

**сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна**

13-85-968

П.Г.Акишин, С.Г.Баша, П.Н.Боголюбов,  
Е.П.Жидков, М.В.Ляблин, Е.П.Каданцева,  
А.Ф.Писарев, С.А.Писарева, В.В.Ужинский,  
Д.Е.Шабалин\*, А.Г.Щербаков

**ДВУХВОЛНОВОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД  
ПРИЕМА ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ**

---

\* Московский инженерно-физический институт

**1985**

В данной работе рассматривается метод приема гравитационной волны путем резонансного преобразования в электромагнитную волну на периодически структурном - гофрированном волноводе. Этот метод широко используется в технике просветления оптических систем, а также в квантовой интегральной оптике для создания усилителей и лазеров с распределенной обратной оптической связью<sup>/1-4/</sup>. Сущность способа состоит в том, что при пропускании световой волны вдоль периодически неоднородного диэлектрического волновода в нем возникает новая волна, рассеянная на периодической структуре как на дифракционной решетке. Вторичная волна имеет ту же частоту, что и падающая, однако мода ее может быть иной. Перекачка энергии падающей волны в волну рассеянную носит интенсивный резонансно-кумулятивный характер, который обеспечивается автофазировкой волн на оптических неоднородностях - гофрах, регулярно распределенных в объеме волновода. В этом процессе первичная и вторичная волна сильно связаны между собой, и на экстремально малой длине взаимодействия происходит полная перекачка энергии от одной волны к другой. Такое преобразование волн часто называют брэгговским. К этой категории явлений относится также хорошо известный процесс прохождения или отражения волн слоистой системой диэлектрических пленок в просветленной оптике, представляющий собой резонансное переизлучение и интерференцию волн. Обсуждаемый интенсивный физический механизм трансформации волн применительно к рассматриваемой задаче приводит к тому, что гравитационная волна, взаимодействуя с регулярными неоднородностями пьезоэлектрического волновода, эффективно индуцирует электромагнитную волну измеримого уровня.

Проанализируем теперь конкретно вариант такого метода приема гравитационной волны. Пусть периодически распределенный волновод представляет набор идентичных стопок из пьезоэлектрических пластин, не контактирующих друг с другом. Стопки расположены на равных расстояниях одна от другой так, как показано на рис.1. Колебание пластинки, центр которой находится в точке с координатами  $x_m, z_n$ , под действием гравитационной волны с поляризацией

$$h_{xx} = -h_{yy} = \frac{1}{2} h e^{i(\omega t - kz)} + \text{к.с.} \quad //$$

описывается смещением<sup>/5/</sup>

$$u_{x, mn} = \frac{1}{4} h [(x - x_m) - \frac{\sin \alpha (x - x_m)}{\alpha \cos \frac{\alpha}{2}}] e^{i(\omega t - kz_n)} + \text{к.с.},$$

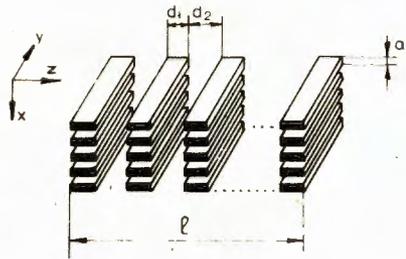


Рис.1. Периодически структурный волновод. Гравитационная волна распространяется вдоль оси z.

$$a = [\omega^2 \rho / (Y + i\omega D)]^{1/2}, \quad /2/$$

где  $\rho$ ,  $Y$  и  $D$  - плотность, модуль упругости и коэффициент затухания материала пьезоэлектрика. При толщине пластин  $a = \lambda/2$ , где  $\lambda$  - длина гиперзвуковой волны на частоте  $\omega$  гравитационной волны ( $\lambda = \sqrt{4\pi^2 Y / \rho \omega^2}$ ), пластины испытывают резонансные колебания

$$u_{x,mn} \approx i \frac{h}{\pi^2} Q_1 a \sin \frac{\pi(x-x_m)}{a} e^{i(\omega t - kz_n)} + \text{к.с.}; \quad /3/$$

здесь  $Q_1$  - механическая добротность упругих колебаний. Колебания в пластинах сопровождаются электрической поляризацией, даваемой следующим выражением:

$$P_{j,mn} = e_{jkl} S_{kl} \approx ie_{jxx} \frac{h}{\pi} Q_1 \cos \frac{\pi(x-x_m)}{a} e^{i(\omega t - kz_n)} + \text{к.с.}, \quad /4/$$

в котором  $S_{kl}$  - деформация пластин;  $e_{ijk}$  - пьезоэлектрический тензор /в /4/ предполагается, что в резонансном случае  $S_{xx} \gg S_{yy}$ ,  $S_{xy}$  и используется правило суммирования Эйнштейна/. Исходя из /4/, запишем эффективную поляризацию волновода

$$P_j(x, z) = ie_j \frac{h}{\pi} Q \left| \sin \frac{\pi x}{a} \right| e^{i(\omega t - kz)} + \text{к.с.}, \quad /5/$$

$$e_j = \begin{cases} e_{jxx}, & |z - z_n| \leq d_1/2, \\ 0, & d_1/2 < |z - z_n| \leq (d_1 + d_2)/2. \end{cases}$$

Раскладывая функцию  $e_j$  в ряд Фурье, получим

$$e_j = e_{jxx} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{imk_0 z}; \quad k_0 = 2\pi/(d_1 + d_2); \quad /6/$$

$$C_m = \frac{i}{2\pi m} [e^{-im\pi \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}} - (-1)^m]; \quad C_0 = \frac{d_1}{d_1 + d_2},$$

2

где  $k_0$  - "волновой вектор" решетки - периодической структуры. Из /6/ видно, что амплитуда  $m$ -й гармоники максимальна при  $d_1 = d_2$ . При этом поляризация /5/ приобретает вид

$$P_j(x, z) = ie_{jxx} \frac{h}{\pi} Q_1 \left| \sin \frac{\pi x}{a} \right| e^{i\omega t} \left[ \frac{1}{2} e^{-ikz} + \sum_m \frac{i}{m\pi} e^{-i(k - mk_0)z} \right] + \text{к.с.}, \quad /7/$$

$$m = \pm 1; \pm 3; \pm 5, \dots$$

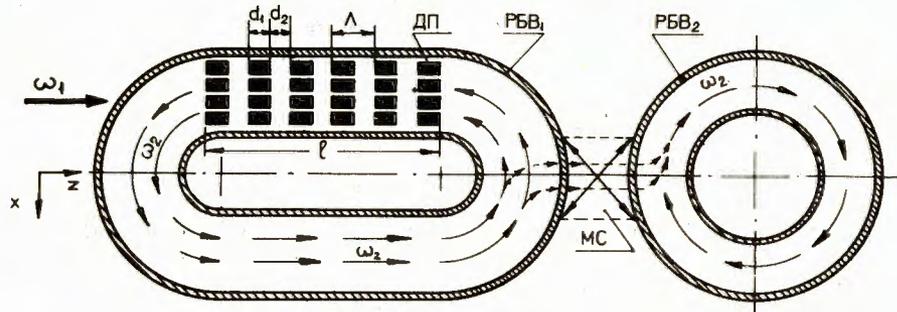


Рис.2. Принципиальная схема детектора гравитационной волны. РБВ<sub>1</sub>, РБВ<sub>2</sub> - резонаторы бегущей волны; МС - мост связи резонаторов;  $l$  - активная длина детектора;  $d_1, d_2$  - длина пластин и величина зазора;  $\Lambda = d_1 + d_2$ ;  $\Lambda$  - период "гофрирования";  $\omega_1$  - частота гравитационной волны;  $\omega_2$  - частота возникающего электромагнитного сигнала;  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

Если набор рассматриваемых стопок заключен в металлический волновод /рис.2/, то поляризация пьезодиэлектрика возбудит в нем электромагнитную волну, для нахождения которой воспользуемся уравнениями Максвелла:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{D} = 0,$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

и материальными уравнениями в форме  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\kappa \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ ,  $\vec{B} = \vec{H}$ .

Применяя стандартные методы, получим волновое уравнение

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\kappa}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - 4\pi \text{grad} \left( \frac{\vec{E}}{c} \text{grad} \kappa \right) - 4\pi \text{grad} \frac{1}{c} \text{div} \vec{P}, \quad /8/$$

где  $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$  - диэлектрическая постоянная вещества.

Предпоследний член в выражении /8/ можно опустить, так как он связан со слабым, не синхронизованным по фазе переизлучением первичной волны. Приготавливая пластины из кристалла так, что  $\epsilon_{xxx} > \epsilon_{yxx}$ ,  $\epsilon_{zxx}$  /что всегда осуществимо/, можно не учитывать дальше компоненты  $P_y$ ,  $P_z$  по сравнению с  $P_x$ . Опуская также, как это обычно делается /1/, последний член в /8/, запишем эту систему в следующем виде:

$$\nabla^2 E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} + \frac{4\pi\kappa}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad /9/$$

При  $\vec{P} = 0$  и наличии проводящих стенок система /9/ описывает взаимосвязь электромагнитных мод в волноводе. Выбираем период  $\Lambda = d_1 + d_2$  модуляции восприимчивости  $\kappa$  таким, при котором не существует волноводных мод с волновыми векторами  $\beta_{mn}$  и  $\beta_{ps}$ , удовлетворяющих условию

$$\beta_{mn} = \beta_{ps} + Nk_0, \quad N = \pm 1; \pm 2; \pm 3, \dots,$$

/обеспечивается выбором  $k_0$ /. В этом случае связь мод будет слабой, и первое уравнение системы /9/ при  $E_x = E_x e^{i\omega t}$  приобретает вид

$$\nabla^2 E_x + \frac{\epsilon\omega^2}{c^2} E_x = -4\pi \frac{\omega^2}{c^2} P_x. \quad /10/$$

Решение /10/, удовлетворяющее условиям на проводящих поверхностях, будем искать в виде

$$E_x = \frac{4}{l_x l_y} X_{mn}(z) \cos(m\pi \frac{x}{l_x}) \sin(n\pi \frac{y}{l_y}), \quad /11/$$

где  $l_x, l_y$  - поперечные размеры волновода по осям X и Y соответственно;  $l_x = ka$ , где  $k$  - число пластин в стопке/.

Подставляя /11/ в /10/, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_{mn}}{dz^2} + \left[ \frac{\epsilon\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2 \right] X_{mn} = \\ = -4\pi \frac{\omega^2}{c^2} \int dx dy P_x \cos(m\pi \frac{x}{l_x}) \sin(n\pi \frac{y}{l_y}). \end{aligned} \quad /12/$$

Поскольку правая часть уравнения /12/ максимальна при  $m = 0$ ,  $n = 1$ , в волноводе будет возбуждаться в основном  $H_{01}$ -мода электрических колебаний. Выбирая  $k_0$ , исходя из условия волнового синхронизма

$$\beta_{01} = \left[ \frac{\epsilon\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{l_y}\right)^2 \right]^{1/2} = |k - k_0|,$$

получим уравнение для  $X_{01}$ .

$$\frac{d^2 X_{01}}{dz^2} + \beta_{01}^2 X_{01} = -4\pi \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{4l_x l_y}{\pi^3} e_{xxx} h Q_1 e^{i\beta_{01}z}, \quad /13/$$

решение которого есть

$$X_{01} = -\frac{1}{2i\beta_{01}} (Cz + A) e^{i\beta_{01}z} + \frac{B}{2i\beta_{01}} e^{-i\beta_{01}z}. \quad /14/$$

Здесь A и B - постоянные интегрирования, а

$$C = \frac{16}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^2} l_x l_y e_{xxx} Q_1 h.$$

Поскольку второй член в /14/ представляет свободную волну, то при учете затухания этот член обращается в нуль, и его можно опустить. Далее, полагая  $X_{01}(z = l_z) = 0$ , будем иметь

$$E_x(z = 0) = \frac{-2iCl_z}{l_x l_y \beta_{01}} \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right). \quad /15/$$

Используя теперь связь  $\vec{B} = \frac{ic}{\omega} \text{rot } \vec{E}$ , получим

$$H_y(z = 0) = \frac{2icCl_z}{l_x l_y \omega} \left[ 1 + \frac{1}{\beta_{01} l_z} \right] \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right),$$

где  $l_z = l$  - длина детектора /см. рис.1 и 2/.

Определяя среднюю плотность потока мощности электромагнитного сигнала как  $P = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_x H_y^*)$  при  $z = 0$ , имеем

$$P = \frac{c^2 C^2 l^2}{2\pi (l_x l_y)^2 \omega \beta_{01}} \sin^2\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)$$

и поток мощности через поперечное сечение волновода

$$\mathcal{P} = \frac{c^2 C^2 l^2}{4\pi l_x l_y \omega \beta_{01}} = \frac{64}{\pi^5 c^2} \cdot \frac{\omega^4 l^2}{\omega \beta_{01}} S (e_{xxx} Q_1 h)^2, \quad S = l_x \cdot l_y. \quad /16/$$

Для эффективного увеличения когерентной длины детектора стопки пластин помещаются, как показано на рис.2, в резонатор бегущей волны РБВ<sub>1</sub>. При длине резонатора  $L_1$ , кратной периоду колебания волны, при каждом обращении волна будет когерентно складываться с вновь образующейся волной. Прирост волны эквивалентен замене в формуле /16/ величины  $l \rightarrow l_{эф.} = \ell N$ , где N - число "оборотов" электромагнитной волны. Прирост мощности  $\mathcal{P}$  будет проис-

ходить до тех пор, пока не сбалансируется потерями в резонаторе. Для определения стационарно-установившегося уровня мощности в резонаторе, перепишем формулу /16/ с учетом  $l \rightarrow 2N$  в следующем виде:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 N^2, \quad /17/$$

$$\mathcal{P}_0 = \frac{2^{11}}{\pi^4} \frac{G Q_1^2 e_{xxx}^2 l^2 S}{c c_0^3 \sqrt{\epsilon}} t^{oz}, \quad /18/$$

где учтено, что  $\omega^2 h^2 = \frac{32 \pi G}{c_0^3} t^{oz}$ ;  $t^{oz}$  - мощность гравитационной волны (эрг/см<sup>2</sup>с); G - гравитационная постоянная. Прирост мощности за один "оборот" составляет

$$\Delta \mathcal{P} = 2N \mathcal{P}_0 = 2\mathcal{P}/N, \quad /19/$$

а потери  $\Delta \mathcal{P}_{n1} = \frac{\omega L_1}{Q_3 c} \mathcal{P}$ , где  $Q_3$  - электрическая добротность резонатора РБВ<sub>1</sub>, равная  $\frac{Q_2 Q_2'}{Q_2 + Q_2'}$ ;  $Q_2' = \frac{1}{\text{tg} \delta} \frac{V_2}{V_1}$ ;  $\text{tg} \delta$  - тангенс диэлектрических потерь электромагнитной волны в пьезоэлектрических пластинках;  $V_1$  - объем, занимаемый пластинками;  $V_2$  - объем резонатора;  $Q_2$  - электрическая добротность резонатора, не содержащего пластины. Ниже принимается  $Q_2 \gg Q_2'$  и, следовательно,  $Q_3 = Q_2' = \frac{V_2}{V_1} \frac{1}{\text{tg} \delta}$ . Из равенства  $\Delta \mathcal{P} = \Delta \mathcal{P}_{n1}$  находится N, при котором мощность в резонаторе достигает равновесного значения  $\mathcal{P}_1$ :  $N = 2Q_3 c / \omega L_1$ .

$$\mathcal{P}_1 = 4\mathcal{P}_0 (Q_3 c / \omega L_1)^2. \quad /20/$$

Уровень сигнала можно значительно повысить, присоединив к первому резонатору второй резонатор бегущей волны РБВ<sub>2</sub> /рис.2/ с электрической добротностью  $Q_4 \gg Q_3$ . Во втором резонаторе накапливаемая мощность  $\mathcal{P}_2 = M \mathcal{P}_1'$ , где M - коэффициент накопления мощности<sup>/6/</sup>;  $\mathcal{P}_1'$  - установившаяся мощность в первом резонаторе при подключенном втором резонаторе. Потери мощности в РБВ<sub>2</sub> имеют величину

$$\Delta \mathcal{P}_{n2} = \frac{\omega L_2}{Q_4 c} \mathcal{P}_2 = \frac{\omega L_2}{Q_4 c} M \mathcal{P}_1'.$$

Суммарные потери мощности в двух резонаторах, приравненные приросту мощности, будут:

$$\Delta \mathcal{P}_{n1} + \Delta \mathcal{P}_{n2} = \Delta \mathcal{P},$$

$$\left[ \frac{\omega L_2}{Q_4 c} M + \frac{\omega L_1}{Q_3 c} \right] \mathcal{P}_1' = \frac{2}{N} \mathcal{P}_1', \quad N = 2Q_3 Q_4 c / \omega [L_2 Q_3 M + L_1 Q_4]. \quad /21/$$

Установившаяся мощность во втором резонаторе будет

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_0 N^2 M = \mathcal{P}_0 M \left[ \frac{2Q_3 Q_4 c}{\omega (L_2 Q_3 M + L_1 Q_4)} \right]^2.$$

Очевидно, максимальное значение  $\mathcal{P}_2$  достигается при условии  $L_2 Q_3 M = L_1 Q_4$ , т.е. при коэффициенте связи  $M = L_1 Q_4 / L_2 Q_3$  и, следовательно,  $N = Q_3 c / \omega L_1$ :

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_0 \frac{Q_3 Q_4 c^2}{L_1 L_2 \omega^2}. \quad /22/$$

Накопленная энергия во втором резонаторе имеет величину

$$W = \mathcal{P}_2 \frac{L_2}{c} = \mathcal{P}_0 \frac{Q_3 Q_4 c}{L_1 \omega^2}. \quad /23/$$

Примем время вывода этой энергии из резонатора в измерительный тракт  $\tau = 2/\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  - ширина полосы гравитационного сигнала. В этом случае отношение мощности сигнала на входе усилителя к мощности входного шума усилителя будет

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{сиг.}}}{\mathcal{P}_{\text{шум.}}} = \frac{\mathcal{P}_0 Q_3 Q_4 c \Delta\omega \pi}{L_1 \omega^2 k T \Delta\omega}, \quad /24/$$

где k - постоянная Больцмана; T - входная эффективная температура усилителя. Полагаем здесь, что резонаторы и пьезоэлектрические пластины охлаждены до температуры жидкого гелия и, следовательно, шумы планковского излучения ниже входных шумов усилителя. Запишем далее,  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0' t^{oz}$ , где  $\mathcal{P}_0'$  - множитель, стоящий перед  $t^{oz}$  в формуле /18/, и приравняем /24/ к единице. Из полученного выражения найдем требуемый уровень мощности гравитационного потока:

$$t^{oz} \geq \frac{L_1 \omega^2 k T}{\pi \mathcal{P}_0' Q_3 Q_4 c} = \frac{\pi^3 \sqrt{\epsilon} c_0^3 \omega^2 k T L_1}{2^{11} G Q_1^2 Q_3 Q_4 e_{xxx}^2 l^2 S} \quad [\text{эрг/с}]. \quad /25/$$

Все величины в /25/ даны в системе СГСЭ. Для оценки  $t^{oz}$  будем считать, что пьезоэлектрические пластины выполнены из ниобата лития, для которого на частоте гравитационной волны  $\omega = 10^9$  рад с<sup>-1</sup>,  $\epsilon = 30$ <sup>/7/</sup>;  $e_{xxx} = 1 \cdot 10^6$  ед.СГСЭ<sup>/7,8/</sup>;  $\text{tg} \delta =$

$= 1 \cdot 10^{-8} / 9 / * ; Q_3 = 10^8 \frac{V_2}{V_1} ; Q_1 = 10^7 / 10 /$ . Принимаем далее  $l = 5 \cdot 10^2$  см;  $L_1 = 3l = 15 \cdot 10^2$  см;  $\frac{V_2}{V_1} = 3$ ;  $Q_4 = \omega / \Delta\omega = 10^7$  /резонатор РБВ<sub>2</sub> выполняется из сверхпроводящего материала/;  $S = 10^2$  см<sup>2</sup>;  $T = 5$  К; скорость замедленного сигнала в резонаторах  $c = 10^{-2} c_0$ ;  $c_0$  - скорость света в вакууме. Подстановка этих величин в формулу /25/ дает  $t^{02} \geq 0,5$  эрг см<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup>. Параметры пластин при этом должны быть  $a = 12$  мкм и  $d_1 = d_2 = 0,9$  см.

Проведенный анализ свидетельствует о перспективности метода двухволнового преобразования гравитационной волны в электромагнитный сигнал на распределенной слоистой диэлектрической системе.

Однако надо подчеркнуть, что полученная оценка чувствительности дана в приближении малости обратного влияния электромагнитного поля в резонаторе на механическую добротность пьезоэлектрических пластин. Этот фактор в настоящее время детально анализируется.

В заключение авторы выражают глубокую признательность Ю.М.Казаринову, Н.А.Черникову, Н.С.Шавохиной, А.И.Калинину и В.Н.Трофимову за важные дискуссии, проведенные по данной работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ярив А. Квантовая электроника. "Сов.радио", М., 1980.
2. Лукьянов В.Н. и др. Квантовая электроника, 1975, т.2, № 11, с.2373.
3. Спихальский А.А. Квантовая электроника, 1984, т.11, № 9, с.1812.
4. Спихальский А.А. Квантовая электроника, 1984, т.11, № 9, с.1824.
5. Амальди Э., Пиццела Г. Астрофизика, кванты и теория относительности. "Мир", М., 1982.
6. Диденко А.Н. Сверхпроводящие волноводы и резонаторы. "Сов. радио", М., 1973.
7. Королюк А.П., Мацаков Л.Я., Васильченко В.В. Кристаллография, 1970, т.15, вып.5, с.1031.
8. Киселев Д.Ф., Фирсова М.М. Физика твердого тела, 1973, т.15, вып.1, с.280.
9. Smolenski G.A. et al. phys.stat.sol., 1966, vol.13, No.2, p.312.
10. Акустические кристаллы /под ред. М.П.Шаскольской/. "Наука", М., 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел  
30 декабря 1985 года.

Данные, представленные в / 9/, аппроксимированы к частоте  $10^9$  рад/с.

Акишин П.Г. и др.

13-85-968

Двухволновой параметрический метод приема гравитационной волны

Выполнен анализ приема гармонической гравитационной волны методом параметрического преобразования ее в электромагнитную волну в периодически распределенном пьезоэлектрическом волноводе. Показана высокая чувствительность этого метода детектирования гравитационного потока в СВЧ-диапазоне, составляющая по гравитационному потоку  $0,5$  эрг·с<sup>-1</sup>·см<sup>-2</sup>.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Akishin P.G. et al.

13-85-968

Two-Wave Parametric Method for Gravitational Wave Reception

The reception of harmonic gravitational wave is analysed using the method of its parametric transformation into electromagnetic wave in a periodically distributed piezoelectrical waveguide. A high sensitivity of this method for detecting the gravitational flux in microwave range is shown. It is equal to  $0.5$  erg·s<sup>-1</sup>·cm<sup>-2</sup>.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985