ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.Г. Заставенко

1330

ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
профессор Ф.Д. Гахов

Дубна 1963

Л.Г. Заставенко

1964

ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель - профессор Ф.Д. Гахов

Дубна 1963

Известно, что если

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt\,, \qquad /1/$$

то при $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt}\, dp\,. \qquad /2/$$

В настоящей работе рассматривается обобщение преобразования /1/

$$F(p) = \int_0^\infty \psi(pt) f(t)dt, \qquad /3/$$

где ядро $\psi(z)$ принадлежит классу $e_{\alpha\beta}$, определенному в § 2; про этот класс можно сказать, что его функции /в некотором отношении/ "похожи" на e^{-z}; в качестве примера функций этого класса можно привести z^{-z} $1/\Gamma(1+z)$ и т.д.

Результатом работы являются теоремы об обращении преобразования /3/, излагаемые в § 6. Рассмотренное нами обращение осуществляется посредством функции

$$\tilde{\psi}(z) = \sum_{n=n_{min}}^{\infty} z^n / \gamma(1+n)\,; \qquad /4/$$

здесь

$$\gamma(z) = \int_0^\infty \psi(t)\, t^{z-1}\, dt\,, \qquad /5/$$

которую мы называем взаимной к ядру $\psi(z)$.

В простейшем случае /§ 5, пункт 1/,[x/] когда $f(t)$ регулярна в некотором угле $|\arg t| < \delta$, обращение пребразования /3/ имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \tilde{\psi}(pt) F(p)\, dp\,. \qquad /6/$$

Здесь контур L состоит из лучей $\arg(p-a) = \pm(\frac{\pi}{2} + \delta_1)$, $0 < \delta_1 < \delta$, и число a таково, что справа от контура L $F(p)$ регулярна.

[x/] См. текст диссертации. К нему же относятся все многозначные сноски в автореферате, например, "теорема 6.3", "формула /4.5.1/".

В случае, когда $f(t)$ – не аналитическая функция, обращение преобразования /3/ дается двойным предельным переходом:

$$f(t) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \Big\{ \int_{\sigma}^{\sigma+i\infty} \tilde{\psi}(pe^{i\epsilon} t) F(pe^{-i\epsilon}) dp + \qquad /7/$$

$$+ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma} \tilde{\psi}(pe^{-i\epsilon} t) F(pe^{i\epsilon}) dp \Big\}$$

/см. теорему 6.2/.

Необходимо отметить, что наша теорема 6.2 об обращении преобразования /3/ слабее соответствующей теоремы для преобразования Лапласа, по крайней мере, в том, что формула /7/ содержит двойной предельный переход.

Этот недостаток связан со слабостью наложенных нами на ядро ограничений и может быть устранен усилением этих ограничений; мы приведем в этой связи /без доказательства/ следующую установленную нами, но не включенную в основной текст теорему:

пусть 1/ $\psi(t)$ принадлежит некоторому классу $e_{\alpha\beta}$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\beta > 0$, и есть числа A, B, C, D, $\frac{\pi}{2} < C < \alpha$, такие, что $0 < A < |\psi(t)||e^{t}| < B$ при $\arg t = c$, $|t| \geq D$;

2/ есть число λ, такое, что функция $\gamma(z)$ /см./5// регулярна при $\mathrm{Re}\, z > \lambda + 1$ /это определение числа λ, но не условие на $\psi(t)$ – см. следствие 4.5.1/;

3/ при $t > 0$ дана непрерывная вместе с n, своей производной, функция $f(t)$, такая, что $\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^{k} f(t)\right| < Me^{at}$ при $t > 0$, $k = 0, 1, 2 \ldots n$; здесь $n = \mathrm{Max}\{1, [\lambda] + 1\}$;

4/ $F(p) = \int_0^\infty \psi(pt) f(t) dt$ при $\mathrm{Re}\, p > a$.

Тогда $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{\psi}(pt) F(p) dp = f(t)$

при $t > 0$; здесь $\sigma > a$. /Основная тяжесть доказательства этой теоремы заключается в доказательстве /абсолютной/ сходимости интеграла $\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \psi(pt) F(p) dp$; после того, как эта сходимость установлена, остается лишь воспользоваться тем, что этот интеграл как раз и есть предел последовательности интегралов, рассматриваемой в теореме 6.2/.

Отметим, что формулы комплексного обращения, рассмотренные в книге Хиршмана и Уиддера[1] /см. ниже/, также содержат двойной предельный переход, подобный /7/.

Дадим схему нашего доказательства основной теоремы 6.2 на примере преобразования /1/. В этом случае $\psi(z) = e^{-z}$, $\tilde{\psi}(z) = e^{+z}$; обозначим

$$\int \tilde{\psi}(pte^{\pm i\epsilon}) \psi(pre^{\mp i\epsilon}) dp = \frac{\exp[\sigma t e^{\pm i\epsilon} - \sigma r e^{\mp i\epsilon}]}{-te^{\pm i\epsilon} + re^{\mp i\epsilon}} = \qquad /8/$$

$$= \Phi_{\pm}(\epsilon, \sigma, t, r).$$

Подставив это в правую часть /7/, получаем для нее:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty f(r) dr [\Phi_{+}(\epsilon, \sigma, t, r) - \Phi_{-}(\epsilon, \sigma, t, r)].$$

Легко показать, что это выражение стремится к $f(t)$ при $\epsilon \to 0^{+}$, если $t > 0$ и $f(r)$ непрерывна при $r = t$. Таким образом, наша основная теорема доказывается очень просто.

Большой объем работы объясняется тем, что функции $\psi(z)$ нашего класса, будучи в основном похожи на e, не обладают ее простыми свойствами, так что, например, вместо $|e^{az}||e^{bz}| = |e^{(a+b)z}|$, нам придется пользоваться громоздкими оценками леммы 3.8; вместо соотношения $\psi(z)\tilde{\psi}(z) = 1$, верного при $\psi(z) = e^{-z}$, нам приходится пользоваться формулой /5.2/, доказывать обобщение формулы Стирлинга /4.2/ и т.д.

Перечислим содержание отдельных параграфов.

§ 2. Дается определение класса ядер, для которого мы в дальнейшем рассматриваем обращение преобразования /3/; иначе – даны условия, достаточные для того, чтобы $\psi(z)$ обладала асимптотическими свойствами, при которых мы можем обосновать избранную нами процедуру обращения /3/, т.е. чтобы для $\psi(z)$ имела место теорема 3.6.

Не могут ли условия § 2, пункта 1 быть ослаблены так, чтобы теорема 3.6 все же имела место? Легко показать, что если угол в условии 2.1.3/ заменить на меньший: $\frac{\pi}{2} + \delta_1 \leq |\arg t| \leq a - \delta$, где угол δ –любой более 0, а угол δ_1 –некий фиксированный угол $|\delta_1 > 0|$, то теорема 3.6 нарушается. Точно так же она нарушается, если в условии 2.1.2/ угол $|\arg t| < \delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ заменить на меньший $0 < \delta \leqq \delta_1 < \frac{\pi}{2}$.

Необходимость ограничения типа 2.1.4/ на $|\psi(z)|$ сверху вытекает из следующего. Рассмотрим целую функцию

$$\psi_1(z) = \int_0^\infty e^{+sz} ds / \Gamma(1+s).$$

Легко показать, что

$$z\psi_1(z) \to 1 \quad \text{при} \quad |z| \to \infty \qquad /9/$$

равномерно в любом угле $|\arg(z)| \leqq \delta < \pi$ и что $\psi_1(z)$ стремится к плюс бесконечности при $z \to -\infty$ сильнее любой функции $\exp[z^n]$. Пусть $\psi(z) \subset e_{\alpha\beta}$. Тогда функция $\underset{\approx}{\psi}(z) = \psi(z) \exp \psi_1(iz)$ удовлетворяет условиям 2.1.1/, 2.1.2/, 2.1.3/; однако теорема 3.6 для нее не выполняется. Заметим также, что функция $\underset{\approx}{\psi}(z) = \psi(z) \exp \psi_1(e^{i\alpha'} z)$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha' < \alpha$, не удовлетворяет условию 2.1.3/, ибо гармоническая функция $\mathrm{Re}\, \psi_1(e^{i\alpha'} z)$ на луче $\arg z = -\alpha'$ принимает очень большие положительные значения и поэтому по известному свойству гармонических функций / и с учетом /9// вблизи от этого луча принимает очень большие отрицательные значения.

Таким образом, надо ожидать, что теорема 3.6 остается в силе, если оставить условия 2.1.1/, 2.1.2/, 2,1,3/ без изменений, а условие 2.1.4/ заменить на более слабое: есть положительные δ_1 и q, такие, что $\psi(z) = O[\exp|z|^q]$ при $|z| \to \infty$ равномерно в углах $|\arg z| - \frac{\pi}{2}| < \delta_1$. Доказать это утверждение нам не удалось.

Переходим к параграфу 3. Как ясно уже из предыдущего, основная в нем теорема 3.6 об асимптотических свойствах функций класса e_a ; ее доказательство занимает п.п. 32-6. Теоремы 3.7 и 3.8 весьма просто вытекают из теоремы 3.6. Оценки, содержащиеся в следствии 3.7 и весьма неизящном следствии 3.8, необходимы для дальнейшего.

В § 4 основная – теорема 4.2 об асимптотике функции $\gamma(z)$, см. /5/; ее доказательство занимает п.п. 4.2.5.

Пункты 4.6 и 4.7 не имеют отношения к основной линии работы, поэтому изложены весьма сжато; они нужны нам, чтобы указать подкласс ядер из класса, рассмотренного в книге[1], для которого применим наш метод обращения.

В пунктах 1 и 2 § 5 мы исследуем асимптотические свойства функции $\tilde{\psi}(z)$ /см. /4//. Лемма 5.4 содержит доказательство формулы, аналогичной формуле /8/; на этой формуле в дальнейшем основано доказательство нашей основной теоремы 6.2. Попутно отметим не включенную в текст формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \tilde{\psi}(x)\,x^{-z}\,dx = 1/\gamma(z) \quad \text{при} \quad Re\,z > 1+\lambda \; ; \quad \text{здесь}$$

L – контур, начинающийся и кончающийся в $-\infty$ и обходящий вокруг точки $x = 0$ против часовой стрелки. Формула эта аналогична интегральному представлению Ганкеля для $1/\Gamma(z)$ и легко доказывается по теореме Карлсона /см.,[4] стр. 213/.

О содержании § 6 уже говорилось выше. Далее мы остановимся на отношении нашей работы к другим работам. Для ядер

$$\psi_\nu(t) = \sqrt{t}\;K_\nu(t) \qquad \text{и} \qquad \psi_{km}(t) = e^{-\frac{t}{2}}\,t^{-k}\,W_{km}(t)$$

/здесь $K_\nu(t)$ –экспоненциально убывающее решение уравнения Бесселя с мнимым аргументом, а $W_{km}(t)$ – функция Уиттекера/ теоремы комплексного обращения преобразования /3/ были найдены Мейером[3]. Они могут быть получены, хотя и при более тяжелых ограничениях на гладкость преобразуемой функции $f(x)$, и по нашему способу: для $\psi_{km}(t)$ взаимная/ по нашей терминологии/ функция, использованная Мейером, совпадает с функцией $\tilde{\psi}_\nu(x)$

/формула /5.1.3// при определенном выборе $V\nu$; в случае $\psi(t) = \sqrt{t}\,K_\nu(t)$ формула обращения, использованная Мейером, связана с нашей наподобие того, как формула

$$f(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{6-i\infty}^{6+i\infty} sh\,pt\,F(p)\,dp$$

обращения преобразования Лапласа связана с обычной

$$\left(\int_{6-i\infty}^{6+i\infty} e^{-pt}\,F(p)\,dp = 0!\right).$$

В книге Хиршмана и Уиддера[1] рассмотрен класс ядер, который характеризуется тем общим свойством, что если $F(p) = \int_0^\infty \psi(pt)\,f(t)\,dt$ и ядро $\psi(Z)$ принадлежит этому классу, то функция $F(p)$ имеет при $p > 0$ нулей не больше, чем их имеет функция $f(t)$ при $t > 0$. Каждое ядро этого класса может быть представлено в виде

$$\psi(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\gamma(u)\,du\;Z^{-u}, \qquad /10/$$

где

$$\frac{1}{\gamma(1-s)} = e^{-cs^2+bs}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_k}\right)e^{\frac{s}{a_k}}, \qquad /11/$$

$\sum \frac{1}{a_k^2} < \infty$, числа a, b, c вещественны, $\psi(t)$ и $\gamma(Z)$ связаны формулой /5/. Нами показано /п.п. 4.6-7/, что, если $c = 0$, все числа a_k более $+1$ и $a_k \to 1$ при $k \to \infty$, то функция $\psi(z)$, определенная /10/ и /11/, принадлежит к любому классу $e_{\alpha\beta}$ с $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

С другой стороны, ясно, что функция $\gamma(z)$, определенная /11/, вообще говоря, не обладает асимптотическими свойствами, утверждаемыми теоремой 4.2. Таким образом, классы ядер, рассмотренные в[1] и в нашей работе, пересекаются, но не совпадают. Относительно методов, применяемых нами и в[1], следует определенно сказать, что наш метод несравненно беднее и слабее, чем используемые в[1]; это различие имеет непосредственное отношения к силе полученных результатов: результаты, излагаемые в[1], по силе соответствуют, например, наиболее точной форме теории преобразования Лапласа; наши же – слабее, чем излагаемая обычно в учебниках элементарная форма этой теории. К этому надо добавить, что, по нашему мнению, полученный нами результат не может быть существенно усилен без наложения дальнейших ограничений на класс ядер. Относительно результатов, полученных нами и излагаемых в [1], следует сказать, что они не пересекаются: теория комплексного обращения, весьма похожая на нашу, развита в [1] для подкласса, который не имеет общих точек с рассмотренным нами классом ядер; для подкласса же, по которому классы ядер наш и из [1] пересекаются, в [1] не дано формулы комплексного обращения. В этом смысле наша работа дополняет [1] x/.

Наконец, мы дадим краткий комментарий к приложению, где излагается задача из области расходящихся рядов, приведшая к нашей работе, и еще одна задача из той же области, смежная с этой. При ознакомлении с доказательством теоремы М.Л. Картрайт /неполная теорема включения для абелевых средних/ напрашивается мысль, что теорема такого типа может быть установлена и для других методов суммирования, получаемых из / A, q / заменой e^{-z} на близкие к ней функции. Из попытки такого обобщения теоремы Картрайт и возникла наша работа; само обобщение дано в приложении 1; оно имеет место для некоторого подкласса из рассмотренного нами класса ядер.

Другое красивое свойство функций этого подкласса при использовании их как суммирующих функций дано в приложениях 2 и 3. Приложение 2 содержит обобщение результата приложения 1. Теорема 1 приложения 3 дает самостоятельный, не связанный с основной работой, результат: показано, как по виду функции $\phi(x, a)$

$$(\phi(x,a) \to 1 \quad \text{при} \quad a \to 0+)$$

определить область переменного z, в которой /ср. [10], гл. 8 §§ 2-3/.

$$\sum_0^\infty \phi(n,a) z^n \to 1/(1-z) \quad \text{при} \quad a \to 0+ .$$

Теорема 2 приложения 3 на основании теоремы 1 устанавливает обычным образом по расположению особых точек функции $f(z)$ [$f(z) = \sum a_n z^n$

при $|z| < R$] область, в которой

$$\sum a_n z^n \phi(n, a) \to f(z) \quad \text{при} \quad a \to 0+ .$$

Основная в приложении 3 - теорема 3, в которой с помощью теоремы из приложения 2 показано, что если $\psi(z)$ принадлежит к классу, определенному в теореме 3 приложения 1, то

$$\lim_{a \to 0+} \sum a_n z^n \psi(an)$$

не существует ни в одной точке вне звезды, указанной в теореме 2 приложения 3. Теорема типа теоремы 3 известна, например, для метода Бореля В'.

Диссертация опубликована [6] в несколько сокращенном виде. Полный текст ее издан препринтом [7].

---

x/ Наш способ комплексного обращения, несколько измененный, применим и в случае:

$$\lim_{k \to \infty} (a / k) \to \Omega > 0.$$

Литература

1. И.И. Хиршман, Р.В. Уиддер. Преобразования типа свертки, ИЛ., 1958.
2. Р. Кук. Бесконечные матрицы и ряды. ИЛ., 1960.
3. C.S.Meiyer. Amsterdam Acad. Wet. Proc. 43, 599 (1940) and 44, 727 (1941).
4. Е. Титчмарш. Теория функций. Гостехиздат, 1951.
5. Г. Харди. Расходящиеся ряды. ИЛ., 1951.
6. Л.Г. Заставенко. Известия Академии Наук СССР, серия мат., 26, 687 /1962/.
7. Л.Г. Заставенко. Препринт ОИЯИ Р-717, Дубна, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июля 1963 г.