ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

13 - 3734

Ю.К. Акимов

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

К СТАТИСТИКЕ ФОТОЭЛЕКТРОНОВ СЦИНТИЛЛЯЦИОННОГО СЧЕТЧИКА ПРИ ВРЕМЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

1968

13 - 3734

Ю.К.Акимов

К СТАТИСТИКЕ ФОТОЭЛЕКТРОНОВ СЦИНТИЛЛЯЦИОННОГО СЧЕТЧИКА ПРИ ВРЕМЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

1. Введение

В работе Поста и Шиффа [1] по теории временного разрешения сцинтилляционного счётчика было получено среднее значение времени появления Q -го фотоэлектрона и дисперсия этого времени:

$$\bar{t}_Q = \frac{Q\tau}{R_o}\left(1 + \frac{Q+1}{2R_o} + \ldots\right) \qquad (1)$$

$$D_{t_Q} = \frac{Q\tau^2}{R_o^2}\left(1 + \frac{2(Q+1)}{R_o} + \ldots\right). \qquad (2)$$

Здесь τ – постоянная времени высвечивания сцинтиллятора, R_o – среднее количество фотоэлектронов за полное время сцинтилляции.

Приведенные выражения получены в предположении $R_o \gg 1$ и $Q \ll R_o$.

Q может быть тем количеством фотоэлектронов, начиная с которого срабатывает схема, подключенная к фотоумножителю. (Такую схему в дальнейшем будем именовать пороговой). Современные высокоскоростные фотоумножители характеризуются весьма малой временной дисперсией вырабатываемых импульсов. Даже при регистрации отдельных фотоэлектронов дисперсия, обусловленная фотоумножителем, составляет ≈ 1 нсек и менее. Поэтому нередко, особенно при использовании сравнительно медленных неорганических сцинтилляторов, статистика фотоэлектронов может играть основную роль в ограничении временного разрешения сцинтилляционного счётчика. Разрешение будет улучшаться с уменьшением Q вплоть до $Q=1$, что, в частности, видно из экспериментальных работ/2,3/, где использовался иодистый натрий.

На практике происходит ухудшение разрешения за счёт разброса в энергии, оставляемой частицей в сцинтилляторе ($R_0 \neq const$). Для компенсации влияния этого разброса широко используется так называемый метод пересечения нуля, в котором порог регистрации обычно соответствует половине от полного заряда, образующегося на выходе фотоумножителя, т.е. $Q = R/2$. /4/.

Однако с увеличением Q возрастает дисперсия D_{t_Q}. Количественное сравнение двух методов регистрации: пороговой схемой и по пересечению нуля дано в работе/5/. В этой работе делается справедливое заключение в пользу пороговых схем, срабатывающих от начальной части импульса.

Вместе с тем приведенные там количественные оценки нуждаются в дополнительном рассмотрении. В частности, для схемы, срабатывающей от начала импульса, принята дисперсия втрое меньшая, чем следовало бы из (2). Действительно, этим отличается схема,/6/ срабатывающая не в момент $\bar{t}_Q$, а при

$$\bar{t} = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \ldots + \bar{t}_Q}{Q}.$$

Однако при этом должно выполняться условие $Q \gg 1$ и в предельном, часто наиболее интересном случае, когда $Q = 1$, дисперсия оказывается такой же, как и в случае обычной пороговой схемы, т.е. определяется выражением (2).

Далее, при $Q = R/2$ в/5/ использовалось значение дисперсии $D_{t_Q} = \frac{Q\,r^2}{R_0^2}$, совпадающее с первым членом (2). При этом имеется оговорка, что данное выражение получено для $Q \ll R_0$, и реальная дисперсия в случае $Q = R/2$ должна быть больше расчётной

В работе/7/ совершенно верно отмечается, что обычно используемые теоретические представления дают бесконечно большую дисперсию, если Q приближается к R_0, в то время как экспериментальные данные и метод Монте-Карло свидетельствуют о конечных значениях дисперсии.

Ограниченное значение дисперсии дает также работа/8/, где задача определения $\bar{t}_Q$ и D_{t_Q} решалась в более общем виде, чем в/1/. Еще раньше эта задача при произвольных Q и R рассматривалась в работе/9/. Однако анализ работ/8/ и /9/ показывает, что имеется необходимость в уточнении или соответствующем изменении некоторых развитых в них положений.

В настоящей работе был сделан более корректный подход к задаче, хотя использованный математический аппарат оказался даже проще. Ясно, что решения задачи должны удовлетворять критериям, которые вытекают непосредственно из физики процессов сцинтилляционного счётчика. Поэтому остановимся вначале на двух таких критериях и сравним с ними результаты работ/8/ и /9/.

2. *Характерные особенности распределения фотоэлектронов во времени*

Как и во всех вышеупомянутых работах, будем считать, что сцинтиллятор высвечивается по закону простой экспоненты.

Предположим, что число фотонов N в сцинтилляционной вспышке чрезвычайно велико. Тогда чрезвычайно велико и среднее число фотоэлектронов $R_0 = pN$, где p – квантовый выход фотокатода. Относительная дисперсия полного количества фотоэлектронов при переходе от вспышки к вспышке будет пренебрежимо мала, т.е. всегда $R \approx R_0$, и для определения времени образования Q-го фотоэлектрона можно воспользоваться непосредственно формулой

$$Q = R_0 (1 - e^{-t/r}), \tag{3}$$

откуда

$$t = -r \ln\left(1 - \frac{Q}{R_0}\right). \tag{4}$$

В частности, когда $Q = \frac{R_o}{2}$,

$$t_{R_0/2} = \tau \ln 2 \approx 0{,}69\,\tau \,. \qquad (5)$$

Это выражение получено для больших R_o. Ниже будет показано, что необходимым и достаточным условием для его выполнения является выполнение соотношения $\frac{R_o}{2} \gg 1$. Обратим внимание, что $t_{R_0/2}$ определяется только постоянной времени высвечивания сцинтиллятора и не зависит от квантового выхода фотокатода, как это следовало бы из работы /8/ (см. первую часть выражения (23)). На основании /8/ при $p = 0{,}1$ $t_{R_o/2} = 0{,}4\,\tau$, что противоречит критерию (5)) (в /8/ обозначено $p = 1/k$, $Q = \nu$, $R_o = R$).

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда интенсивность сцинтилляционной вспышки, наоборот, чрезвычайно мала. При этом в каждом событии мы имеем дело фактически лишь с одним фотоэлектроном, т.е. полное количество фотоэлектронов равно либо единице, либо нулю. Отсутствие фотоэлектрона приведет только к неэффективности регистрации интересующих нас событий и никак не может повлиять на распределение фотоэлектронов во времени в регистрируемых событиях. На основании (3) вероятность появления какого-либо фотоэлектрона за время t составляет

$$\phi(t) = 1 - e^{-t/\tau} \qquad (6)$$

По определению $$\bar{t} = \int_0^\infty t \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\, dt$$

и $$D_t = \overline{t^2} - \bar{t}^2 = \int_0^\infty t^2 \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\, dt - \bar{t}^2 ,$$

откуда найдем

$$\bar{t} = \tau \tag{7}$$

и

$$D_t = \tau^2 . \tag{8}$$

В отличие от этих величин, в работе/9/ получены $\bar{t} = 0{,}5\,\tau$ и $D_t = 0{,}25\,\tau^2$, т.е. значения, явно заниженные.

3. Определение среднего времени прибытия Q – го фотоэлектрона и дисперсия этого времени

С учётом всего вышесказанного, обратимся теперь к задаче определения $\bar{t}_Q$ и D_{t_Q} в случае произвольных Q и R. При этом в существенной мере (однако не полностью) будет использован подход к задаче, развитый в/9/.

Итак, если на фотокатод за время одной сцинтилляционной вспышки попадает N фотонов, то вероятность образования полного количества фотоэлектронов R равна/10,11/

$$_N P_R = \frac{N!}{R!(N-R)!}\, p^R (1-p)^{N-R} \tag{9}$$

Величина N сама флюктуирует, поэтому (9) необходимо просуммировать по всевозможным N с учётом вероятности образования каждого N . Однако, поскольку число фотоэлектронов значительно меньше числа фотонов в сцинтилляционной вспышке, которое флюктуирует и может иметь значения, условно принимаемые за бесконечно большие, то для определения P_R следует воспользоваться законом Пуассона

$$P_R = \frac{R_o^R\, e^{-R_o}}{R!} \tag{10}$$

При $\sqrt{R_0} \gg 1$ распределение P_R описывается законом Гаусса.

Из всей совокупности событий выделим и рассмотрим сначала события с некоторым полным числом фотоэлектронов R. Вероятность появления какого-либо фотоэлектрона из R за время t описывается (6).

В дальнейшем нам будет удобнее пользоваться безразмерной величиной $\theta = t/\tau$, поэтому перепишем (6) в виде

$$\phi(\theta) = 1 - e^{-\theta}. \tag{11}$$

Определим вероятность появления Q фотоэлектронов за время θ. Итак, имеется ограниченное количество R фотоэлектронов. Вероятность появления каждого из них за некий интервал времени t равна ϕ. Требуется определить вероятность образования за этот интервал Q фотоэлектронов. Легко видеть, что постановка задачи ничем не отличается от определения вероятности образования R фотоэлектронов при N фотонах и квантовом выходе фотокатода p, определяющей вероятность образования одного фотоэлектрона. Поэтому на основании (9) после замены N на R, R на Q и p на ϕ, получим:

$$_R P_Q(\theta) = \frac{R!}{(R-Q)!\,Q!}\,\phi^Q(1-\phi)^{R-Q}. \tag{12}$$

Теперь определим вероятность того, что последний Q-ый фотоэлектрон образовался в интервале времени $d\theta$, заключенном между θ и $\theta + d\theta$. Интервал $d\theta$ выберем настолько малым, чтобы можно было пренебречь случаями попадания в него одновременно двух и более фотоэлектронов. Любой из R фотоэлектронов с вероятностью $d\phi$ может попасть в $d\theta$, поэтому вероятность обнаружить там фотоэлектрон равна $R\,d\theta$. Однако, чтобы этот фотоэлектрон оказался Q-ым, из остальных $R-1$ фотоэлектронов за время t должно появиться $Q-1$ фотоэлектронов. Вероятность $_{R-1}P_{Q-1}$ находится из (12) заменой R на $R-1$, а Q на $Q-1$. В результате искомая вероятность обнаружения Q-го фотоэлектрона в интервале $d\theta$ через время θ равна

$$ {}_{R}W_{Q}(\theta)\,d\theta = {}_{R-1}P_{Q-1}\ R\,d\phi \tag{13} $$

Если время θ не фиксировано, т.е. допущено произвольное изменение θ от 0 до ∞, то вероятность появления Q-го фотоэлектрона должна быть равна 1. В приложении 1 показано, что

$$ \int_0^{\infty} {}_{R}W_{Q}(\theta)\,d\theta = 1, \tag{14} $$

т.е. выражение (13) удовлетворяет указанному требованию.

Полная вероятность попадания Q-го фотоэлектрона в интервале $d\theta$ после θ при любых R составит

$$ W_{Q}(\theta)\,d\theta = \sum_{R=Q}^{N\approx\infty} P_{R}\ {}_{R}W_{Q}(\theta)\,d\theta. \tag{15} $$

Интегрирование (15) в пределах $\theta = 0 \div \infty$ с учётом (14) дает

$$ \epsilon_{Q} = \sum_{R=Q}^{\infty} P_{R} \tag{16} $$

вероятность того, что Q-ый фотоэлектрон когда-либо вообще появится. Возможное отличие этой величины от единицы обусловлено отсутствием в (15) членов с $R < Q$. Величина ϵ_{Q} в дальнейшем будет называться эффективностью регистрации.

Особый интерес будет представлять случай с $Q = 1$. Ясно, что неэффективность при этом возникает только при малых R_0, когда заметна вероятность $P_{R=0}$. Используя (10), найдем $\epsilon_1 = 1 - P_{R=0}$ при значениях $R_0 = 1,2,3$. Получим, соответственно, $\epsilon_1 = 0{,}65;\ 0{,}88$ и $0{,}95$.

Подчеркнем, что в методе перечесения нуля принимается не $Q = \frac{\bar{R}_0}{2}$, а $Q = \frac{R}{2}$, где R может быть любым, поэтому в принципе эффективность регистрации такая же, как и при $Q = 1$, т.е. в случае $R_0 > 3$ эффективность $\epsilon_{R/2} = 1$.

Для разделения частиц по энерговыделениям нередко приходится вводить довольно высокий уровень дискриминации, т.е. величина Q выбирается довольно близкой к R_o. При этом обычно стремятся также сохранить полную эффективность регистрации эффекта, т.е. иметь $\epsilon_Q \approx 1$. Трудности, естественно, возрастают с уменьшением R_o, сопровождающимся расширением распределения P_R, измеренного в единицах R/R_o. Если P_R описывается законом Гаусса, то, например, для условия $\epsilon_Q > 0{,}9$ нетрудно получить

$$Q < R_o - 1{,}3\sqrt{R_o} \,. \tag{17}$$

В частности, если $Q = 0{,}9\,R_o$, то $R_o = 170$.

Знание функции (15) в принципе достаточно для определения $\bar{t}_Q$ и D_{t_Q}. В приложении 2 показано, что в общем виде эти величины записываются, как

$$\bar{t}_Q = \frac{\tau}{\epsilon_Q} \sum_{R=Q}^{\infty} P_R \sum_{i=Q-1}^{i=0} \frac{1}{R-i} \tag{18}$$

$$D_{t_Q} = \frac{\tau^2}{\epsilon_Q} \sum_{R=Q}^{\infty} P_R \left[\left(\sum_{i=Q-1}^{i=0} \frac{1}{R-i} \right)^2 + \sum_{i=Q-1}^{i=0} \frac{1}{(R-i)^2} \right] - \bar{t}_Q^{\,2} \tag{19}$$

Рассмотрим вначале наиболее простой случай $Q = 1$. При этом

$$\bar{t}_1 = \frac{\tau}{\epsilon_1} \sum_{R=1}^{\infty} P_R \frac{1}{R} \tag{20}$$

$$D_{t_1} = \frac{2\tau^2}{\epsilon_1} \sum_{R=1}^{\infty} P_R \frac{1}{R^2} - \bar{t}_1^{\,2} \tag{21}$$

Величины $\bar{t}_1$ и D_{t_1} для малых R_0 (от 0 до 10) приведены на рис. 1. При вычислениях использовались табулированные значения [12] вероятностей P_R, описываемых законом Пуассона. На рис. 1 для сравнения приведена зависимость $\frac{D_{t_1}}{\tau^2} = \frac{1}{R_0^2}$, соответствующая первому члену выражения (2). Такая зависимость дает заниженные значения дисперсии, за исключением $R_0 = 1$. Например, при $Q = 4$ дисперсия оказывается в 3,2 раза выше, чем $\frac{\tau^2}{R_0^2}$. Однако с увеличением R_0 дисперсия все лучше и лучше описывается выражением $\frac{\tau^2}{R_0^2}$. В частности, при $R_0 = 16$ последнее дает значение, отличающееся от (21) всего лишь на 15%.

При $R_0 = 1$ дисперсия оказывается меньше, чем $\frac{\tau^2}{1}$. Интересно определить дисперсию в случае $\epsilon_1 \ll 1$. Например, если в каждом событии возникает в среднем по одному фотону, то при $p = 0{,}1$ в среднем каждое десятое событие будет сопровождаться выходом фотоэлектрона, т.е. $\epsilon_1 = 0{,}1$. Вероятностью образования более, чем одного фотоэлектрона, можно пренебречь и из (20) и (21) найти $\bar{t} = \tau$ и $D_t = \tau^2$. Этот результат находится в полном соответствии с (7) и (8).

Рассмотрим теперь среднее время $\bar{t}_Q$ и его дисперсию при произвольных Q. Для $R_0 = 10$ такие зависимости приведены на рис. 2. На этом же рисунке даны корни квадратные из значений дисперсии, которые определяют разрешающее время сцинтилляционного счётчика. Видно, что при $Q = R_0$ дисперсия имеет ограниченное значение.

Остановимся на случаях, когда P_R описывается законом Гаусса и эффективность $\epsilon_Q \approx 1$.

Упростим выражения (18) и (19). Суммирование членов типа $P_R \Psi(R)$ по всевозможным значениям R дает среднее значение $\overline{\Psi(R)}$. В указанных выражениях суммирование ведется, начиная с члена $R = Q$. Однако условие $\epsilon_Q = 1$ возволяет не принимать во внимание члены $P_R \Psi(R)$ с $R < Q$ и положить

$$\sum_{R=Q}^{\infty} P\,\Psi(R) = \overline{\Psi(R)}\,.$$

Если $\Psi(R)$ – плавно меняющаяся функция, как в нашем случае, а распределение P_R довольно узкое, что выполняется при нормальном распределении, то в первом приближении $\overline{\Psi(R)} = \Psi(R_0)$. На основании этого нетрудно получить:

$$\bar{t}_Q = r \sum_{i=Q-1}^{i=0} \frac{1}{R_0 - i} \qquad (22)$$

$$D_{t_0} = r^2 \sum_{i=Q-1}^{i=0} \frac{1}{(R_0 - i)^2}, \qquad (23)$$

Положив $Q = 1$, найдем $\bar{t}_1 = \frac{r}{R_0}$ (24)

$$D_{t_1} = \frac{r^2}{R_0^2} \qquad (25)$$

Ранее отмечалось, что такие значения получаются, уже начиная с $R_0 \approx 16$.

Выражения (22) и (23) можно упростить, если воспользоваться формулой

$$\sum_{i=0}^{Q-1} f(i) \approx \frac{1}{h} \int_0^{Q-1} f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(Q-1) + f(0)], \qquad (26)$$

где h – шаг i. В нашем случае $h = 1$. Получим

$$\bar{t}_Q = r[\ln \frac{R_0}{R_0 - Q + 1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0 - Q + 1}\right) \qquad (27)$$

$$D_{t_Q} = r^2 \{ \frac{1}{R_0 - Q + 1} - \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(R_0 - Q + 1)^2} + \frac{1}{R_0^2}\right]. \qquad (28)$$

Видно, что подстановка $Q = 1$ вновь приводит к (24) и (25). При

$Q = \frac{R_0}{2} \gg 1$ $\bar{t}_Q = r \ln 2$ и

$$D_{t_{R_0/2}} = \frac{r^2}{R_0}. \qquad (29)$$

Следовательно, полученное среднее значение времени появления Q-го фотоэлектрона удовлетворяет критерию (5).

Таким образом, дисперсия, обусловленная сцинтиллятором и фотокатодом, в методе пересечения нуля в R_0 раз выше, чем при регистрации по первому фотоэлектрону.

Остановимся еще на случае с $Q > \frac{R_0}{2}$, но все-таки $\epsilon_Q \approx 1$. Ранее говорилось, что такая ситуация возникает при дискриминации импульсов по амплитуде перед схемой, осуществляющей временные измерения. После дискриминатора средняя амплитуда импульса пропорциональна $\Delta R = R - Q$. Полагая $\Delta R \gg 1$, из (28) получим

$$D_{t_Q} = \tau^2 \left(\frac{1}{\Delta R} - \frac{1}{R_0} \right) \approx \frac{\tau^2}{\Delta R} \qquad (30)$$

$$R_0 \gg \Delta R.$$

Интересно отметить, что эта величина может быть значительной как для неорганических сцинтилляторов, где τ велико, так и органических. Например, при $\tau = 4$ нсек $R_0 = 160$ и $\Delta R = 0{,}1\ R_0$ найдем $D_{t_Q} = 1$ нсек.

Автор благодарен А.А.Тяпкину за ценные замечания.

Приложение 1

Покажем, что

$$\int_0^\infty {}_Q W_R(\theta)\, d\theta = 1 . \qquad (\text{П}.1)$$

При интегрировании по θ от 0 до ∞ функция ϕ (см. выражение (11)) изменяется от 0 до 1. Интегрируя (13), запишем правую часть (13), как

$$\frac{R!}{(Q-1)!(R-Q)!} \int_0^1 \phi^Q (1-\phi)^{R-Q}\, d\phi \qquad (\text{П}.2)$$

Введем обозначения $Q = x$ и $R - Q = y - 1$. Полученный интеграл представляется через гамма-функции

$$\int_0^1 \phi^{x-1} (1-\phi)^{y-1} d\phi = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!} \qquad (\text{П}.3)$$

Возвращаясь вновь к прежним обозначениям, убеждаемся, что (П.2) дает единицу, т.е. условие (П.1) выполняется.

Приложение 2

Для определения среднего времени появления Q-го фотоэлектрона $\bar{t}_Q$ и дисперсии D_{t_Q}, как и в /1,9/, используем метод производящих функций.

Интересующая нас производящая функция запишется в виде:

$$G(s) = \int_0^\infty W_Q(\theta)\, s^\theta\, d\theta\,, \tag{П.4}$$

где s – некоторая переменная.

Полагая $s=1$, имеем

$$[G(s)]_{s=1} = \epsilon_Q \tag{П.5}$$

(см. (16)).

Производящая функция обладает следующими свойствами

$$\left[\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial s}\right]_{s=1} = \bar{\theta}_Q = \frac{\bar{t}_Q}{r} \tag{П.6}$$

$$\left[\frac{1}{G}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}+\frac{\partial G}{\partial s}\right)-\left(\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial s}\right)^2\right]_{s=1} = D_{\theta_Q} = \frac{D_{t_Q}}{r^2} \tag{П.7}$$

Используя (11), (15) и (П.3), найдем

$$G(s) = \sum_{R=Q}^{\infty} P_R \frac{R!}{(R-Q)!}\,\frac{\Gamma(R-Q+1-\ln s)}{\Gamma(R+1-\ln s)} \tag{П.8}$$

Воспользовавшись свойством гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, получим

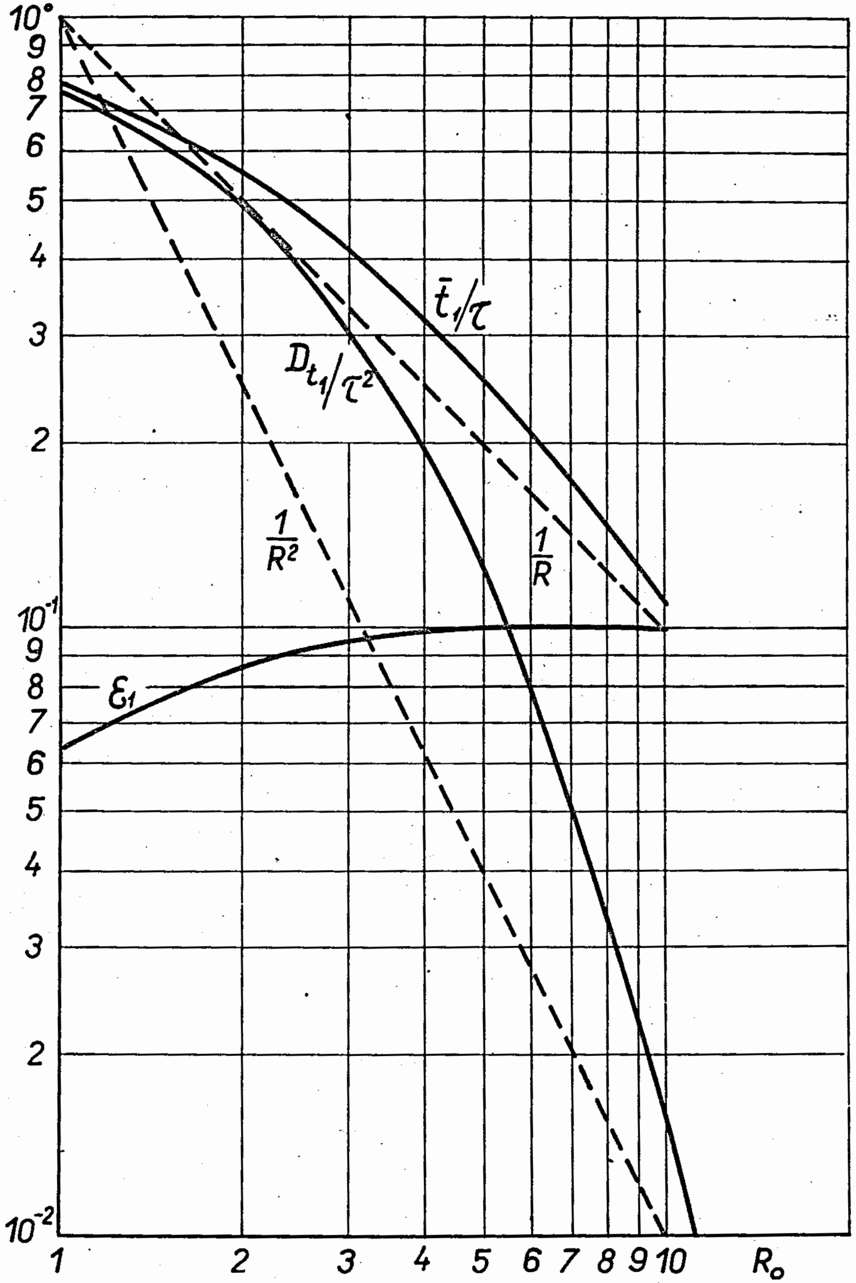
$$G(s) = \sum_{R=Q}^{\infty} P_R \frac{R!}{(R-Q)!} \frac{1}{\prod\limits_{i=Q-1}^{i=0} (R - i - \ln s)} \quad . \tag{П.9}$$

Дифференцируя (П.9) и используя (П.6), найдем (18). Двойное дифференцирование (П.9) с учётом (П.7) дает (19).

Л и т е р а т у р а

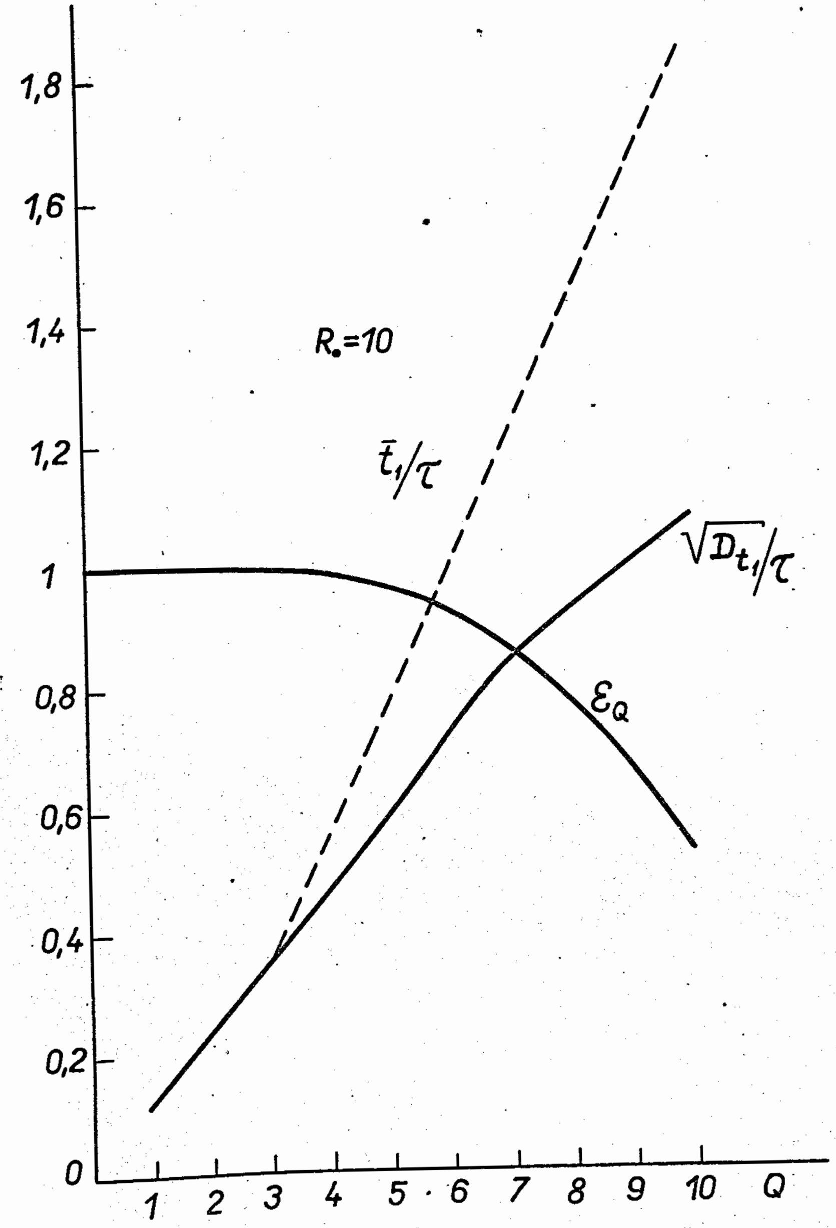
1. *Post R.F., Schiff L.T., Phys. Rev., 80, 1113 (1950).*
2. *Currie W.M., Nucl. Instrum. Methods, 13, 215 (1961).*
3. *Lynch F.J. IEEE Trans. NS-13, N 3, 140 (1966).*
4. *Weinzierl P. Rev. Sci. Insrtum., 27, 226 (1956).*
5. *Bell R.F., Nucl. Instrum. Methods., 42, 211 (1966).*
6. *Colombos S., Gatti E., Pignanelli M., Nuovo Cimento, 5, 1739 (1957).*
7. *Cocchi M., Rota A., Nucl. Instrum. Methods., 55, 365 (1967).*
8. *Sigfridsson B, Nucl. Instrum. Methods., 54, 13 (1967).*
9. *Якушин В.В., ПТЭ, № 3, 93 (1965).*
10. *Арлей Н., Бух К. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, стр. 32, М., И.Л. 1951.*
11. *Акимов Ю.К. Сцинтилляционные методы регистрации частиц больших энергий, стр. 32, М., Изд. МГУ, 1963.*
12. *Гольданский В.И., Куценко А.В., Подгорецкий М.И., Статистика отчсётов при регистрации ядерных частиц, стр. 379, М., Физматгиз, 1959.*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1968 года.



10^{0}
9
8
7
6
5
4
3
2
10^{-1}
9
8
7
6
5
4
3
2
10^{-2}
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
R_o
$\bar{t}_1/\tau$
D_{t_1}/τ^2
$\frac{1}{R^2}$
$\frac{1}{R}$
ε_1

Рис.1.



1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Q
$R_o=10$
$\bar{t}_1/\tau$
$\sqrt{D_{t_1}}/\tau$
ε_Q

Рис.2.