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{L_0} \int_{-\infty}^{\infty} B(z) dz, \quad L_{\text{eff}} = \frac{1}{B_{\text{max}}} \int_{-\infty}^{\infty} B(z) dz / 2.1/$$

Понятно, что практически интегрирование здесь ведется от  $|x|$  до  $|x|$  такого  $z$ , при котором  $B(z)$  составляет 2-3% от  $B_0$  в центре линзы.

Эффективная длина линзы превосходит ее физическую длину

$$L_{\text{eff}} = L_0 + \Delta, \quad / 2.2/$$

причем величина  $\Delta$  зависит от соотношения  $a/L_0$ , где  $L_0$  - физическая длина полюса, а  $a$  - радиус апертуры линзы. Из сказанного выше ясно, что  $L_{\text{eff}}$  является функцией радиуса  $a$ . Для линзы МЛ-7 средняя эффективная длина в приосевой области равна 110 см, для МЛ-16 соответственно 110,5 см,  $L_{\text{eff}}$  для линзы МЛ-17 составляет 69,5 см.

## 3. Связь оптических параметров линзы с матрицей перехода

Преимущество матричного метода<sup>/3/</sup> состоит в том, что, перемножая матрицы, соответствующие участкам траектории частицы с различными законами движения, непосредственно получают общую матрицу перехода, описывающую действие всей оптической системы на частицу. При этом оптические параметры системы весьма просто выражаются через элементы этой матрицы.

Поместим источник заряженных частиц в точку  $z_1$  на расстоянии  $S$  слева от входного среза линзы и, рассматривая проекцию траектории частицы на плоскость  $xOz$ , определим величину двухкомпонентного пространственного вектора  $(x, x')$  в некоторой точке  $z_2$  на расстоянии  $T$  справа от линзы. Здесь  $x$  - поперечное смещение частицы от оптической оси  $Oz$ , а  $x'$  - угол, который составляет траектория с этой осью в точке  $z$ .

Оставив в стороне вопрос о конкретном типе линзы, которая, вообще говоря, может представлять сложную оптическую систему, напишем следующее выражение для матрицы перехода, связывающей точки  $Z_1$  и  $Z_2$  :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad /3.1/$$

или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{12}T & m_{11}S + m_{12} + T(m_{21}S + m_{22}) \\ m_{21} & m_{21}S + m_{22} \end{pmatrix} \quad /3.2/$$

Здесь матрица  $(M)$  описывает действие самой линзы на частицу, а матрицы, стоящие по обе стороны от нее, — действие участков, свободных от поля, где частица движется прямолинейно:

Если значение  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}$  в точке  $Z_1$  известно, то не составляет труда найти  $\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix}$  с помощью линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad /3.3/$$

Раскрывая это выражение находим, что

$$x_2 = (m_{11} + m_{12}T) x_1 + [m_{11}S + m_{12} + T(m_{21}S + m_{22})] x'_1 \quad /3.4/$$

и

$$x'_2 = m_{21} x_1 + (m_{21}S + m_{22}) x'_1 \quad /3.5/$$

Основные оптические характеристики линзы можно выразить через элементы ее матрицы перехода  $(M)$ , воспользовавшись некоторыми положениями геометрической световой оптики, справедливыми для ионно-оптических систем. Покажем для примера, как определяется положение фокуса относительно среза линзы. Если на линзу слева падает параллельный пучок ( $x'_1 = 0$ ), то траектории всех частиц должны пересечься с оптической осью справа от линзы в одной и той же точке — в фокусе линзы. Расстояние от выходного среза линзы до этой точки можно найти из /3.4/, в котором  $T$  рассматривается как текущая координата, отсчитываемая вдоль оптической оси линзы  $Oz$ . Приравняв это выражение нулю при  $x'_1 = 0$  и  $x_1 \neq 0$ , находим интересующую нас величину

$$T_f = -\frac{m_{11}}{m_{21}} = g_i \quad /3.8/$$

Т а б л и ц а 3.1

Выражение оптических параметров линзы через элементы матрицы перехода

Положение фокуса со стороны источника относительно входного среза линзы	$g_0 = -\frac{m_{22}}{m_{21}}$	/3.7/
Положение фокуса со стороны изображения относительно выходного среза линзы	$g_i = -\frac{m_{11}}{m_{21}}$	/3.8/
Фокусное расстояние линзы	$f = \frac{1}{m_{21}}$	/3.9/
Связь между положением источника и изображения относительно линзы	$T = -\frac{S m_{11} + m_{12}}{S m_{21} + m_{22}}$	/3.10/
Коэффициент линейного увеличения	$K = m_{11} + T m_{21}$	/3.11/
Коэффициент углового увеличения	$H = m_{22} + S m_{12}$	/3.12/

В данной работе расстояния, которые отсчитываются вдоль оптической оси, выражаются в единицах длины полюсов линзы и поэтому матрица перехода для одиночного фокусирующего квадруполя<sup>/4/</sup> приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{\sin \phi}{\phi} \\ -\phi \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad /3.13/$$

где

$$\phi = L \sqrt{\frac{300G}{p}}. \quad /3.14/$$

Такая форма записи более удобна для использования полученных результатов. Так, например, если расчет показывает, что для фокусировки частиц с импульсом

$p = 4$  Гэв/с на заданном расстоянии  $T$  от линзы необходимо  $\phi = 0,548$ , то можно воспользоваться линзой длиной  $L = 100$  см с градиентом  $G = 400$  гс/см или же линзой длиной 50 см с градиентом 1600 гс/см и т.д.

#### 4. Симметричный квадруольный дублет

Для того, чтобы одновременно сфокусировать пучок в горизонтальной и вертикальной плоскостях, обычно используется система из двух последовательно расположенных квадруолей, один из которых фокусирует частицы в горизонтальной плос-

кости и дефокусирует в вертикальной, а второй действует наоборот. Плоскость, в которой пучок на пути через секции такого квадрупольного дублета поочередно испытывает фокусировку и дефокусировку, обозначают как ФД-плоскость, а перпендикулярную к ней соответственно как ДФ-плоскость. Если секции квадрупольного дублета расположены не вплотную, а разделены некоторым участком, свободным от поля, то плоскости соответственно обозначаются ФОД и ДОФ.

В наиболее общем случае секции квадрупольного дублета имеют разную длину и градиент магнитного поля в каждой из них меняется независимым образом. Однако на практике очень часто приходится иметь дело с дублетом, составленным из секций одинаковой длины  $L$ . Если градиенты в секциях такой линзы одинаковы, мы будем называть ее симметричным квадрупольным дублетом.

Симметричный дублет обладает некоторыми интересными оптическими особенностями. Их анализ существенно упростится, если рассмотреть случай, когда секции линзы расположены вплотную друг к другу. Заметим, что здесь речь идет о совмещении конца первой и начала второй секции по магнитному полю, так как между физическими гранями квадрупольных магнитов всегда имеется определенный зазор. Перемножив матрицы перехода для одиночных квадрупольных магнитов /предполагается, что в горизонтальной плоскости они составляют последовательность ДФ/

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{\sin \phi}{\phi} \\ -\phi \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \phi & \frac{\operatorname{sh} \phi}{\phi} \\ \phi \operatorname{sh} \phi & \operatorname{ch} \phi \end{pmatrix} \quad /4.1/$$

получаем общую матрицу перехода (H), описывающую действие квадрупольного дублета на заряженную частицу. Аналогичным образом в результате перемножения матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \phi & \frac{\operatorname{sh} \phi}{\phi} \\ \phi \operatorname{sh} \phi & \operatorname{ch} \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{\sin \phi}{\phi} \\ -\phi \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad /4.2/$$

находим матрицу (V) симметричного дублета для ФД-плоскости. Сопоставляя соответствующие элементы матриц (H) и (V)

$$\begin{aligned} h_{11} &= \cos \phi \operatorname{ch} \phi + \sin \phi \operatorname{sh} \phi & ; & \quad v_{11} = \cos \phi \operatorname{ch} \phi + \sin \phi \operatorname{sh} \phi & ; \\ h_{12} &= \frac{1}{\phi} (\cos \phi \operatorname{sh} \phi + \sin \phi \operatorname{ch} \phi) & ; & \quad v_{12} = \frac{1}{\phi} (\cos \phi \operatorname{sh} \phi + \sin \phi \operatorname{ch} \phi) & ; \\ h_{21} &= \phi (\cos \phi \operatorname{sh} \phi - \sin \phi \operatorname{ch} \phi) & ; & \quad v_{21} = \phi (\cos \phi \operatorname{ch} \phi - \sin \phi \operatorname{sh} \phi) & ; \\ h_{22} &= \cos \phi \operatorname{ch} \phi - \sin \phi \operatorname{sh} \phi & ; & \quad v_{22} = \cos \phi \operatorname{ch} \phi - \sin \phi \operatorname{sh} \phi & ; \end{aligned} \quad /4.3/$$



находим, что

$$h_{11} = \vartheta_{22}; \quad h_{22} = \vartheta_{11}; \quad h_{12} = \vartheta_{12}; \quad h_{21} = \vartheta_{21}. \quad /4.4/$$

С помощью /3.9/ убеждаемся, что фокусные расстояния симметричного дублета в обеих плоскостях одинаковы

$$F_{\parallel} = \frac{1}{h_{21}} = \frac{1}{\vartheta_{21}} = F_{\perp}, \quad /4.5/$$

но положение фокусов относительно граней линзы различно:

$$q_{OH} = -\frac{h_{22}}{h_{21}} = -\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_{21}} = q_{iV}, \quad /4.6/$$

$$q_{iH} = -\frac{h_{11}}{h_{21}} = -\frac{\vartheta_{22}}{\vartheta_{21}} = q_{oV}, \quad /4.7/$$

причем расстояние  $q_{OH}$  от линзы до фокуса со стороны источника в ФД -плоскости совпадает с расстоянием от линзы до фокуса со стороны изображения в плоскости ДФ /рис. 7/. Обе главные плоскости такой линзы в первом случае располагаются между источником и линзой, а во втором - между линзой и изображением.

Часто требуется совместить в одной точке, находящейся на заданном расстоянии  $T$  от линзы, изображения, полученные в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Такое совмещенное изображение называется стигматичным. Вследствие указанных выше особенностей симметричного дублета получить с его помощью стигматичное изображение можно лишь в том случае, когда  $T$  равно расстоянию  $S$  от источника до линзы. Покажем, что это действительно так. Известная из световой оптики формула Ньютона

$$z_1 z_2 = f^2, \quad /4.8/$$

где  $z_1$  -расстояние от источника до фокуса,  $z_2$  - расстояние от фокуса, расположенного между линзой и изображением, до изображения, а  $f$  -фокусное расстояние линзы, справедлива и для ионно-оптических фокусирующих систем. В наших обозначениях она имеет для симметричного дублета следующий вид:

$$(S - q_{OH})(T - q_{iH}) = F_{\parallel}^2 \quad /4.9/$$

в горизонтальной и

$$(S - q_{oV})(T - q_{iV}) = F_{\perp}^2 \quad /4.10/$$

соответственно в вертикальной плоскости. С учетом /4.8/ и /4.7/ перепишем /4.9/ и /4.10/ в несколько иной форме:

$$(S - q_{OH})(T - q_{iH}) = F^2, \quad /4.9a/$$

$$(S - g_{iH})(T - g_{oH}) = F^2 \quad /4.10a/$$

и, так как  $g_{oH} \neq g_{iH}$ , то оба приведенные выше выражения тождественны только в том случае, когда  $S = T$ .

Чтобы найти величину  $S$  /или  $T$  /, можно воспользоваться любым из соотношений /4.9a/ или /4.10a/, в которых надо выразить  $g$  и  $F$  через матричные элементы для плоскости ДФ или плоскости ФД. Если разложить в степенной ряд по  $\phi$  элементы матрицы перехода для любой из этих плоскостей и ограничиться членами четвертого порядка, то решение /4.9a/ или /4.10a/ приобретает такой вид:

$$S = \frac{(2 - \phi^4/2) \pm \sqrt{4 + 2g\phi^4}}{\frac{4}{3} \phi^4} \quad /4.11/$$

На рис. 8 приведена зависимость расстояния от линзы до стигматичного изображения  $T = T(\phi)$ , вычисленная по формуле /4.11/. Расчет, в котором используются точные значения матричных элементов, дает результаты, отличающиеся от приведенных здесь не более чем на 2-3%. Кривая 2 на том же рисунке относится к случаю, когда между секциями дублета имеется участок, свободный от поля длинной  $d = L$ .

В световой оптике, когда предмет и изображение расположены на одинаковых расстояниях от линзы, размер изображения равен размеру предмета. Из формул /4.5/ - /4.7/ непосредственно следует, что с помощью симметричного дублета невозможно получить стигматичное изображение, равное по величине предмету. Иными словами, хотя источник и изображение расположены на одинаковом расстоянии от линзы, коэффициент увеличения не может быть одновременно равен единице в обеих плоскостях. И действительно, для этого потребовалось бы поместить источник в точке, которая находится на двойном фокусном расстоянии от линзы одновременно и в горизонтальной и в вертикальной плоскостях, а изображение должно оказаться по другую сторону от линзы в точке, где также совмещаются двойные фокусы в обеих плоскостях. Иначе говоря, для этого должны выполняться условия:

$$g_{oH} + F_H = g_{oV} + F_V \quad /4.12/$$

и

$$g_{iH} + F_H = g_{iV} + F_V, \quad /4.13/$$

но так как

$$F_H = F_V = F,$$

то это может случиться лишь при

$$g_{OH} = g_{OV} \quad \text{и} \quad g_{iH} = g_{iV} ,$$

что, как мы видели выше, в симметричном дублете не осуществляется.

Коэффициент линейного увеличения линзы следующим образом выражается через элементы матрицы перехода в горизонтальной плоскости -

$$K_H = h_{11} + h_{21} T \quad /4.14/$$

и соответственно в вертикальной плоскости -

$$K_V = v_{11} + v_{21} T . \quad /4.15/$$

Очевидно, что  $K_H$  не равен  $K_V$ , так как  $h_{21} = v_{21}$ , а  $h_{11} \neq v_{11}$ . Результаты расчетов коэффициентов увеличения по формулам /4.14/ и /4.15/, сведенные в таблицу 1, показывают, что разница увеличений в горизонтальной и вертикальной плоскостях весьма значительна.

Т а б л и ц а 1.

Расчетные величины коэффициентов увеличения симметричного квадрульного дублета

$\phi$	0,50	0,60	0,70	0,80
$K_{\Phi Д}$	1,26	1,38	1,55	1,75
$K_{Д \Phi}$	0,76	0,66	0,57	0,46

Физическую природу этого явления нетрудно понять, обратившись к рисунку 7. Когда в плоскости ДФ источник находится за двойным фокусом, то в плоскости ФД он оказывается между фокусом и двойным фокусом, поэтому в первой плоскости изображение источника получается уменьшенным, а во второй - увеличенным. Это, на первый взгляд отрицательное, свойство линзы, в ряде случаев оказывается весьма полезным. Так, например, если пучок анализируется по импульсам в поле магнита и одновременно фокусируется квадрульными линзами, то желательно выбрать такую последовательность секций квадрульного дублета, чтобы горизонтальная плоскость была ДФ - плоскостью. В этом случае при неизменной дисперсии анализирующего магнита можно получить значительно лучшее разрешение, чем в плоскости ФД, так как изображение получается меньшей величины.

5. Система из двух квадрупольных дублетов с параллельным пучком  
между ними

Ионно-оптическая система, состоящая из четырех квадрупольных магнитов, позволяет провести интенсивный пучок заряженных частиц на значительное расстояние от ускорителя и сфокусировать его в нужной точке в пятно небольших размеров. Для этого первые две линзы  $Q_1$  и  $Q_2$ , образующие квадрупольный дублет, располагаются возможно ближе к источнику и дают параллельный пучок частиц. На произвольном расстоянии  $D$  от первого дублета находится второй, состоящий из квадрупольей  $Q_3$  и  $Q_4$  /рис. 9/, который фокусирует параллельный пучок в нужной точке. Расстояние  $D$  между линзами не влияет на какие-либо оптические свойства системы и, следовательно, может варьироваться в широких пределах. Это дает возможность гибко приспособлять такую оптическую систему к конкретным условиям размещения магнитного канала /5/.

Для того, чтобы получить параллельный пучок частиц от стигматичного источника, надо совместить фокусы первого дублета в горизонтальной и вертикальной плоскостях в той точке, где находится источник -

$$S = g_{\text{он}} = g_{\text{ов}} \quad /5.1/$$

Второй дублет дает стигматичное изображение при условии, что расстояние от линзы до фокуса в обеих плоскостях одинаково

$$T = g_{\text{ин}} = g_{\text{ив}} \quad /5.2/$$

Для случая, когда  $T$  должно быть равно  $S$ , второй дублет идентичен первому, у которого секции  $Q_1$  и  $Q_2$  переставлены местами. При этом коэффициенты увеличения всего объектива практически равны единице в обеих плоскостях. При  $T > S$  такая система, естественно, дает увеличенное изображение источника.

На рис. 10 приведены графики, позволяющие определить параметры  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  для секций квадрупольного дублета, который удовлетворяет условию /5.1/. Для этого через точку вертикальной оси, которая соответствует заданному расстоянию  $S$  до источника, проводят прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с кривой 1 и находят  $\Phi_1$ . Точка пересечения вертикальной прямой, проходящей через найденное  $\Phi_1$ , с кривой 2 дает нужное значение  $\Phi_2$ . Дублет, состоящий из секций одинаковой длины, дает параллельный пучок частиц при условии, что градиент магнитного поля в первой секции больше, чем во второй ( $\Phi_1 > \Phi_2$ ). Чтобы найти параметры дублета, который фокусирует параллельный пучок, т.е. удовлетворяет условию /5.2/, надо провести горизонтальную прямую через заданное значение  $T$  до пересечения с кривой 2, что даст  $\Phi_3$ , а затем определить  $\Phi_4$  по кривой 1. Теперь градиент в первой секции дублета меньше, чем во второй ( $\Phi_3 < \Phi_4$ ).

## 6. Трехсекционная квадрупольная линза

В ряде работ, выполненных на ускорителях, для фокусировки вторичных пучков применялись трехсекционные квадрупольные линзы<sup>/8,7/</sup>. В таком триплете /рис. 11/ первый и третий квадрупольные магниты совершенно идентичны, а средний повернут относительно их на угол  $90^\circ$  вокруг общей продольной оси системы. Физическая длина полюсов крайних магнитов обычно равна половине длины полюса среднего квадруполья. Для питания крайних секций используется общий источник тока, поэтому магнитное поле в них имеет практически одинаковую величину и меняется одновременно. Если крайние квадрупольи расположены на одинаковых расстояниях от среднего, то такой триплет называют симметричным.

Введем прямоугольную систему координат, ось  $Oz$  которой совместим с продольной осью триплета, а оси  $Ox$  и  $Oy$  направим соответственно вертикально и горизонтально. Все расстояния, отсчитываемые в этой системе вдоль оси  $Oz$ , будем выражать в единицах длины  $L$  средней секции линзы. Пучок заряженных частиц, проходящий через трехсекционную линзу, последовательно испытывает в одной плоскости /для определенности положим, что это вертикальная плоскость/ фокусировку, дефокусировку и снова фокусировку. В плоскости, ортогональной к первой, секции линзы действуют на пучок в обратной последовательности. В общем случае квадрупольные магниты, образующие линзу, разделены участками свободного пространства длиной  $d$ , поэтому вертикальная плоскость - это плоскость ФОДОФ, а горизонтальная соответственно - ДОФОД.

Фокусирующее действие средней секции линзы описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{\sin \phi}{\phi} \\ -\phi \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad /8.1/$$

а дефокусирующее соответственно матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \phi & \frac{\operatorname{sh} \phi}{\phi} \\ \phi \operatorname{sh} \phi & \operatorname{ch} \phi \end{pmatrix}. \quad /8.2/$$

Если обозначить через  $k$  отношение длины крайней секции к длине средней, то матрица перехода для крайних секций имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} \cos k\varphi & \frac{\sin k\varphi}{\varphi} \\ -\varphi \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix} \quad /8.3/$$

при фокусировке и

$$\begin{pmatrix} ch k\varphi & \frac{sh k\varphi}{\varphi} \\ \varphi sh k\varphi & ch k\varphi \end{pmatrix} \quad /6.4/$$

при дефокусировке пучка заряженных частиц. В этих выражениях величина

$$\Phi = L \sqrt{\frac{300 G_{ср}}{\rho}} \quad /6.5/$$

пропорциональна градиенту магнитного поля в среднем квадруполе, а

$$\varphi = L \sqrt{\frac{300 G_{кр}}{\rho}} \quad /6.6/$$

пропорционально значению градиента в крайних квадруполях. Импульс частиц  $P$  выражен в электронвольтах, длина линзы  $L$  - в см, а градиент магнитного поля - в гс/см.

Чтобы получить общую матрицу перехода, описывающую действие квадрупольного триплета на пучок частиц в плоскости ДОФOD, необходимо перемножить матрицы отдельных секций, расположенные в следующем порядке

$$\begin{pmatrix} ch k\varphi & \frac{sh k\varphi}{\varphi} \\ \varphi sh \varphi & ch k\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{\varphi} \\ -\varphi \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch k\varphi & \frac{sh k\varphi}{\varphi} \\ \varphi sh k\varphi & ch k\varphi \end{pmatrix} \quad /6.7/$$

Элементы трансформирующей матрицы  $(H)$  для горизонтальной плоскости<sup>x/</sup> имеют такой вид:

$$\begin{aligned} h_{11} = h_{22} &= ch 2k\varphi [\cos \varphi - \varphi d \sin \varphi] \\ &\quad - \frac{1}{2} sh 2k\varphi \sin \varphi \left[ \varphi \varphi d^2 + \frac{\varphi}{\varphi} - \frac{\varphi}{\varphi} \right] + \varphi d sh 2k\varphi \cos \varphi; \\ h_{12} &= ch^2 k\varphi \left\{ d [\cos \varphi - \varphi d \sin \varphi] + d \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\varphi} sh 2k\varphi [\cos \varphi - \varphi d \sin \varphi] - \frac{\varphi}{\varphi^2} sh^2 k\varphi \sin \varphi; \\ h_{21} &= \varphi^2 sh^2 k\varphi \left\{ d [\cos \varphi - \varphi d \sin \varphi] + d \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right\} \\ &\quad - \varphi ch^2 k\varphi \sin \varphi + \varphi sh 2k\varphi [\cos \varphi - \varphi d \sin \varphi]. \end{aligned} \quad /6.8/$$

Равенство диагональных элементов матрицы  $h_{11}$  и  $h_{22}$  означает в соответствии с /3,7 - 3,8/, что фокусы со стороны источника и со стороны изображения находятся на одинаковом расстоянии от линзы:

<sup>x/</sup> Напомним, что достаточно одновременно изменить направление тока во всех секциях линзы на противоположное, чтобы плоскостью ДОФOD стала вертикальная плоскость.

$$g_0 = -\frac{h_{11}}{h_{21}} = -\frac{h_{22}}{h_{21}} = g_i \quad /6.9/$$

Следовательно, главные плоскости триплета расположены симметрично по обе стороны от середины линзы /рис. 12/.

Матрицу перехода в плоскости ФОДОФ можно получить совершенно таким же способом как /6.8/, перемножив следующие матрицы для отдельных участков траектории частицы:

$$\begin{pmatrix} \cos k\varphi & \frac{\sin k\varphi}{\varphi} \\ -\varphi \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \phi & \frac{\operatorname{sh} \phi}{\phi} \\ \phi \operatorname{sh} \phi & \operatorname{ch} \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k\varphi & \frac{\sin k\varphi}{\varphi} \\ -\varphi \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix} /6.10/$$

Фокусные расстояния триплета в горизонтальной ( $F_H$ ) и в вертикальной ( $F_V$ ) плоскостях неодинаковы, так как  $h_{21} \neq \vartheta_{21}$ . Следовательно, триплет является астигматичной линзой, и для того, чтобы совместить в одной точке оптической оси изображения, полученные в вертикальной и в горизонтальной плоскостях, необходимо специально подбирать градиенты в сечениях линзы. Практическое выполнение этой процедуры упрощается, если градиент в средней секции оставить неизменным, а величину градиента в крайних магнитах регулировать одновременно. На рис 13 показано, как меняется при этом положение изображения относительно среза линзы в плоскостях ФОДОФ и ДОФОД. Точка пересечения кривых 1 и 2 дает расстояние  $T$  от линзы до совмещенного изображения и величину  $\varphi$ , пропорциональную градиенту поля крайних магнитов. Если найденное значение  $T$  не подходит, надо изменить величину градиента в средней секции и снова регулировать градиенты в крайних сечениях. Подчеркнем одну интересную особенность квадрупольного триплета: если градиент в крайних сечениях сохраняет постоянное значение, а градиент в средней секции меняется, то характер изменения расстояния  $T$  от линзы до изображения в горизонтальной и вертикальной плоскостях оказывается существенно различным /рис. 14/. В плоскости ФОДОФ изображение при этом смещается мало, в то время как в плоскости ДОФОД величина  $T$  меняется очень резко. Таким образом появляется возможность менять положение изображений относительно линзы в горизонтальной и вертикальной плоскостях практически независимым образом.

При совмещении фокусов линзы в горизонтальной и вертикальной плоскостях со стороны источника ( $g_{0H} = g_{0V}$ ) в силу /6.8/ одновременно совмещаются и фокусы со стороны изображения ( $g_{iH} = g_{iV}$ ). Поместив источник частиц на двойном фокусном расстоянии от линзы, в этом случае получают совмещенное изображение, размер которого равен размеру источника ( $K_H = K_V = 1$ ). По мере того как изображение, оставаясь совмещенным, отодвигается от линзы /при постоянном  $S/$

коэффициенты увеличения становятся больше единицы, однако отношение  $K_H/K_V$  остается близким к единице.

Анализ возможных вариантов использования квадрупольных линз для фокусировки пучков заряженных частиц показывает, что имеется два "предельных" случая: в одном из них расстояние от линзы до изображения равно расстоянию от источника до линзы, во втором линза дает параллельный пучок частиц. Это означает, что градиенты магнитного поля в секциях триплета должны соответственно меняться от некоторого  $G_{max}$ , при котором источник оказывается на двойном фокусном расстоянии от линзы, до значительно меньшего  $G_{min}$ , когда источник лежит в фокусе.

Предположим, что расстояние от источника до линзы неизменно и равно такому минимальному  $S_{min}$ , которое может встретиться на практике. Если источник частиц стигматичен, т.е. лежит в одной и той же точке оптической оси в обеих плоскостях, то в первом случае необходимо совместить в этой точке двойные фокусы:

$$S_{min} = (g_0 + F)_H = (g_0 + F)_V, \quad /6.11/$$

а во втором соответственно фокусы линзы:

$$S_{min} = g_{OH} = g_{OV}. \quad /6.12/$$

С помощью графиков, приведенных на рис. 15, нетрудно оценить, в каких пределах должен меняться градиент магнитного поля в секциях триплета для того, чтобы при заданном расстоянии  $S$  до мишени можно было удовлетворить соотношениям /6.11/ и /6.12/. Графики рассчитаны для триплета, составленного из линз МЛ-17 и МЛ-16, у которого расстояние между секциями  $d = 1$ , а  $k = 0,6$ . Кривая 1 дает положение совмещенных фокусов линзы в зависимости от  $\Phi$ . Проведя через точку вертикальной оси, которая соответствует заданному значению  $S$ , горизонтальную прямую до пересечения с этой кривой, находим нужную величину  $\Phi$ . Точка пересечения прямой  $\Phi = const$  с кривой 1а позволяет определить соответствующее значение  $\Phi$  для крайних секций линзы. Аналогичным образом с помощью кривых 2 и 2а/ находят значения  $\Phi$  и  $\Phi$ , при которых удовлетворяется условие /6.11/.

В заключение остановимся на одном существенном недостатке квадрупольного триплета. Для того, чтобы упростить выкладки, предположим, что триплет состоит из квадрупольей, расположенных вплотную друг к другу /  $d = 0$ /. Пусть градиент магнитного поля во всех секциях имеет одинаковую величину, а отношение  $k = 0,5$ . В этом случае выражения для элементов матриц перехода в плоскостях ДФД и ФДФ существенно упрощаются и, в частности,



$$h_{21} = \phi (\cos \phi \operatorname{sh} \phi - \sin \phi) \quad /6.13/$$

и

$$v_{21} = \phi (\operatorname{sh} \phi - \sin \phi \operatorname{ch} \phi). \quad /6.14/$$

Если разложить /6.13/ и /6.14/ в степенной ряд по  $\phi$  и ограничиться членами четвертого порядка, получим

$$h_{21} = v_{21} \approx -\frac{\phi^4}{3}. \quad /6.15/$$

Сопоставив фокусное расстояние такого триплета

$$F_T \approx \frac{3}{\phi^4} \quad /6.16/$$

с фокусным расстоянием симметричного квадрупольного дублета

$$F_{\Delta} \approx \frac{3}{2\phi^4},$$

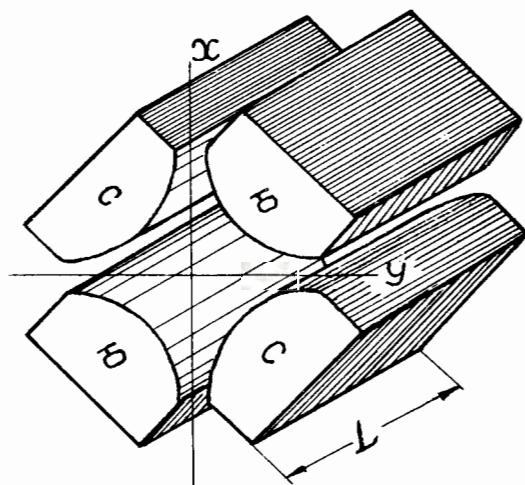
находим, что при одинаковой суммарной длине области магнитного поля в этих линзах и одинаковых градиентах дублет фокусирует в два раза сильнее трехсекционной квадрупольной линзы. Более сложные выкладки позволяют убедиться, что этот вывод справедлив и для общего случая, когда  $\phi \neq \varphi$ ; таким образом, трехсекционная линза значительно менее экономична, нежели обычный квадрупольный дублет.

Автор выражает глубокую благодарность В.Н. Зубареву за полезное обсуждение и ценные советы, а также М.М. Кузнецову за изготовление приборов и приспособлений для магнитных измерений.

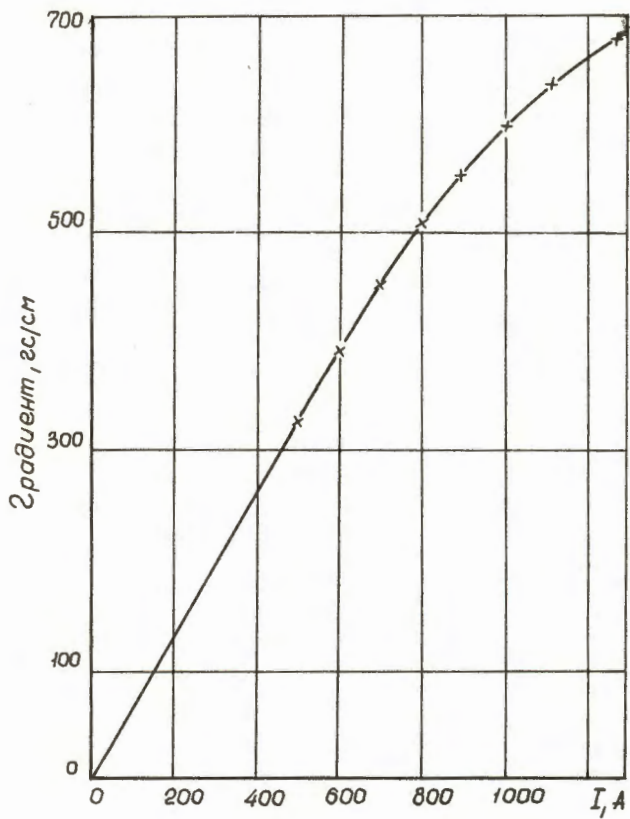
#### Л и т е р а т у р а

1. В.С. Кладницкий, В.Б. Флягин. Препринт ОИЯИ /в печати/.
2. P.Grivet, A.Septier. Nucl. Instr. and Meth., 6, 126, 243 (1960).
3. L.C.Teng Rev. Sci. Instr., 25, 264 (1954).
4. Дж. Ливингуд. Принципы работы циклических ускорителей. Стр. 394. ИЛ., Москва, 1963.
5. H.Schneider. Nuclear Instr., 1, 268 (1957).
6. E.L.Hubbard, E.L.Kelly. Rev. Sci. Instr., 25, 737 (1954).
7. H.A.Engel. Rev. Sci. Instr., 32, 662 (1961).

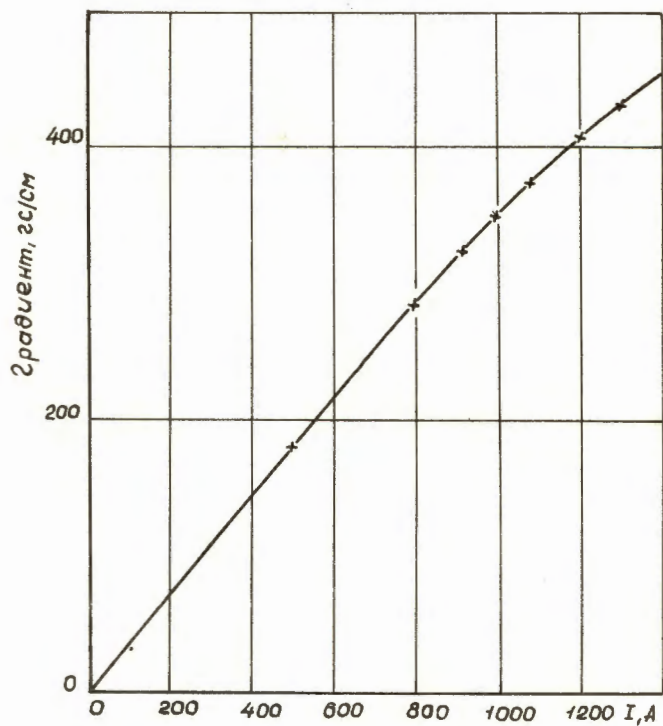
Рукопись поступила в издательский отдел  
27 ноября 1963 г.



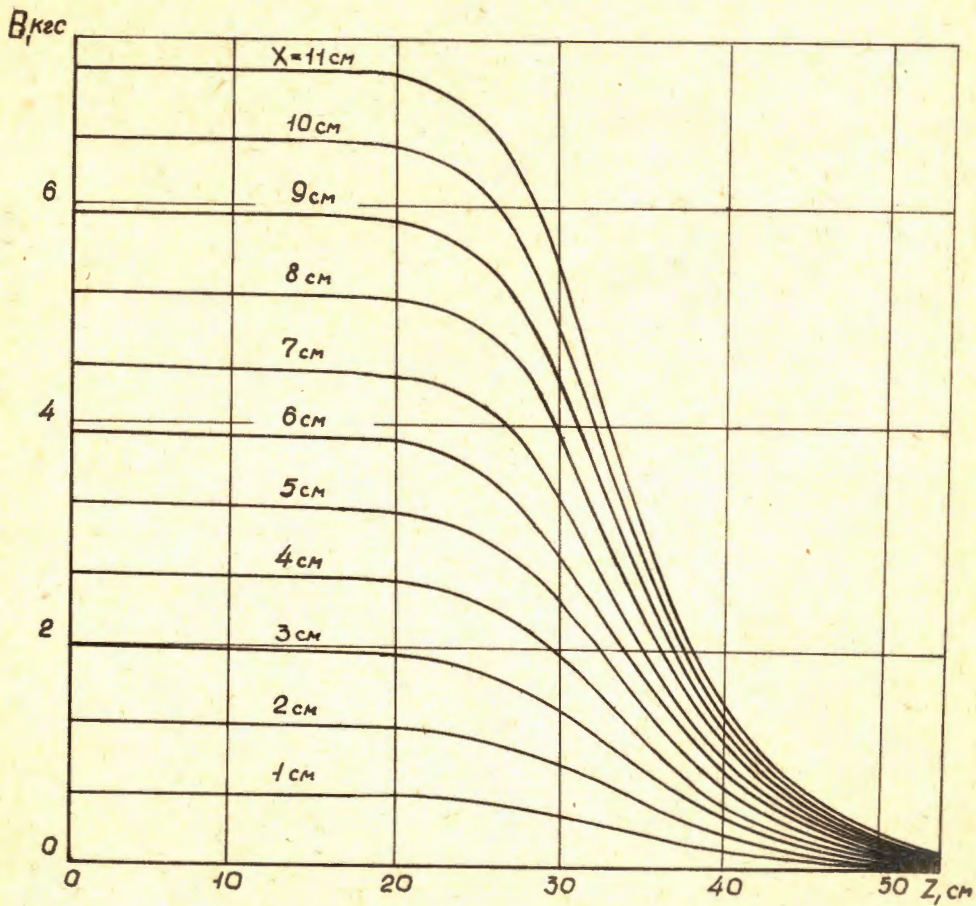
Р и с. 1. Конфигурация и относительное расположение полюсов квадрупольной линзы.



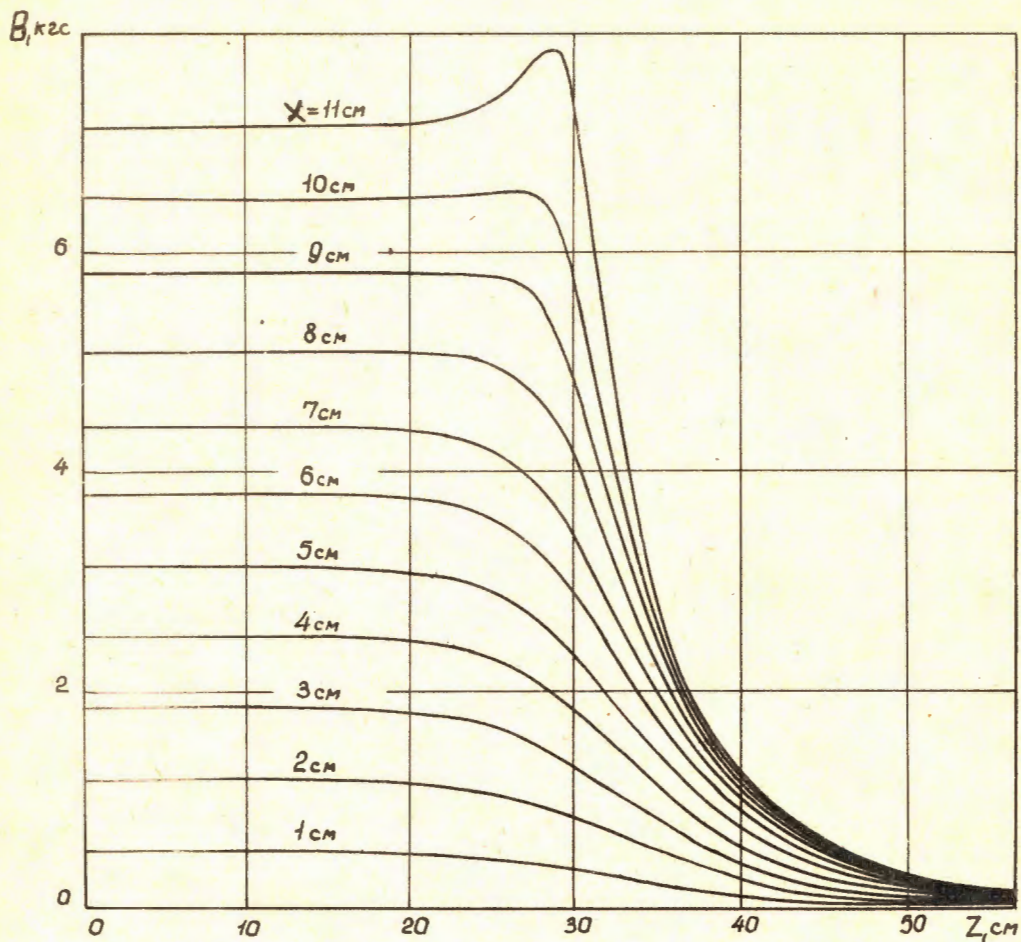
Р и с. 2. Зависимость градиента магнитного поля в присоединенной области линзы МЛ-17 от тока  $I$  в обмотке линзы.



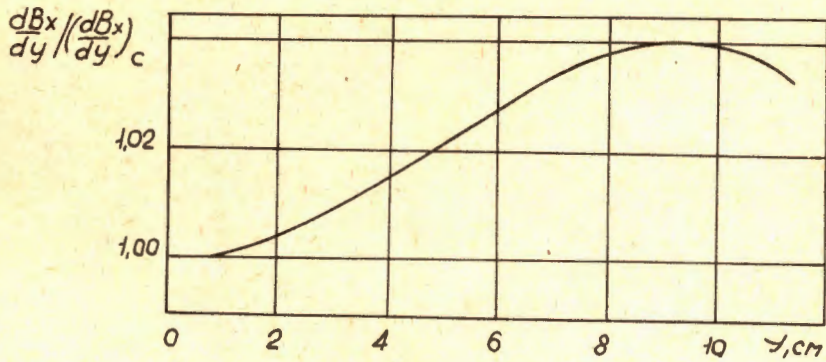
Р и с. 3. Зависимость градиента магнитного поля в приосевой области линзы МЛ-7 от тока  $I$



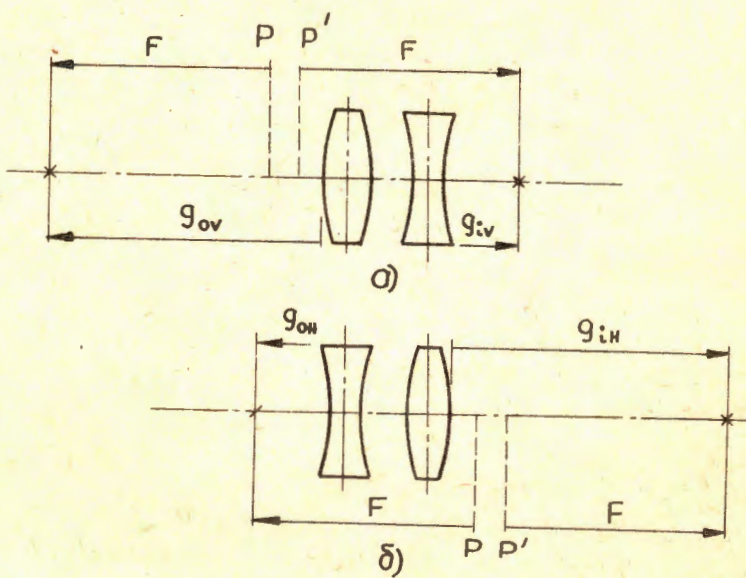
Р и с. 4. Распределение поперечной составляющей магнитного поля  $B_y$  для линзы МЛ-17.



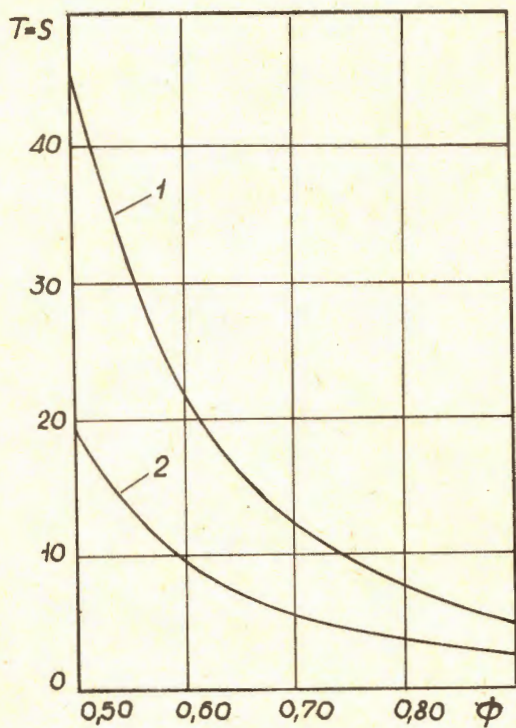
Р и с. 5. Распределение поперечной составляющей магнитного поля в плоскости, проходящей через середины противоположных одноименных полюсов линзы МЛ-17.



Р и с. 6. Радиальная вариация градиента в линзе МЛ-17.

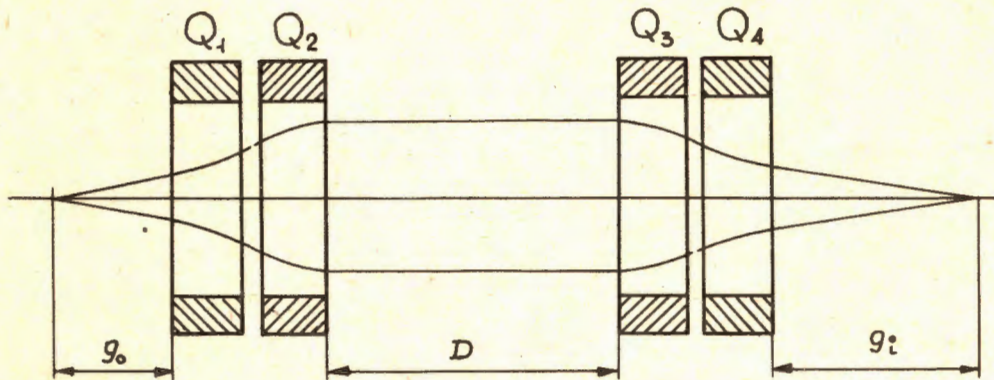


Р и с. 7. Положение фокусов и главных плоскостей симметричного квадрупольного дублета а/ в плоскости ФД; б/ в плоскости ДФ.

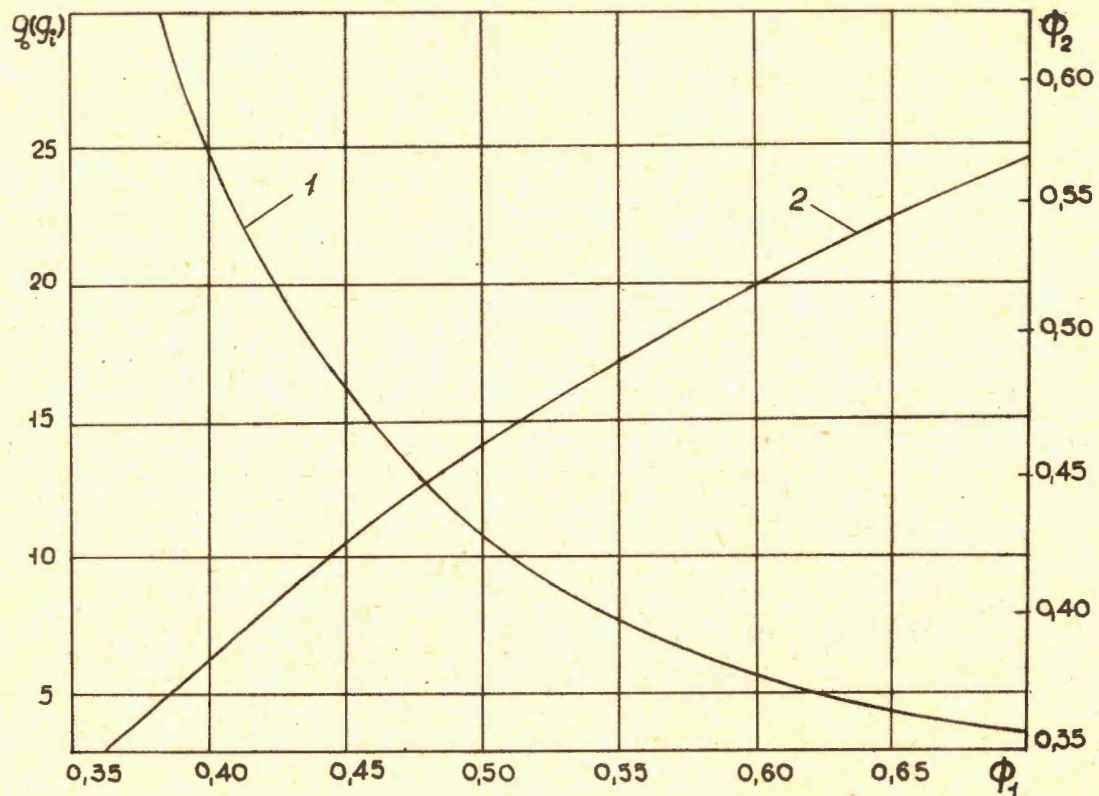


Р и с. 8. Зависимость расстояния  $T$  от симметричного дублета до стигматичного изображения от  $\phi$  1/ для случая  $d=0$  ; 2/ для случая  $d=1$ .

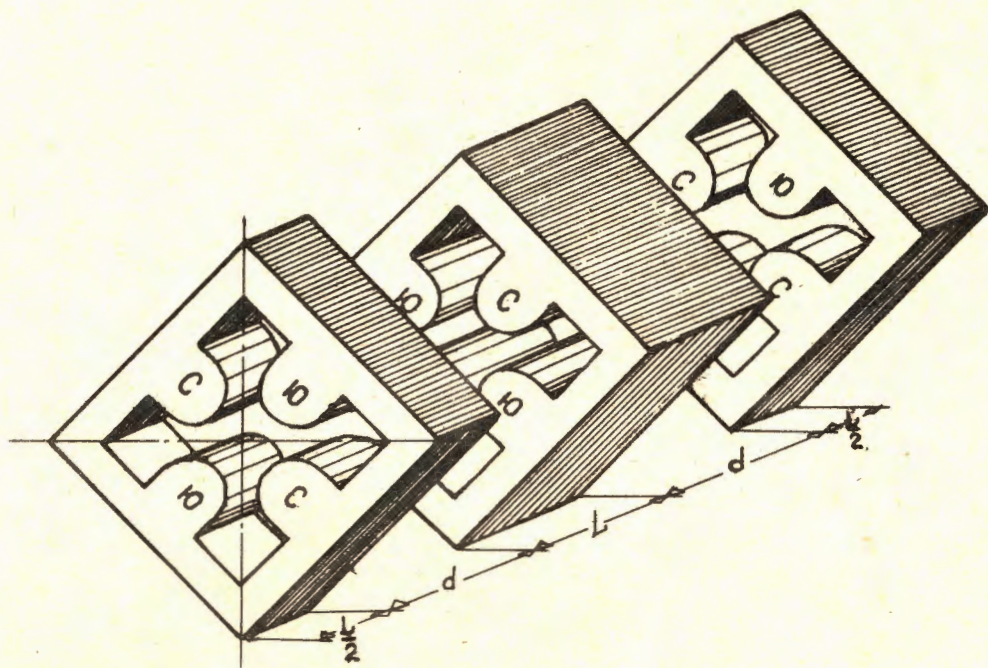




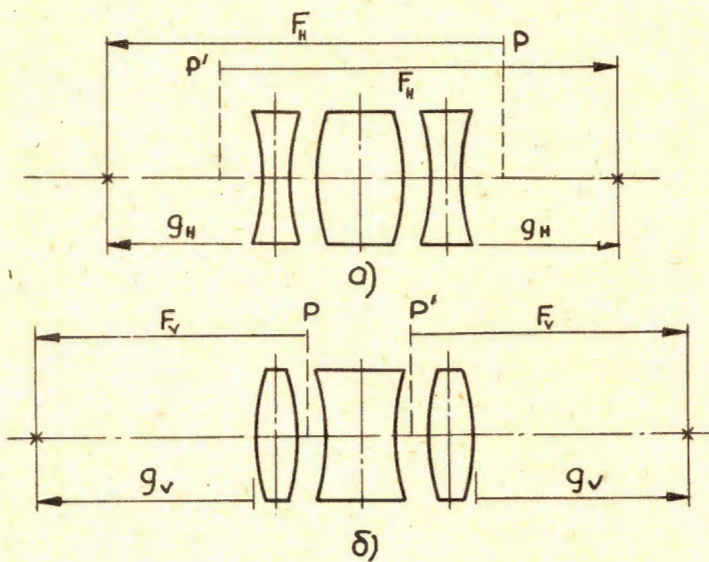
Р и с. 9. Система из двух квадрупольных дублетов с параллельным лучком между ними.



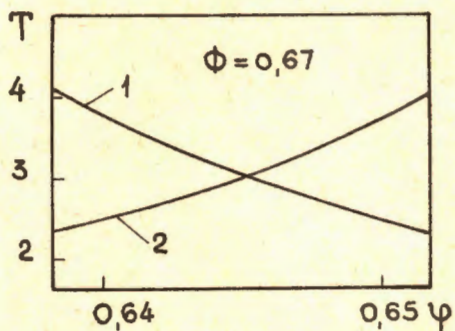
Р и с. 10. Графики для определения параметров оптической системы, показанной на рис. 9.



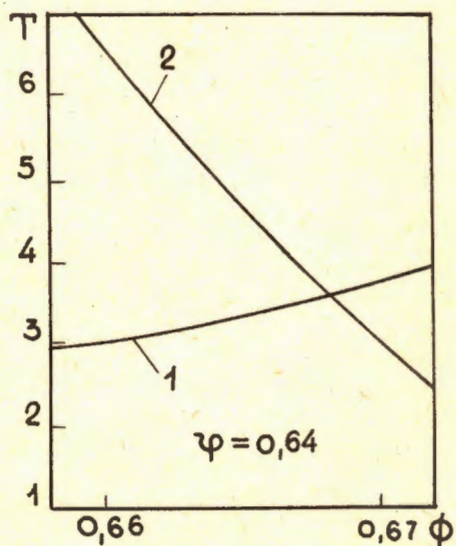
Р и с. 11. Трехсекционная квадрупольная линза.



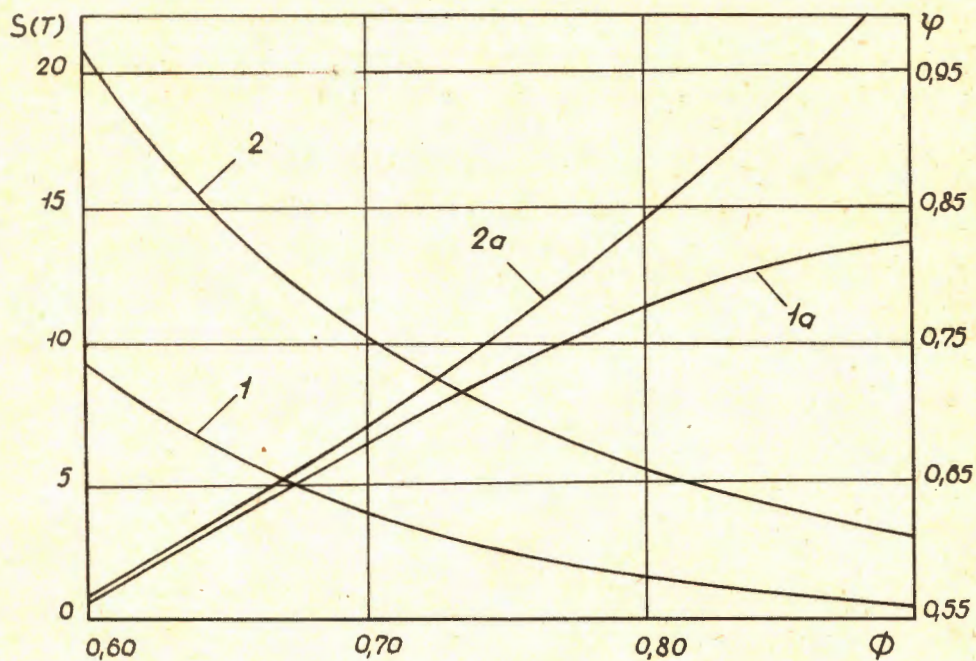
Р и с. 12. Положение фокусов и главных плоскостей для квадрупольного триплета:  
 а/ в плоскости ДОФOD; б/ в плоскости ФОДОФ.



Р и с. 13. Вариация расстояния  $T$  от линзы до изображения в зависимости от  $\varphi$  1/ в плоскости  $\Phi O D O \Phi$ ; 2/ в плоскости  $D O \Phi O D$ .



Р и с. 14. Вариация расстояния  $T$  от линзы до изображения 1/ в плоскости  $\Phi O D O \Phi$  и 2/ в плоскости  $D O \Phi O D$  в зависимости от  $\varphi$



Р и с. 15. Графики для расчета параметров симметричного квадрупольного триплета.