ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

М.Л. Иовнович

1335

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДОВ И ДИПОЛЕЙ, УСКОРЯЕМЫХ В ВОЛНОВОДЕ

ЖТФ, 1964, т 34, в. 6, с 1073-1078.

Дубна 1963

М.Л. Иовнович

1335

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДОВ И ДИПОЛЕЙ, УСКОРЯЕМЫХ В ВОЛНОВОДЕ

Направлено в ЖТФ

Дубна 1963

Потери зарядом энергии на излучение в линейном ускорителе оценивались в /1/ на основе излучения заряда в неограниченном пространстве. В /2/ рассматривалось излучение, возникающее при столкновении двух заряженных сгустков, причем предполагалось, что столкновение происходит в неограниченном пространстве.

Оценим влияние металлических стенок на излучение заряда при ускорении в волноводе. Излучение заряда, вращающегося в волноводе, оценивалось в /3/. Ускорение заряда в ускорителе, а также при столкновении сгустков, происходит за ограниченное время t_0. В спектре излучения, возникающего при ускорении, представлены в основном частоты от нуля до максимальной частоты порядка t_0^{-1}. С другой стороны, частоты, меньшие критической частоты волновода $\frac{c}{a}$, где a –радиус волновода, в волноводе не распространяются. Излучение заряда уменьшается, если максимальная частота меньше критической, т.е. $t_0^{-1} \ll \frac{c}{a}$. Энергию, излучаемую в волноводе при ускоренном движении заряда, подсчитаем по методу вычисления силы реакции излучения /4/. Уравнения для потенциалов поля при условии $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ имеют вид:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho . \qquad /1/$$

Электромагнитное поле в волноводе разложим по ортогональной системе векторов /5/ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, где

$$\vec{a}_1 = [\vec{e}_z \times \vec{\nabla}\psi_{mn}], \quad \vec{a}_2 = \beta^2_{mn}\kappa_{mn}\vec{e}_z + ik\vec{\nabla}\kappa_{mn}, \quad \vec{a}_3 = \vec{\nabla}\kappa_{mn} + ik\kappa_{mn}\vec{e}_z, \qquad /2/$$

e_z – единичный вектор вдоль оси волновода /оси $0z$ /,

$$\Psi_{mn} = J_m(\alpha_{mn} r)\cos m\phi, \quad \kappa_{mn} = J_m(\beta_{mn} r)\sin m\phi \ (m > 0),$$

$$\kappa_{on} = J_o(\beta_{on} r),$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=a} = \kappa(\beta_{mn} a) = 0.$$

Условия ортогональности векторных функций

$$\int(\vec{a}_1^* \cdot \vec{\nabla}\phi)\,dv = \int(\vec{a}_2^* \cdot \vec{\nabla}\phi)\,dv = \int(\vec{a}_2^* \cdot \vec{a}_1)\,dS = \int(\vec{a}_1^* \cdot \vec{a}_2)\,dS = 0, \qquad /3/$$

$$\int(\vec{a}^*_{i,mnk} \cdot \vec{a}_{i,m'n'k'})e^{i(k-k')z}\,dv = 0 \quad (i = 1,2;\ m \neq m',\ n \neq n',\ k \neq k').$$

Потенциалы запишем в виде:

$$\vec{A} = \sum_{m,n,k} q_{1,mnk}(t)\,\vec{a}_{1,mnk}\,e^{ikz} + q_{2,mnk}(t)\,\vec{a}_{2,mnk}\,e^{ikz} + k.c., \qquad /4/$$

$$\phi = \sum_{m,n,k} q_{3,mnk}(t)\kappa_{mn}e^{ikz} + k.c. .$$

Подставляя /4/ в уравнение для вектор-потенциала /1/, умножая /1/ на $a_i^* e^{-ikz}$, интегрируя по объему и учитывая ортогональность векторных функций, получим уравнения для коэффициентов q_i:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \phi_i(t), \qquad /5/$$

где
$$\omega_1^2 = c^2(k^2 + \alpha_{mn}^2), \quad \omega_2^2 = c^2(k^2 + \beta_{mn}^2),$$

$$\phi_1 = \frac{c\int(\vec{J}\cdot\vec{a}_1^*)e^{-ikz}dv}{\alpha_{mn}^2\int\psi_{mn}^2 dS}, \qquad \phi_2 = \frac{c\int(\vec{J}\cdot\vec{a}_2^*)e^{-ikz}dv}{\beta_{mn}^2(k^2+\beta_{mn}^2)\int\kappa_{mn}^2 dS}. \qquad /6/$$

Решение /5/ при нулевых начальных условиях

$$q_1 = \frac{1}{\omega_1}\int_0^t \phi_1(t')\,Sin\,\omega_1(t-t')\,dt' \qquad /7/$$

определяет поле излучения /при подстановке /7/ в /4/ суммирование по k следует заменить интегрированием/. Электрическая напряженность поля излучения определяется

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \qquad /8/$$

Рассмотрим излучение точечного заряда, движущегося вдоль оси волновода со скоростью $u(t)$. Плотность тока заряда $\vec{J} = e_0 u(t)\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta[z - z(t)]\vec{e}_z$, где e_0 –величина заряда. Вычисляя коэффициенты q_i по /6/, /7/ и подставляя в выражение для продольной компоненты силы, действующей на заряд со стороны поля излучения,

$$f_z = e_0 E_z[0, 0, z(t)] = -\frac{e_0}{c}\sum_{n,k}\dot{q}_{2,n}\,\beta_{on}^2 e^{ikz(t)} + k.c., \qquad /9/$$

получим:

$$f_z = -\frac{2e_0^2}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\beta_{on}a)\,\beta_{on}^2\int_0^{\infty}\frac{dk}{k^2+\beta_{on}^2}\int_0^t u(t')\,Cos\,\omega_2(t-t')\,Cos\,k[z(t)-z(t')]\,dt'. \qquad /10/$$

Представим /10/ в виде:

$$f_z = -\frac{e_0^2}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\beta_{on}a)\,\beta_{on}^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k^2+\beta_{on}^2}\int_0^t u(t')\,Cos\{\omega_2(t-t')+k[z(t)-z(t')]\}\,dt'. \qquad /11/$$

Пользуясь соотношениями

$$Cos\{\omega_2(t-t')+k[z(t)-z(t')]\} = -\frac{1}{\omega_2(1+\alpha\beta')}\frac{\partial}{\partial t'}Sin\{\omega_2(t-t')+k[z(t)-z(t')]\}, \qquad /12/$$

$$Sin\{\omega_2(t-t')+k[z(t)-z(t')]\} = \frac{1}{\omega_2(1+\alpha\beta')}\frac{\partial}{\partial t'}Cos\{\omega_2(t-t')+k[z(t)-z(t')]\},$$

где $\alpha = \frac{kc}{\omega_2}$, $\beta' = \frac{u(t')}{c}$, проинтегрируем дважды по частям интеграл по времени в /11/. Опуская расходящийся член, связанный с электромагнитной массой, и несущественные члены, зависящие от начальных условий [4], получим силу реакции излучения в волноводе:

$$f_r = \frac{e_0^2}{\pi a^2 c}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\beta_{on}a)\,\beta_{on}^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{(k^2+\beta_{on}^2)^2}\int_0^t dt'\,Cos\{\omega_2(t-t')+k[z(t)-z(t')]\}\times \qquad /13/$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{1}{1+\alpha\beta'}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\beta'}{1+\alpha\beta'}\right),$$

или после дифференцирования:

$$f_r = \frac{e_0^2}{\pi a^2 c}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\beta_{on}a)\,\beta_{on}^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{(k^2+\beta_{on}^2)^2}\int_0^t dt'\,Cos\{\omega_2(t-t')+k[z(t)-z(t')]\}\times \qquad /14/$$
$$\times(1+\alpha\beta')^{-3}\left\{\frac{d^2\beta'}{dt'^2} - \frac{3\alpha\left[\frac{d\beta'}{dt'}\right]^2}{1+\alpha\beta'}\right\}.$$

Из /14/ можно получить известное выражение для силы реакции излучения при движении в неограниченном пространстве [6]. Устремляя радиус волновода к бесконечности и пользуясь переходом от дискретных значений поперечного волнового числа $k_t = k_0\,Sin\,\theta$

к непрерывным $\frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\beta_{on}a)\,\beta_{on}^2 \underset{a\to\infty}{\to} \int_0^{\infty}k_t^3\,dk_t$, а также равенством

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dk_0\,Cos\,ck_0\{t-t'+\frac{\alpha}{c}[z(t)-z(t')]\} = \frac{\delta(t'-t)}{c(1+\alpha\beta')},$$

получим

$$f_r = \frac{e_0^2}{2c^2}\left[J(\beta)\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{1}{4}\frac{dJ}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right], \qquad /15/$$

где

$$J = \int_{-1}^{1}\frac{(1-\alpha^2)\,d\alpha}{(1+\alpha\beta)^4} = \frac{4}{3}(1-\beta^2)^{-2}.$$

Сила реакции излучения при ускорении заряда в неограниченном пространстве

$$f_r = \frac{2e_0^2}{3c^2}(1-\beta^2)^{-1/2}\frac{d\gamma}{dt}, \qquad /16/$$

где γ определяется релятивистским уравнением движения заряда под действием внешней силы $(1-\beta^2)^{-3/2}\frac{d\beta}{dt} = \gamma$. Выражение для силы реакции излучения в волноводе /14/ с помощью замены переменных $\frac{k}{\sqrt{k^2+\beta_{on}^2}} = \alpha$ представим в виде:

$$f_r = \frac{e_0^2}{\pi a c}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\nu_n)\,\nu_n^{-1}\int_{-1}^{1}d\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\int_0^t Cos\frac{c\nu_n}{a\sqrt{1-\alpha^2}}\{t-t'+\frac{\alpha}{c}[z(t)-z(t')]\}\times \qquad /17/$$
$$\times(1+\alpha\beta')^{-3}(1-\beta'^2)^{3/2}\left\{\frac{d\gamma}{dt'} - 3\gamma^2\sqrt{1-\beta'^2}\frac{(\alpha+\beta')}{1+\alpha\beta'}\right\}dt'.$$

/ при выводе /17/ использовано уравнение движения заряда и равенство $\beta_{on} = \frac{\nu_n}{a}$, где ν_n – корни функции Бесселя $J_0(\nu_n) = 0$ /. Определим потери энергии заряда на излучение:

$$W = \int_0^{\infty}u\,f_r\,dt, \qquad /18/$$

если заряд ускоряется в волноводе постоянной во времени силой в течение времени t_0, $\gamma = \gamma_0$ при $0 < t < t_0$, $\gamma = 0$ при $t > t_0$. Потери энергии на излучение можно представить в виде:

$$W = \frac{e_0^2}{\pi a c}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\nu_n)\,\nu_n^{-1}\int_{-1}^{1}d\alpha\sqrt{1-\alpha^2}(A_1 - A_2), \qquad /19/$$

причём

$$A_1 = -\frac{\gamma_0}{\omega_2}\int_0^{t_0}Sin\,\omega_2[t+\frac{\alpha}{c}z(t)]\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{1+\alpha\beta}\right)dt$$

после интегрирования по частям с точностью до малых членов порядка $\left(\frac{a\gamma_0}{c}\right)^3$ приводится к виду:

$$A_1 = \frac{\gamma_0}{\omega_2^2}\left\{\frac{1}{1+\alpha\beta_0}\left(\frac{d}{dt}\frac{u}{1+\alpha\beta}\right)_{t=t_0}Cos\,\omega_2[t_0+\frac{\alpha}{c}z(t_0)] - \gamma_0 c\right\},$$

где $\beta_0 = \beta(t_0)$. При $\beta_0 \approx 1$ и $\frac{\gamma_0 a}{c} \ll 1$ можно пренебречь быстро осциллирующим членом $Cos\,\omega_2[t_0+\frac{\alpha}{c}z(t_0)]$ и

$$A_1 = -\frac{\gamma_0^2 c}{\omega_2^2}. \qquad /20/$$

Используя соотношения /12/ и интегрируя по частям интегралы по времени, можно получить с той же точностью по малому параметру $\frac{a\gamma_0}{c}$:

$$A_2 = -\frac{3\gamma_0^2 c}{\omega_2^2}\int_0^{t_0}\frac{d\beta}{dt}(1+\alpha\beta)^{-7}(1-\beta^2)^2(\alpha+\beta)\,dt. \qquad /21/$$

Подставим /20/, /21/ в /19/ и проинтегрируем по a, используя значение интегралов

$$\int_{-1}^{1}(1-a^2)^{3/2}da = \frac{3\pi}{8}, \quad \int_{-1}^{1}\frac{(1-a^2)^{3/2}(a+\beta)}{(1+a\beta)^7}da = -\frac{\pi\beta}{16}(1-\beta^2)^{-\frac{7}{2}}. \qquad /22/$$

Пользуясь уравнением движения заряда, проинтегрируем полученное выражение по времени. Учитывая, что $\int_0^{t_0} u\,dt = \frac{c}{\gamma_0}\{(1-\beta_0^2)^{-1/2}-1\}$, получим потери заряда на излучение в волноводе

$$W = -\frac{3e_0^2\, a\gamma_0^2}{16c^2}\{1+(1-\beta_0^2)^{-1/2}\}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\nu_n)\nu_n^{-3} \qquad /23/$$

/бесконечная сумма в /23/ сходится к конечному пределу/. Выражение /23/ получено для достаточно малых внешних сил, ускоряющих заряд. Условие $\frac{a\gamma_0}{c} \ll 1$ приводит к тому, что величина внешней силы не должна превышать $\frac{m_0c^2}{a}$, где m_0 – масса заряда. Сравним потери заряда на излучение в волноводе и в неограниченном пространстве. Последние равны /1/ $\frac{2e_0^2\gamma_0\beta_0}{3c\sqrt{1-\beta_0^2}}$. В ультрарелятивистском случае найдем, что потери в волноводе уменьшаются по сравнению с потерями в неограниченном пространстве в $\frac{c}{a\gamma_0}$ раз. Найдем силу реакции излучения, действующую на ускоряемый вдоль оси волновода точечный магнитный диполь, направленный вдоль той же оси. Плотность тока, созданного диполем величины m_0, $\vec{J} = cm_0\vec{\nabla}\times\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta[z-z(t)]\vec{e}_z$. Вычисляя указанным методом продольную компоненту силы, действующую на диполь со стороны собственного поля излучения, $f_z = m_0\frac{\partial H_z}{\partial z}\Big|_{x=y=0,\ z=z(t)}$, получим:

$$f_z = \frac{m_0^2c^2}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}J_0^{-2}(\nu_n')a_{on}^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\,dk}{\omega_1}\int_0^t dt'\operatorname{Cos}\{\omega_1(t-t')+k[z(t)-z(t')]\}, \qquad /24/$$

где $\nu_n' = a_{on}a$. Интегрируя с помощью соотношений /12/ повторно по частям интеграл по времени и опуская расходящиеся члены, получим силу реакции излучения в виде:

$$f_r = -\frac{m_0^2}{\pi ac^3}\sum_{n=1}^{\infty}J_0^{-2}(\nu_n')\nu_n'^{-1}\int_{-1}^{1}da\,a^2\sqrt{1-a^2}\int_0^t dt'\operatorname{Cos}\frac{c\nu_n'}{a\sqrt{1-a^2}}\{t-t'+\frac{a}{c}[z(t)-z(t')]\}\times \qquad /25/$$

$$\times(1+a\beta')^{-5}\{\frac{d^4\beta'}{dt'^4}-\frac{5a}{1+a\beta'}[3\frac{d\beta'}{dt'}\cdot\frac{d^3\beta'}{dt'^3}+2(\frac{d^2\beta'}{dt'^2})^2]+$$

$$+\frac{105a^2}{(1+a\beta')^2}(\frac{d\beta'}{dt'})^2\frac{d^2\beta'}{dt'^2}-\frac{105a^3}{(1+a\beta')^3}(\frac{d\beta'}{dt'})^4\}.$$

Для определения силы реакции излучения, действующей на ускоряемый вдоль оси волновода точечный электрический дипольный момент p_0, направленный вдоль той же оси, воспользуемся выражением плотности тока диполя $\vec{J} = p_0\frac{\delta(r)}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\delta[z-z(t)]\vec{e}_z$ и продольной компоненты силы, действующей на диполь со стороны поля излучения, $f_z = p_0\frac{\partial E_z}{\partial z}\Big|_{x=y=0,\ z=z(t)}$.

Пользуясь указанными методами, получим выражение для силы реакции излучения при нерелятивистском движении в волноводе:

$$f_r = -\frac{2p_0^2}{\pi ac^4}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\nu_n)\nu_n^{-1}\int_0^1 a^2\sqrt{1-a^2}\,da\int_0^t dt'\frac{d^4u}{dt'^4}\operatorname{Cos}\frac{c\nu_n}{a\sqrt{1-a^2}}(t-t'). \qquad /26/$$

С помощью нерелятивистских пределов выражений для сил реакции излучения заряда и магнитного диполя в волноводе вычислим потери энергии на излучение при колебательном

движении заряда /диполя/ по оси волновода. Колебания происходят по закону $u = u_0\cos\omega t$ где u_0 – амплитуда скорости. Потери энергии за период колебаний

$$W = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} uf_r\,dt \qquad /27/$$

определяются следующими выражениями, если частота колебаний много меньше критической частоты волновода $(\omega \ll \frac{c}{a})$. Потери энергии заряда за период равны $\frac{3e_0^2u_0^2\omega^2a}{8c^4}\sum_{n=1}^{\infty}J_1^{-2}(\nu_n)\nu_n^{-3}$, магнитного диполя – $\frac{m_0^2u_0^2\omega^4a}{16c^6}\sum_{n=1}^{\infty}J_0^{-2}(\nu_n')\nu_n'^{-3}$.

Сравнивая эти выражения с потерями энергии в неограниченном пространстве, которые для заряда равны $\frac{2\pi}{3c^3}e_0^2u_0^2\omega$, получим, что потери энергии на излучение зарядом в волноводе малого радиуса меньше потерь в неограниченном пространстве в $\frac{c}{\omega a}$ раз.

Автор выражает благодарность В.И. Векслеру за постановку задачи.

Литература

1. J. Schwinger. Phys. Rev., 75, 1912 (1949).
2. В.И.Векслер, В.Н. Цытович. Proc. of Intern. Conf. CERN 1959, 160 (1959).
3. М.Л. Левин. ЖТФ, 17, 1159 /1947/.
4. В.Л. Гинзбург, В.Я. Эйдман. ЖЭТФ, 36, 1823 /1959/.
5. Ф.М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т.2, ИЛ., 1960.
6. А. Зоммерфельд. Электродинамика. ИЛ, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июня 1963 г.