

25.12.63 ✓

15

5 - 95



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Ю.А. Бычков

1486

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ
ОПТИМАЛЬНОГО ВЫДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ
НА ФОНЕ ШУМА

Дубна 1983

Ю.А. Бычков

1466

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ
ОПТИМАЛЬНОГО ВЫДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ
НА ФОНЕ ШУМА

2194/2 чз.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1963

Проблема оптимального выделения полезных сигналов на фоне шума является весьма актуальной, о чем свидетельствует большое количество посвященных ей фундаментальных работ^{/1-3/} и журнальных статей. При этом четко различаются, по крайней мере, два направления: 1/ оптимальное обнаружение сигналов в шумах и помехах по критерию максимума отношения сигнал-шум^{/4/}, и 2/ оптимальная фильтрация по критерию минимума среднеквадратичной ошибки^{/5/}. Первое направление характерно, например, для радиолокации, второе широко используется для оптимального воспроизведения формы сигналов в системах автоматического управления и регулирования.

Ниже рассматривается одна частная задача оптимального обнаружения сигналов в рамках теории, изложенной в^{/4/}.

Постановка задачи

В некоторых практических применениях электрические сигналы могут быть аппроксимированы колокольной /"вероятностной"/ функцией вида

$$u(t) = U_0 e^{-at^2} \quad /1/$$

Такой характер, например, имеют сигналы на выходе фотоумножителя в устройствах ускоренного и автоматического просмотра ядерных фотоэмульсий^{/6,7/}. Сигналы случайным образом появляются среди шума, причем исходное отношение сигнал-шум недостаточно для непосредственного использования сигналов. На рис. 1 изображена типичная осциллограмма такого сигнала. Будем считать шум нормально распределенным и "белым" с равномерной в достаточно широкой полосе частот плотностью энергетического спектра W_0 . В дальнейшем будет показана справедливость такого допущения.

Необходимо синтезировать фильтрующее устройство, на выходе которого отношение сигнал-шум будет максимальным. Кроме того, по условию задачи необходимо сформировать сигнал таким образом, чтобы зафиксировать во времени амплитуду сигнала, т.е. точку, в которой производная

$$\frac{du(t)}{dt} = 0, \quad /2/$$

3. Оптимальные фильтры

Обозначим сигналы на входе и выходе фильтра через $u_1(t)$ и $u_2(t)$ соответственно. Отношение сигнал шум на выходе фильтра $(\frac{c}{ш})_2$ определим как отношение квадрата пикового значения сигнала на выходе u_2^2 к среднему квадрату /мощности/ выходного шума σ_2^2

$$\left(\frac{c}{ш}\right) = \frac{u_2^2}{\sigma_2^2} \quad /3/$$

В /4/ показано, что максимально возможное отношение $(\frac{c}{ш})_{\max \max}$ равно

$$\left(\frac{c}{ш}\right)_{\max \max} = \frac{2E_1}{W_0} \quad /4/$$

где E_1 - энергия входного сигнала, определяемая как

$$E_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^2(\omega) d\omega \quad /5/$$

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) e^{-j\omega t} dt \quad /6/$$

- спектральная плотность сигнала $U_1(t)$. Там же в /3/ показано, что соотношение /4/ реализуется только оптимальным данному сигналу фильтром, который должен иметь комплексную передаточную функцию вида

$$\bar{K}_0(\omega) = K_0 \bar{S}_1^*(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} \quad /7/$$

где K_0 - постоянный коэффициент;

τ - время задержки сигнала;

$\bar{S}_1^*(\omega)$ - функция, комплексно сопряженная спектральной плотности сигнала, т.е.

$$\bar{S}_1^*(\omega) = S_1(\omega) e^{-j\phi(\omega)} \quad /8/$$

Если энергетический спектр входного шума является функцией частоты $W_1(\omega) \neq \text{const}$ /не "белый" шум/, то, как было показано В.А. Котельниковым /3/, такой шум можно преобразовать в "белый" с постоянной плотностью W_0 , путем пропускания его через линейный четырехполюсник с передаточной функцией

$$K_1^2(\omega) = \frac{W_0}{W_1(\omega)} \quad /9/$$

Таким образом, проводимый ниже анализ можно распространить на случай шума с любым распределением плотности энергетического спектра.

4. Фильтр, оптимальный сигналу $u_1(t) = u_0 e^{-at^2}$

В нашем случае сигнал представляет собой функцию, приближающуюся к нулевому значению асимптотически, поэтому определим такое значение $t = t_{01}$, при котором $u_1(t) \approx 0$. Таким значением с погрешностью $\sim 4\%$ по напряжению и $\sim 0,5\%$ по энергии сигнала будет

$$t_{01} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad /10/$$

Согласно /6/, спектральная плотность сигнала $u_1(t)$ равна $S_1(\omega) = U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-j\omega t} dt$, что после необходимых преобразований и интегрирования /8/ дает

$$S_1(\omega) = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad /11/$$

В этом случае оптимальный фильтр должен иметь передаточную функцию

$$\bar{K}_0(\omega) = K_0 e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \cdot e^{-j\omega\tau} \quad /12/$$

Частотная и фазовая характеристики оптимального фильтра выражаются соответственно:

$$K_1(\omega) = K_0 e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad /13/$$

$$\phi(\omega) = -\omega\tau \quad /14/$$

Сигнал передается фильтром с задержкой во времени на τ . Согласно /4/, любой оптимальный фильтр /в пределах минимально фазовых систем/ можно с любой степенью точности осуществить при помощи конечного числа линейных элементов: интегрирующих, задерживающих, суммирующих и др. четырехполюсников. Не касаясь вопроса о схеме реализации оптимально фильтра, выведем соотношения для сигнала и шума на выходе фильтра, оптимального сигналу $u_1(t)$. Так как система линейная, то по принципу суперпозиции рассмотрим в отдельности прохождение сигнала и шума. Анализ проведем спектральным методом /8/.

1.4. С и г и а л. Функция спектральной плотности $S_2(\omega)$ сигнала $u_2(t)$ на выходе фильтра равна произведению спектральной плотности исходного сигнала /11/ на модуль передаточной функции фильтра /13/

$$S_2(\omega) = K_0 U_0 \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \cdot e^{-j\omega\tau} = K_0 U_0 t_{01} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad /15/$$

Сигнал на выходе фильтра равен

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{K_0 U_0 t_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2a}} e^{j\omega t} d\omega, \quad /16/$$

что после интегрирования /8/ дает

$$u_2(t) = \frac{K_0 U_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{at^2}{2}}. \quad /17/$$

Из /1/ и /17/ видно, что амплитуда сигнала изменилась в $\frac{K_0}{\sqrt{2}}$, а длительность увеличилась в $\sqrt{2}$ раз. Аналогично /10/ можно написать

$$t_{02} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \quad /18/$$

2.4. Ш у м. Как известно /10/, равномерный спектр "белого" шума W_0 на выходе линейного четырехполюсника с частотной характеристикой $K_1(\omega)$ преобразуется к виду

$$W_2(\omega) = W_0 K_1^2(\omega). \quad /19/$$

Подставляя /13/ в /19/, получим

$$W_2(\omega) = W_0 K_0^2 e^{-\frac{\omega^2}{2a}}. \quad /20/$$

Средняя мощность /дисперсия/ шума равна

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W_2(\omega) d\omega = \frac{W_0 K_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2a}} d\omega. \quad /21/$$

После интегрирования /21/, получим

$$\sigma_2^2 = \frac{W_0 K_0^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi a}{2}}. \quad /22/$$

Теперь можно определить отношение сигнал/шум на выходе фильтра. Оно равно

$$\left(\frac{c}{ш}\right)_2 = \frac{U_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{\sqrt{2} U_0^2}{W_0} t_{01}. \quad /23/$$

Из /5/ и /11/ полная энергия сигнала $U_1(t)$ равна

$$E_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^2(\omega) d\omega = \frac{U_0^2}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2a}} d\omega = \frac{U_0^2}{\sqrt{2}} t_{01}. \quad /24/$$

Подставляя /24/ в /4/, получим

$$\left(\frac{c}{ш}\right)_{\max \max} = \frac{\sqrt{2} U_0^2}{W_0} t_{01}. \quad /25/$$

Сравнивая /23/ с /25/, убеждаемся, что наш оптимальный фильтр реализует максимально возможное отношение сигнал-шум.

5. Формирование сигнала

Выше было показано, что сигнал колокольной формы после прохождения через оптимальный ему фильтр расширяется в $\sqrt{2}$ раз. Поэтому для фиксации во времени его амплитуды /условие /1// необходимо тем или иным способом "обострить" сигнал. Методы фиксации сигналов во времени описаны в /11/. Однако хорошо известно, что наиболее простым способом формирования сигналов является электрическое дифференцирование, а также формирование на линии задержки /12/. Последний способ представляет по существу вычитание сигнала самого из себя со сдвигом во времени. Хотя оба способа широко применяются, покажем, что при формировании сигнала в присутствии шума на выходе оптимального фильтра вычитание обеспечивает лучшее отношение сигнал шум, чем дифференцирование.

1.5. Вычитание со сдвигом во времени. На рис. 2 изображена полная блок-схема устройства для оптимальной фильтрации и формирования сигналов колокольной формы. Устройство состоит из оптимального фильтра ОФ, двух линий задержки на время t_1 и t_2 и двух вычитающих схем "Выч. I" и "Выч. II" соответственно. Определим соотношения для сигнала и шума в точках, обозначенных на блок-схеме рис. 2^{x/}.

Сигнал после задержки на время t_1 и вычитания равен

$$u_3(t) = u_2(t) - u_2(t - t_1) = \frac{K_0 U_0}{\sqrt{2}} \left[e^{-\frac{at^2}{2}} - e^{-\frac{a(t-t_1)^2}{2}} \right]. \quad /26/$$

Функция $u_3(t)$ имеет два максимума

$$U_{3m} = \pm \frac{K_0 U_0}{\sqrt{2}} \quad /27/$$

в точках $t_1 = 0$ и $t_2 = t_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$. Вычтем сигнал $u_3(t)$ еще раз сам из себя с задержкой на t_2 . Тогда

$$u_4(t) = u_3(t) - u_3(t - t_2). \quad /28/$$

После подстановки $u_3(t)$ из /26/ и полагая $t_1 = t_2 = t_{02} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$, получим

$$u_4(t) = \frac{K_0 U_0}{\sqrt{2}} \left[e^{-\frac{at^2}{2}} - 2e^{-\frac{a(t-t_{02})^2}{2}} + e^{-\frac{a(t+t_{02})^2}{2}} \right]. \quad /29/$$

Сигнал $u_4(t)$ имеет три максимума. Один из них

$$U_{4m1} = -2U_{3m} = -\frac{2K_0 U_0}{\sqrt{2}} \quad /30/$$

x/ В дальнейшем индексы в обозначениях величин будут совпадать с номерами этих точек на рис. 2.

в точке $t_1 = t_{02} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$ и два других

$$U_{4m2,3} = U_{3m} = \frac{K_0 U_0}{\sqrt{2}} \quad /31/$$

в точках $t_2 = 0$ и $t_3 = 2t_{02}$. Первый максимум /30/ с задержкой во времени на $t_{02} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$ соответствует амплитуде сигнала на выходе оптимального фильтра и равен ее удвоенному значению с обратным знаком.

На рис. 3 изображена форма сигналов при однократном и двукратном вычитании для случая, когда $a = 0,1$. На рис. 4 представлены модуль и фаза спектральной плотности сигналов при вычитании.

Далее, найдем соотношения для шума после однократного и двукратного вычитания с задержкой на $t_1 = t_2$. Согласно /10/, распределение плотности энергетического спектра шума на выходе схемы вычитания "Выч. 1" будет

$$W_s(\omega) = W_2(\omega) K_2^2(\omega), \quad /32/$$

где $K_2^2(\omega)$ - квадрат модуля передаточной функции схемы вычитания. Можно показать /9/, что последний равен

$$K_2(\omega) = 2 \left| \sin \frac{\omega t_1}{2} \right|. \quad /33/$$

Тогда, подставляя /20/, получим

$$W_s(\omega) = W_0 K_0^2 e^{-\frac{\omega^2}{2a}} \cdot 4 \sin^2 \frac{\omega t_1}{2} = 2 W_0 K_0^2 e^{-\frac{\omega^2}{2a}} (1 - \cos \omega t_1). \quad /34/$$

Функция корреляции шума после первого вычитания равна

$$B_s(r, r_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W_s(\omega) \cos \omega r d\omega = \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{\omega^2}{2a}} (1 - \cos \omega t_1) \cos \omega r d\omega. \quad /35/$$

После вычисления интеграла /35/ /8/ получим

$$B_s(r, r_1) = \frac{W_0 K_0^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \left[2e^{-\frac{ar^2}{2}} - e^{-\frac{a(r-r_1)^2}{2}} - e^{-\frac{a(r+r_1)^2}{2}} \right]. \quad /36/$$

Согласно /10/, дисперсия σ_s^2 равна

$$\sigma_s^2 = B_s(0, r_1) = \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} (1 - e^{-\frac{ar_1^2}{2}}), \quad /37/$$

а подставляя $t_1 = t_{02} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$ и принимая во внимание /22/, получим

$$\sigma_s^2 = \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} = 2 \sigma_2^2. \quad /38/$$

Проделав аналогичные вычисления, можно определить среднюю мощность шума /дисперсию/ на выходе схемы "Выч. II". Она равна

$$\sigma_4^2 = 3\sigma_3^2 = \frac{3W_0 K_0^2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi a}{2}}. \quad /39/$$

Теперь можно определить отношения сигнал-шум после первого и второго вычитания. Подставляя в /3/ /27/ и /38/, получим

$$\left(\frac{c}{ш}\right)_3 = \frac{U_0^2}{\sqrt{2}W_0} t_{01}, \quad /40/$$

где $t_{01} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Из /30/ и /39/ аналогично определим $\left(\frac{c}{ш}\right)_4$

$$\left(\frac{c}{ш}\right)_4 = \frac{2\sqrt{2}U_0^2}{3W_0} t_{02}. \quad /41/$$

Принимая максимально возможное отношение сигнал-шум /25/ за единицу, можем написать

$$\left(\frac{c}{ш}\right)_{\max \max} : \left(\frac{c}{ш}\right)_3 : \left(\frac{c}{ш}\right)_4 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{2}{3}. \quad /42/$$

2.5. Дифференцирование сигнала и шума. Предположим для простоты, что осуществляется идеальное дифференцирование, т.е. дифференцирующее устройство имеет комплексную передаточную функцию

$$K_d(j\omega) = T \omega e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad /43/$$

где T - постоянная, имеющая размерность времени. Определим отношения сигнал-шум после однократного и двукратного дифференцирования сигнала и шума на выходе оптимального фильтра. Задача о прохождении сигнала и шума через дифференцирующее устройство подробно рассмотрена в /9/ и /10/, поэтому здесь мы опустим все промежуточные вычисления и напомним сразу конечный результат.

Отношение сигнал-шум после первого дифференцирования равно

$$\left(\frac{c}{ш}\right)'_2 = \frac{0,36\sqrt{2}U_0^2}{W_0} t_{01}, \quad /44/$$

а после второго

$$\left(\frac{c}{ш}\right)''_2 = \frac{\sqrt{2}U_0^2}{3W_0} t_{01}. \quad /45/$$

Принимая, как и в /42/, максимально возможное отношение сигнал-шум за единицу, получим

$$\left(\frac{c}{ш}\right)_{\max \max} : \left(\frac{c}{ш}\right)'_2 : \left(\frac{c}{ш}\right)''_2 = 1 : 0,36 : \frac{1}{3}. \quad /46/$$

Сравнивая /42/ с /46/ убеждаемся в преимуществе формирования сигнала вычита-

нием со сдвигом во времени по сравнению с дифференцированием. Физически причина заключается в том, что частотные характеристики при вычитании лучше согласуются со спектром сигнала на выходе оптимального фильтра, чем при дифференцировании.

Для сравнения на рис. 5 изображена форма /при $a = 0,1$ /, а на рис. 6 - модули спектральной плотности сигналов при дифференцировании.

6. О физической реализации фильтра, оптимального сигналу колокольной формы

Не вдаваясь в довольно сложные вычисления, остановимся лишь на принципиальной стороне этого вопроса. Так как этот вопрос неоднократно исследовался в применении к усилителям высокой частоты, то процитируем высказывания авторов одной из работ^{x/}: "гауссова форма частотных характеристик фильтров ... физически не реализуется, но этот вопрос носит скорее академический характер. А именно: гауссова форма амплитудно-частотных характеристик может считаться пределом, к которому стремится амплитудно-частотная характеристика очень большого количества соединенных последовательно каскадов усилителя на одиночных резонансных контурах. В пределе задержка во времени может быть бесконечно большой, но гауссов закон, поскольку нас интересует частотная зависимость, практически не отличается от формы характеристики нескольких каскадов с одиночными резонансными контурами с ограниченной задержкой во времени. Невозможно построить строго "гауссову" систему, но можно найти реальную систему, фильтрующее действие которой было бы почти равноценно ее действию, и фильтры, которые строятся при помощи последовательного соединения ряда резонансных контуров, будут иметь почти гауссову форму амплитудно-частотной характеристики".

К этому остается добавить, что исследования, проделанные С.И. Евтяновым^{13/}, устанавливают однозначное соответствие между усилителями на резонансных контурах и реостатными усилителями. Отсюда следует, что обычный реостатный усилитель, состоящий из нескольких последовательно соединенных каскадов, представляет довольно хорошее приближение к фильтру, оптимальному сигналу колокольной формы. Косвенным подтверждением этого может служить^{14/}, где показано, что даже один каскад реостатного усилителя дает вполне удовлетворительное приближение к оптимальному фильтру для одиночных сигналов прямоугольной формы, а именно: он

x/ Дж. Ван Флек и Д. Мидлтон. Теоретическое сравнение визуального, слухового и инструментального методов приема импульсных сигналов в присутствии шумов. Сборник переводных статей под редакцией А.Е. Башарина "Прием импульсный сигналов в присутствии шумов", ГЭИ, 1960 г., стр. 87.

реализует 84,5% отношения сигнал-шум по сравнению с оптимальным фильтром.

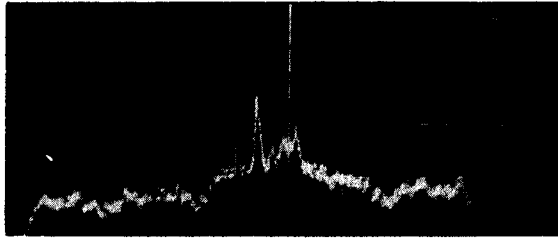
К сожалению, трудности математического характера не позволяют в простой форме провести аналогичные расчеты для сигнала колокольной формы.

В заключение автор выражает благодарность сотрудникам Лаборатории высоких энергий И.А. Голутвину, Е.В. Смирнову и А.М. Фролову за участие в обсуждении данного вопроса.

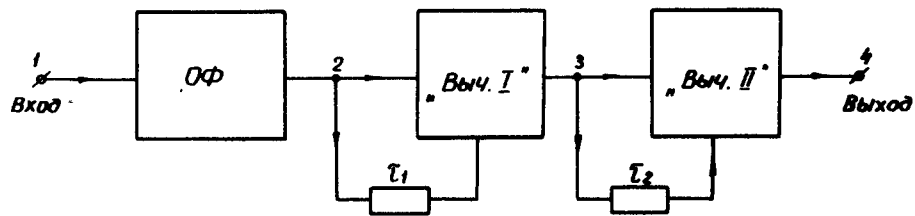
Л и т е р а т у р а

1. Л.А. Вайнштейн, В.Д. Зубаков. Выделение сигналов на фоне случайных помех. "Советское радио", 1960.
2. Л.С. Гуткин. Теория оптимальных методов радиоприема при флюктуационных помехах. ГЭИ, 1961.
3. В.А. Котельников. Теория потенциальной помехоустойчивости. ГЭИ, 1956.
4. Ю.С. Лезин. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. "Советское радио", 1963.
5. В.В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, 1960.
6. В.А. Петухов. Скоростной метод просмотра ядерных фотоэмульсий. ПТЭ, № 5, 1957.
7. Yu. A. Bychkov, Vi Chun Von, A. M. Frolov, E. Katz, V. A. Petukhov, O. N. Teislyak, V. Ya Volkov. A Method and Device for Automatic Scanning of Nuclear Emulsions, "Nuclear Instruments and Methods", v. 20, January, 1963.
8. И.М. Рыжик, И.С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. НТТИ, 1951.
9. И.С. Гоноровский. Радиосигналы и переходные явления в радиопеках, Связьиздат. 1957.
10. Б.Ф. Левин. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. "Советское радио", 1957.
11. Б.Н. Митяшев. Определение временного положения импульсов при наличии помех. "Советское радио", 1962.
12. Ц. Льюис, Ф. Уэлс. Миллимикросекундная импульсная техника. ИЛ, 1956.
13. С.И. Евтянов. Об эквивалентности усилителей высокой и низкой частоты. "Радиотехника", 1948, т. 3, № 4.

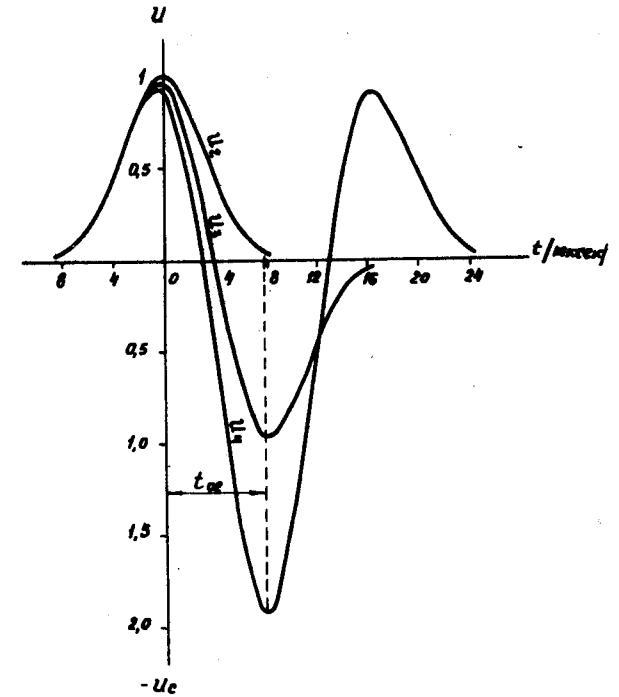
Рукопись поступила в издательский отдел
21 ноября 1963 г.



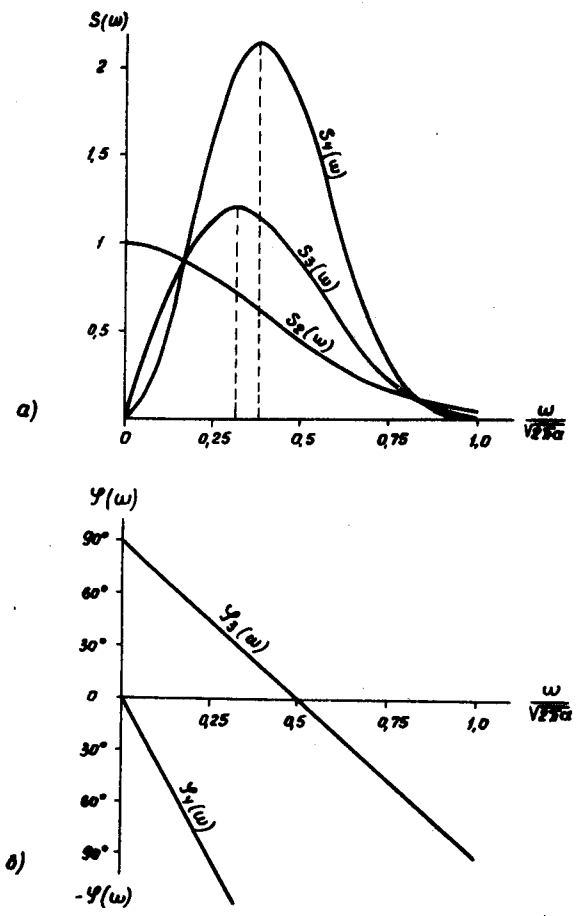
Р и с. 1. Сигнал близкой к колокольной формы на фоне шумов.



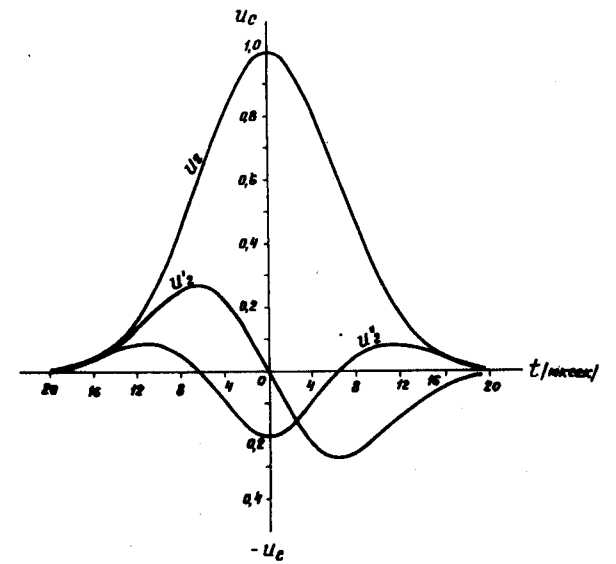
Р и с. 2. Блок-схема устройства, для оптимальной фильтрации и формирования сигналов колокольной формы.



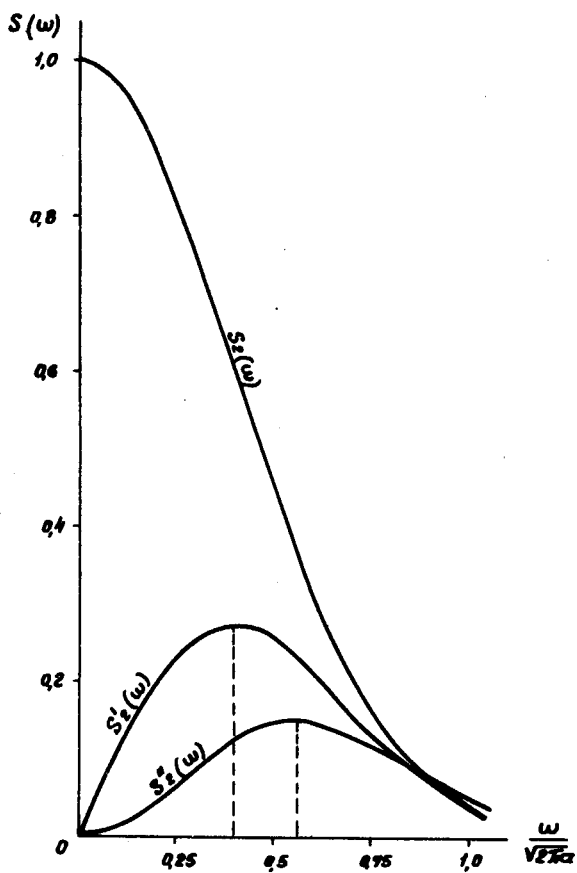
Р и с. 3. Форма сигналов при однократном и двукратном вычитании ($a = 0,1$).



Р и с. 4. Модуль /а/ и фаза /б/ спектральной плотности сигналов при вычитании.



Р и с. 5. Форма сигналов при дифференцировании.



Р и с. 6. Модули спектральной плотности сигналов при дифференцировании.