ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

О.А. Колпаков, В.И. Котов

1366

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ПРОЛЕТАЮЩЕГО ЧЕРЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР

Дубна 1963

О.А. Колпаков, В.И. Котов

1366

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ПРОЛЕТАЮЩЕГО ЧЕРЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР

Направлено в ЖТФ

Дубна 1963

Вопросу об излучении при прохождении зарядов через различные структуры из проводящих тел посвящен ряд работ [1-5]. Такими структурами могут быть волноводы, полые и нагруженные резонаторы и другие проводящие тела произвольной формы.

Представляет интерес определение излучения, возникающего при пролете одиночного пучка заряженных частиц через резонатор. Это излучение зависит от величины, скорости и формы заряженного пучка и в некоторых случаях может оказаться столь значительным, что потери энергии при пролете через резонатор будут сравнимыми с энергией, приобретенной при ускорении в резонаторе, или даже с полной энергией пучка заряженных частиц. Поэтому правильная оценка излучения позволяет ответить на вопрос, возможно ли в данном случае производить ускорение пучка при помощи резонатора.

Мы располагаем решением задач, в той или иной степени приближающихся к поставленной. Например, в работах Днестровского и Костомарова [1,2,3] определено полное излучение при прохождении одиночного заряженного пучка через отверстие в бесконечном проводящем экране.

В работах [4,5] рассмотрено излучение заряженной частицы, пролетающей по оси волновода с перегородками. Такой волновод можно рассматривать как цепочку связанных резонаторов. При этом авторы ограничиваются расчетом излучения от основной волны. Если в полученных формулах коэффициент связи между резонаторами положить равным нулю, то, как показал Б.М.Болотовский [4], результат будет совпадать с излучением от основной волны в отдельном резонаторе.

При пролете пучка заряженных частиц через резонатор будут возбуждаться волны всех гармоник. В релятивистском случае вклад от высших гармоник может оказаться очень существенным.

Нами были произведены оценки излучения для отдельных волн и суммарного излучения при прохождении заряженного пучка через цилиндрический резонатор, имеющий входное и выходное отверстия.

Задача заключается в определении энергии электромагнитного поля, возникающего при пролете одиночного заряженного пучка через цилиндрический резонатор радиуса a и длины h. Пучок в отношении геометрической формы предполагается в виде заряженной "нити" длиной h_1; "ось" пучка и направление его движения совпадают с осью резонатора.

При решении естественно предполагается, что скорость движения пучка постоянна. Также предполагается, что резонатор можно считать электрически изолированным от внешнего пространства.

Отыскание наведенного поля сводится к решению неоднородного волнового уравнения. Решение ищется в виде произведения векторной функции, зависящей от координат, и функции от времени. Такой метод подробно рассмотрен в работе [6].

Собственное поле резонатора можно представить в виде суммы:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\lambda} \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) \cdot q(t, \omega_{\lambda}), \tag{1}$$

где ω_{λ} – собственные частоты резонатора, а $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$ – собственные функции векторного потенциала, являющегося решением уравнения

$$\Delta \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) - \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \vec{A}_{\lambda} = 0. \tag{2}$$

$\vec{A}_{\lambda}$ – ортогональные функции, нормированные по объему резонатора V_0 так, чтобы

$$\frac{1}{V_0} \int_{V_0} A_{\lambda}^2(\vec{r})\, dV = \frac{1}{\epsilon_0}, \tag{3}$$

где ϵ_0 – диэлектрическая постоянная вакуума. Нормировка и выбор коэффициентов при записи уравнений обусловлены применением системы *MKSA*. В дальнейшем мы будем употреблять только эту систему единиц.

Для нашей задачи удобно воспользоваться цилиндрической системой координат. Поскольку геометрическая форма пучка обладает аксиальной симметрией, то решение зависит только от координат r и z.

Собственные функции вектор-потенциала имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} A^{z}_{em} &= \frac{c\sqrt{2}}{\omega_{\lambda} a \sqrt{\epsilon_0 \pi h}} \left(\frac{\nu_e}{a}\right) \frac{J_0(\nu_e \frac{r}{a})}{J_1(\nu_e)} \cos\frac{m\pi}{h} z \\ A^{r}_{em} &= \frac{c\sqrt{2}}{\omega_{\lambda} a \sqrt{\epsilon_0 \pi h}} \left(\frac{m\pi}{h}\right) \frac{J_1(\nu_e \frac{r}{a})}{J_1(\nu_e)} \sin\frac{m\pi}{h} z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} m &= 1,2,\dots \\ e &= 1,2,\dots \end{aligned} \tag{4}$$

$$A^{z}_{e0} = \frac{c}{\omega_{\lambda} a \sqrt{\epsilon_0 \pi h}} \left(\frac{\nu_e}{a}\right) \frac{J_0(\nu_e \frac{r}{a})}{J_1(\nu_e)}, \qquad m = 0, \quad e = 1,2,\dots, \tag{4-1}$$

где ν_e – корень уравнения $J_0(\nu_e) = 0$,

$$\omega_{\lambda} = c\sqrt{\left(\frac{\nu_e}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}.$$

Функция времени $q(t,\omega_{\lambda})$ удовлетворяет уравнению

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_{em} + \omega_{\lambda}^2 q_{em} &= j_{em}(t) \\ j_{em}(t) &= \int_{V_0} \vec{A}_{em}(r) \cdot \vec{j}(\vec{r},t)\, dV \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где $\vec{j}(\vec{r},t)$ – вектор плотности тока.

Так как направление движения совпадает с осью z, то выражение для плотности тока имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} j(v,t) &= \frac{Q v}{2 h_1 \pi r} \delta(r), \quad \text{при} \quad vt - h_1 < z < vt \\ j(vt) &= 0, \quad \text{при} \quad z < vt - h_1,\ z > vt \\ Q &= e_0 N, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где v – скорость движения пучка, $e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ кулон – величина элементарного заряда, N – число частиц в пучке. Момент $t = 0$ соответствует появлению пучка в резонаторе.

Подставляя во второе равенство (5) выражения из (4) и (6), получим:

$$\left.\begin{aligned} j_{em} &= 0, & t < 0,\ t > \frac{h+h_1}{v} \\ j_{em} &= \frac{K_{em} Q v^2}{h_1 \omega_m} \sin \omega_m t, & 0 < t < \frac{h_1}{v} \\ j_{em} &= \frac{K_{em} Q v^2}{h_1 \omega_m} \cdot 2 \sin\omega_m t \cos\omega_m \left(t - \frac{h_1}{2v}\right), & \frac{h_1}{v} < t < \frac{h}{v} \\ j_{em} &= -\frac{K_{em} Q v^2}{h_1 \omega_m} \cdot \sin\omega_m \left(t - \frac{h_1}{v}\right), & \frac{h}{v} < t < \frac{h+h_1}{v} \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

где $\omega_m = \frac{m\pi}{h} z$, $K_{em} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 \pi h}} \frac{c}{\omega_{\lambda} a J_1(\nu_e)}$ и предполагается, что $h_1 \le h$.

Нетрудно написать аналогичные выражения и для случая $h_1 > h$. Компоненты поперечной части электрического и магнитного полей, определяющих излучение, имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{em} &= -\dot{q}_{em}(t) \cdot \vec{A}_{em}(r), \\ \vec{H}_{em} &= \frac{1}{\mu_0} q_{em}(t) \cdot \operatorname{rot} \vec{A}_{em}(\vec{r}), \end{aligned} \tag{8}$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Энергия излучаемого поля определяется формулой

$$U = \int_{V_0} \sum_{e,m} \tfrac{1}{2}\left[\epsilon_0 \vec{E}_{em}^2 + \mu_0 \vec{H}_{em}^2\right] dV. \tag{9}$$

Подставляя в (9) выражения для полей из (8) и принимая во внимание условие нормировки (3), получим:

$$U = \tfrac{1}{2} \sum_{e,m} \left(\dot{q}_{em}^2 + \omega_{\lambda}^2 q_{em}^2\right). \tag{10}$$

Решения уравнения (5) для q_{em} имеют вид:

$$q_{em} = a_{em} e^{i\omega_{\lambda} t} + b_{em} e^{-i\omega_{\lambda} t}, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{em} &= \frac{i}{2i\omega_{\lambda}} \int_0^t e^{-i\omega_{\lambda} t} \cdot j_{em}(t)\, dt \\ b_{em} &= \frac{i}{2\omega_{\lambda}} \int_0^t e^{i\omega_{\lambda} t} \cdot j_{em}(t)\, dt \end{aligned}\right\} \quad t < \frac{h+h_1}{v}, \tag{11-1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{em} &= \frac{1}{2i\omega_{\lambda}} \int_0^{\frac{h+h_1}{v}} e^{-i\omega_{\lambda} t} \cdot j_{em}(t)\, dt \\ b_{em} &= \frac{i}{2\omega_{\lambda}} \int_0^{\frac{h+h_1}{v}} e^{i\omega_{\lambda} t} \cdot j_{em}(t)\, dt \end{aligned}\right\} \quad t > \frac{h+h_1}{v}. \tag{11-2}$$

Подставляя в равенство (10) выражения для q_{em} и $\dot q_{em}$ из (11), получим :

$$U = \sum_{e,m} 2a_{em} \cdot b_{em}\, \omega_\lambda^2 . \qquad (12)$$

Подставляя в (11-2) выражения для плотности тока из (7), преобразуем коэффициенты a_{em} и b_{em} к виду:

$$a_{em} = \frac{K_{em} Q v^2}{2i h_1 \omega_m \omega_\lambda} \left(1 - e^{-i\omega_\lambda \frac{h_1}{v}}\right) \int_0^h e^{-i\omega_\lambda t} \sin\omega_m t\, dt ,$$
$$b_{em} = \frac{iK_{em} Q v^2}{2h_1 \omega_m \omega_\lambda} \left(1 - e^{i\omega_\lambda \frac{h_1}{v}}\right) \int_0^h e^{i\omega_\lambda t} \sin\omega_m t\, dt . \qquad (13)$$

Производя интегрирование по времени в (13), будем иметь:

$$a_{em} = \frac{K_{em} Q v^2}{2i h_1 \omega_\lambda} \frac{1}{\omega_\lambda^2 - \omega_m^2} \left(1 - e^{-i\omega_\lambda \frac{h_1}{v}}\right)\left[(-1)^m e^{-i\omega_\lambda \frac{h}{v}} - 1\right],$$

$$b_{em} = \frac{i K_{em} Q v^2}{2h_1 \omega_\lambda} \frac{1}{\omega_\lambda^2 - \omega_m^2} \left(1 - e^{i\omega_\lambda \frac{h}{v}}\right)\left[(-1)^m e^{i\omega_\lambda \frac{h}{v}} - 1\right] . \qquad (14)$$

Подставляя в (12) выражение для a_{em} и b_{em} из (14) и заменяя K_{em} его значением из (7), окончательно получим:

$$U = \sum_{e,m} \frac{4Q^2 v^4 c^2}{\epsilon_0 \pi h h_1^2 a^2 J_1^2(\nu_e)} \frac{1}{\omega_\lambda^2 (\omega_\lambda^2 - \omega_m^2)^2} \left(\frac{\nu_e}{a}\right)^2 \cdot 4\sin^2 \omega_\lambda \frac{h_1}{2v} \begin{cases} \sin^2 \omega_\lambda \frac{h}{2v}, & m - \text{четное} \\ \cos^2 \omega_\lambda \frac{h}{2v}, & m - \text{нечетное} \end{cases} \qquad (15)$$

Устремляя $h_1 \to 0$, в пределе будем иметь формулу для точечного заряда. Так как $\sin \omega_\lambda \frac{h_1}{2v} \underset{h_1 \to 0}{\to} \omega_\lambda \frac{h_1}{2V}$, то формула (15) в этом случае принимает вид:

$$U_{h_1=0} = \sum_{e,m} \frac{4Q^2 v^4 c^2}{(\epsilon_0 \pi h) a^2 J_1^2(\nu_e)} \frac{1}{[\omega_\lambda^2 - \omega_m^2]^2} \begin{cases} \sin^2 \omega_\lambda \frac{h}{2v}, & m - \text{чётное} \\ \cos^2 \omega_\lambda \frac{h}{2v}, & m - \text{нечетное} \end{cases} \qquad (16)$$

Пользуясь последней формулой и имея в виду равенство (4-1), напишем выражение для излученной энергии для основной волны ($m=0$, $e=1$):

$$U_{10} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_\lambda^2} \cdot \frac{8Q^2 v^2}{h a^2 J_1^2(\nu_e)} \sin^2 \frac{h\omega_\lambda}{2v} . \qquad (17)$$

Если выражение (17) умножить на множитель $\frac{v}{h}$ (число резонаторов, проходимых зарядом за единицу времени) и перейти в систему CGS , то полученный результат точно совпадает с выражением, найденным для цепочки связанных резонаторов, если коэффициент связи в последнем положить равным нулю/4,5/.

Формула (15) позволяет сравнить интенсивность от отдельных гармоник в зависимости от числа m , Так как

$$\frac{1}{\omega_\lambda^2 (\omega_\lambda^2 - \omega_m^2)^2} = \frac{1}{c^6 \left[\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\nu_e}{a}\right)^2\right]\left[\left(\frac{m\pi}{h\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\nu_e}{a}\right)^2\right]^2} ,$$

где
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} ,$$

то эта зависимость может быть выражена

$$U_{em} \sim \frac{1}{m^6} \qquad (18)$$

при постоянном значении других коэффициентов. Следовательно, определяя суммарное излучение только основных волн ($m = 0$) , мы оцениваем полное излучение в резонаторе.

Поскольку реальный резонатор имеет входное и выходное отверстия радиуса R_0, то по-видимому, излучаться будут только такие волны, которые возмущаются при пролете заряда через отверстие. Отсюда следует, что в сумме по e мы должны учесть члены для таких волн, длина которых больше радиуса отверстия. Положим, что самая короткая длина волны $\bar\lambda_{min}$, которую мы еще учитываем, равна $\bar\lambda_{min} = 2\pi R_0$; ввиду того, что

$$\omega_{\lambda m=0} = c\frac{\nu_e}{a} , \quad \bar\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_\lambda} \qquad \text{мы имеем}$$

$$\frac{\nu_{max}}{a} R_0 = 1 . \qquad (19)$$

Далее мы предполагаем, что рассматривается такой резонатор, что $a \gg h$ и $a \gg h_1$. Так как $\frac{\omega_\lambda h}{2v} = \frac{\nu_e}{a} \cdot \frac{h}{2\beta}$, $\frac{\omega_\lambda h_1}{2v} = \frac{\nu_e}{a} \cdot \frac{h_1}{2\beta}$ и случай релятивистский, $\sin \frac{\omega_\lambda h}{2v} \cong \frac{\omega_\lambda h}{2v}$ и $\sin \frac{\omega_\lambda h_1}{2v} \cong \frac{\omega_\lambda h_1}{2v}$, то, принимая во внимание эти соображения и используя формулу (15), будем иметь для отдельной гармоники основных волн:

$$U_{e0} = \frac{2h}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{a^2 J_1^2(\nu_e)} , \qquad (20)$$

и для всех основных волн:

$$U_0 = \sum_{e=1}^{e_{max}} \frac{2h}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{a^2 J_1^2(\nu_e)} . \qquad (21)$$

Так как $a \gg h$, то можно считать, что a достаточно велико, чтобы воспользоваться асимптотическим представлением

$$\frac{1}{J_1^2(\nu_e)} = \frac{\pi\nu_e}{2} , \quad \nu_{e+1} - \nu_e = \pi .$$

Вводя обозначения $\frac{\pi}{a} R_0 = d\xi$, $\frac{\nu_e}{a} R_0 = \xi$, перейдем от суммы к интегралу /согласно (19), пределы изменения ξ от 0 до 1/:

$$U_0 = \int_0^1 \frac{h}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R_0^2} \xi\, d\xi = \frac{h}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{2R_0^2} . \qquad (22)$$

Поскольку $R_0 \ll a$, то, сравнивая (22) с (20), легко обнаружить, что интегральное излучение всех основных волн - величина большего порядка, чем излучение одной основной волны.

В работе/2/ Днестровским и Костомаровым была получена формула, определяющая излучение при пролете заряда через отверстие в бесконечном экране при решении интегрального уравнения. Покажем, что такой же результат можно получить очень простым способом. Действительно, если в (16) $h \to \infty$, $a \to \infty$, мы получим формулу для излучения при прохождении точечного заряда через отверстие в экране.

Вводя обозначения

$$\frac{\nu_e}{a} R_0 = \xi \, , \quad \frac{\pi}{a} R_0 = d\xi \, , \quad \frac{m\pi R_0}{h} = y \, , \quad \frac{2\pi R_0}{h} = dy$$

и устремляя $a \to \infty$, $h \to \infty$, перейдем от суммы в (16) к интегралу:

$$U = \int_0^1 \left[\int_0^\infty \frac{4Q^2\beta^2}{4\pi^2\epsilon_0 R_0} \cdot \frac{\xi^3\gamma^4}{[(\gamma\xi)^2+y^2]^2} dy \right] d\xi \, . \tag{23}$$

Интегрируя (23) сначала по y в указанных пределах, а потом по ξ , придем к следующему выражению:

$$U = \frac{\beta^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2\gamma}{R_0} \, . \tag{24}$$

Нетрудно убедиться, что формула (24) совпадает с формулой, полученной в /2/.

В заключение авторы выражают благодарность Б.М.Болотовскому за ряд полезных соображений, высказанных при обсуждении затронутых в работе вопросов.

Литература

1. Ю.Н.Днестровский и Д.П.Костомаров. ДАН СССР, 116, 377 (1957).
2. Ю.Н.Днестровский и Д.П.Костомаров. ДАН СССР, 124, 1026 (1959).
3. Ю.Н.Днестровский и Д.П.Костомаров. "Радиотехника и электроника," 4, 303 (1959).
4. Б.М.Болотовский. УФН, 75, 295 (1961).
5. А.И.Ахиезер, Г.Я.Любарский, Я.Б.Файнберг. ЖТФ, 25, 2526 (1955).
6. В.М.Лопухин. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. Гостехиздат, 1953 .

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июля 1963 г.