ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

И.Н. Иванов, В.И. Котов

1438

ИЗЛУЧЕНИЕ КОЛЬЦА С ТОКОМ В ВОЛНОВОДЕ

Дубна 1963

И.Н. Иванов, В.И. Котов

1438

ИЗЛУЧЕНИЕ КОЛЬЦА С ТОКОМ В ВОЛНОВОДЕ

Дубна 1963

1. Рассмотрение задачи об излучении токов и зарядов в волноводах, заполненных диэлектриком, представляет интерес с точки зрения генерации микрорадиоволн. В данной работе рассматривается излучение Вавилова-Черенкова кольцевого тока, летящего вдоль оси волновода, диэлектрические свойства которого меняются скачком на некотором радиусе a. Геометрия задачи и обозначения приведены на рис. 1. Частным случаем такой системы является волновод, частично заполненный диэлектриком, для которого Абель /1/ провел исследование излучения заряженного сгустка, летящего по оси волновода. В отличие от задачи Абеля, где заряд генерирует E -волны, кольцо с током в аналогичной системе будет генерировать H -волны.

2. В силу симметрии задачи единственной отличной от нуля компонентой является азимутальная компонента векторного потенциала. Для ее определения имеем следующие уравнения:

$$\square_\theta^{(1)} A^{(1)} = -\frac{4\pi}{c}\sigma\delta(r - r_0)\delta(z - vt),$$

$$\square_\theta^{(2)} A^{(2)} = 0$$

$$\square_\theta^{(k)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$H_r^{(k)} = \frac{\partial A^{(k)}}{\partial z} \quad H_z^{(k)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r A^{(k)} \quad E_\theta^{(k)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial t},$$

$$k = 1.2.$$

$A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ связаны граничными условиями,

$$H_z^{(1)} = H_z^{(2)}\Big|_{r=a}, \quad E_\theta^{(1)} = E^{(2)}\Big|_{r=a}, \quad E_\theta^{(2)} = 0\Big|_{r=b},$$

σ -полный ток, V-Z -компонента скорости кольца, c -скорость света в вакууме. Применяя в решении /1/ обычный аппарат разложения в интеграл Фурье, получим

$$A^{(k)} = \frac{2r_0\sigma}{cv}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{v}(vt-z)} a^{(k)}(\omega, r)\, d\omega,$$

где

$$a^{(1)} = \begin{cases} K_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 r\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 r_0\right) + S I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 r\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 r_0\right) & 0 < r < r_0 \\ K_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 r_0\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 r\right) + S I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 r\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 r\right) & r_0 < r < a; \end{cases}$$

$$a^{(2)} = MI_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 r\right)I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 r_0\right) + LI_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 r_0\right)K_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 r\right)\quad a<r<b,$$

K_1 и I_1 – модифицированные функции Бесселя,

$$\kappa_1^2 = 1-\epsilon_2\beta^2,\quad \kappa_2^2 = 1-\epsilon_2\beta^2,\quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Коэффициенты S, L, M, найденные из граничных условий в /1/, имеют вид:

$$S = \frac{\kappa_1 K_0\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 a\right)\phi_1 + \kappa_2 K_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 a\right)\phi_2}{\kappa_1 I_0\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 a\right)\phi_1 - \kappa_2 I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 a\right)\phi_2};$$

$$L = -\frac{vI_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 r_0\right)I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 b\right)}{|\omega| a I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 r_0\right)\left[\kappa_1 I_0\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 a\right)\phi_1 - \kappa_2 I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_1 a\right)\phi_2\right]}$$

$$M = -\frac{K_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 b\right)}{I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 b\right)}L; \qquad /2a/$$

$$\phi_1 = K_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 b\right)I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 a\right) - I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 b\right)K_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 a\right);$$

$$\phi_2 = K_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 b\right)I_0\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 a\right) + K_0\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 a\right)I_1\left(\frac{|\omega|}{v}\kappa_2 b\right).$$

3. Мощность потерь на излучение определим выражением:

$$P = 2\pi r_0 \sigma E_\theta\Big|_{\substack{r=r_0\\ vt=z}}, \qquad /3/$$

или

$$P = \frac{8\pi r_0^2\sigma^2}{c^2 v}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty i\omega\, d\omega\left[K_1\left(\frac{\omega}{v}\kappa_1 r_0\right) + SI_1\left(\frac{\omega}{v}\kappa_1 r_0\right)\right]I_1\left(\frac{\omega}{v}\kappa_1 r_0\right). \qquad /3a/$$

Возможны три случая:

а/ условия излучения выполняются только в 1 среде;

$$\kappa_1 = is_1,\quad \kappa_2^2 > 0$$

б/ условия излучения выполняются только во 2 среде: /4/

$$\kappa_1^2 > 0,\quad \kappa_2 = is_2;$$

в/ условия излучения выполняются в двух средах одновременно:

$$\kappa_1 = is_1\quad \kappa_2 = is_2.$$

Во всех этих случаях подынтегральное выражение в /3а/ чисто мнимая величина, и мы получаем отличную от нуля мощность излучения только на тех частотах, при которых знаменатель обращается в нуль. Это дает дискретный спектр излучения:

$$\kappa_1 I_0\left(\frac{\omega}{v}\kappa_1 a\right)\phi_1 - \kappa_2 I_1\left(\frac{\omega}{v}\kappa_1 a\right)\phi_2 = 0\,, \qquad /5/$$

и выполнено одно из условий /4/.

Прежде чем рассматривать каждый случай /4/ в отдельности, проанализируем некоторые частные варианты:

а/ Пусть $\kappa_1 = \kappa_2 = is$, т.е. мы имеем волновод, однородно заполненный диэлектриком. Дисперсионное уравнение /5/ в этом случае имеет решение

$\omega_\nu = \frac{v\lambda_{\nu 1}}{sb}$ $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ где $\lambda_{\nu 1}$ удовлетворяет $\mathcal{J}_1(\lambda_{\nu 1}) = 0\,.$ /6/

Интенсивность излучения в этом случае

$$p = \frac{8\pi^2 r_0^2 \sigma^2}{c^2 b} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\beta^2 - 1}} \cdot \frac{\mathcal{J}_1^2\left(\lambda_{\nu_1}\frac{r_0}{b}\right)}{\mathcal{J}_2^2(\lambda_{\nu_1})} \cdot \frac{1}{\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sqrt{\epsilon\beta^2-1}\,\omega b}{v}\right)\Big|_{\omega=\omega_\nu}}\,. \qquad /7/$$

б/ Рассмотрим начальную часть спектра:

$$\omega \ll \frac{v}{\kappa_{(k)} a} \qquad /8/$$

/здесь и в дальнейшем мы будем проводить рассмотрение только для волноводов, для которых κ_1 и κ_2 суть величины одного порядка/. Дисперсионное уравнение для этого случая имеет вид:

$$I_1\left(\frac{\omega}{v}\kappa_2 b\right) = 0\,. \qquad /9/$$

Из /9/ следует, что внутренний канал маленького радиуса не влияет на излучение.

Если во второй среде выполнено условие черенковского излучения, то последнее происходит на тех же частотах,что и в однородно заполненном диэлектриком волноводе радиуса b . Если же $\kappa_2^2 > 0$, то излучение с частотами /8/ будет отсутствовать. В той части спектра, где выполнено

$$\omega \gg \frac{v}{\kappa_k a}\,, \qquad /10/$$

можно воспользоваться асимптотикой функций Бесселя при больших аргументах. Для случая /4/ - а имеем дисперсионное уравнение

$$\frac{s_1}{\kappa_2}\,\mathrm{th}\,\frac{\omega_\nu \kappa_2}{v}(b-a) = -\,\mathrm{tg}\left(\frac{s_1\omega_\nu}{v}a - \frac{\pi}{4}\right), \qquad /11/$$

его решение при $b \gg a$:

$$\omega_\nu = \frac{v}{s_1 a}\left[(\nu + 1/4)\pi - \operatorname{arctg}\frac{s_1}{\kappa_2}\right], \qquad /11a/$$

$$\nu = 1.2.3....$$

При этом интенсивность излучения равна:

$$P = -\frac{8\pi^2 r_0 \sigma^2}{c^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_\nu s_1}{v} r_0 - \frac{\pi}{4}\right)}{s_1}\cdot\frac{1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega_\nu s_1}{v} a - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{s_1\omega_\nu}{v}a - \frac{\pi}{4}\right)\frac{d}{d\omega}\ln\frac{\kappa_2}{s_1}\Big|_{\omega=\omega_\nu} + \frac{s_1 a}{v}\left[1 - \frac{\kappa_2^2}{s_1^2}\cdot\frac{b-a}{a} + \frac{b}{a}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{s_1\omega_\nu}{v}a - \frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

При возможности излучения во второй среде дисперсионное уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{s_2\omega_\nu}{v}(b-a) = -\frac{s_2}{\kappa_1} \qquad /13/$$

имеет решение

$$\omega_\nu = \frac{v}{s_2(b-a)}\left[\nu\pi - \operatorname{arctg}\frac{s_2}{\kappa_1}\right], \qquad /13a/$$

$$\nu = 1, 2, 3, ...$$

и интенсивность излучения

$$P = -\frac{8\pi^2 r_0 \sigma^2}{c^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa_1}\ell^{-\frac{2\kappa_1\omega_\nu(a-r_0)}{v}}\frac{1}{\frac{d}{d\omega}\ln\frac{s_2}{\kappa_1}\Big|_{\omega=\omega_\nu} + \frac{s_2(b-a)}{v}\left(\frac{\kappa_1}{s_2} + \frac{s_2}{\kappa_1}\right)}. \qquad /14/$$

Обращает на себя внимание тот факт, что мощность экспоненциально спадает при увеличении $(a - r_0)$, т.е. излучение будет максимальным, когда $a \approx r_0$. Если среда 2 не обладает дисперсией, а среда 1 – вакуум, то ряд /14/ легко складывается и дает суммарную мощность излучения. И, наконец, при возможности излучения в двух средах одновременно /случай /4 – в// из дисперсионного уравнения

$$\frac{s_1}{s_2}\operatorname{tg}\frac{s_2\omega_\nu}{v}(b-a) = -\operatorname{tg}\left(\frac{s_2\omega_\nu}{v}a - \frac{\pi}{4}\right) \qquad /15/$$

получаем решение:

$$\omega_\nu = \frac{v}{a s_1 \alpha}\left[(\nu + 1/4)\pi + \frac{a}{b}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\frac{1 - \frac{s_1}{s_2}}{1 + \frac{s_1}{s_2}\frac{a}{b}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\cdot\left(1 + \frac{s_2^2}{s_1^2}\cdot\frac{b-a}{a}\right)}\right]; \qquad /15a/$$

$$\nu = 1, 2, 3 ...$$

здесь

$$\alpha = 1 + \frac{s}{s}\cdot\frac{b-a}{a},$$

и

$$P = -\frac{8\pi^2 r_0 \sigma^2}{c^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{s_1 \omega_\nu}{v} r_0 - \frac{\pi}{4}\right)}{s_1} \cdot \frac{1 + \mathrm{ctg}^2\left(\frac{s_1 \omega_\nu a}{v} - \frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\omega_\nu s_1 a}{v} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{d}{d\omega} \ln \frac{s_2}{s_1}\Big|_{\omega=\omega_\nu} + \frac{s_1 a}{v}\left[1 + \frac{s_2^2}{s_1^2} \cdot \frac{b-a}{a} + \frac{b}{a}\mathrm{ctg}^2\left(\frac{s_1 \omega_\nu a}{v} - \frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

Ограничение на порядок κ_1 и κ_2 в приведенных выше формулах не является принципиальным. Для κ_1 и κ_2 разных порядков легко проводится анализ подобным методом.

4. В заключение можно заметить, что если ток несет на себе еще и заряд, то такая система будет излучать еще и E – волны. Спектр этих волн не отличается от спектра излучения заряда, летящего по оси волновода с диэлектриком /см., например[2]/.

Интенсивность излучения, связанная с зарядом кольца, отличается от интенсивности одного заряда, летящего по оси волновода, на форм-фактор $J_0^2\left(\frac{\omega}{v} s_1 r_0\right)$ или $I_0^2\left(\frac{\omega}{v} \kappa_1 r_0\right)$ в числителе.

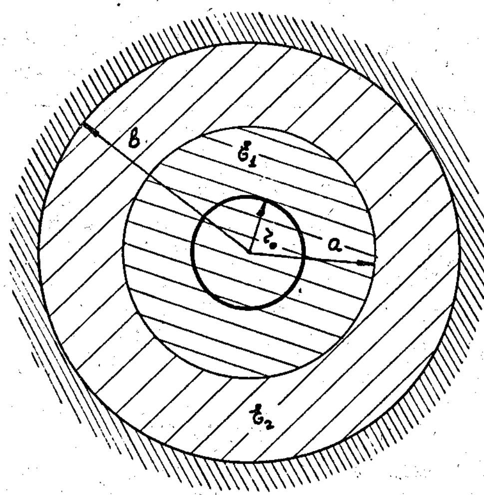
Авторы весьма признательны академику В.И. Векслеру за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

Литература

1. M. Abele. Nuovo Cimento Suppl. 9, 207 /1952/. Перевод в сборнике: "Миллиметровые и субмиллиметровые волны", М., ИЛ, 1959.

2. Б.М. Болотовский. УФН, 75, 295 /1961/.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 октября 1963 г.



Р и с. 1. Геометрия задачи и обозначения