СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

13 - 12004

И.И.Гайсак, К.О.Оганесян

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1978

13 - 12004

И.И.Гайсак, К.О.Оганесян

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Гайсак И.И., Оганесян К.О. 13 - 12004

Об интегральном методе измерения угловых распределений

Рассматривается возможность применения интегрального метода измерения угловых распределений в экспериментах на широкоапертурных пучках. Восстановление дифференциальных сечений сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с использованием метода регуляризации Тихонова. Проведены оценки достижимых точностей в измерении угловых распределений для установки "Пион".

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Haysak I.I., Oganessian K.O. 13 - 12004

On the Integral Technique for Studying Angular Distributions

The possibility of application of integral technique to study the angular distributions is considered. The Fredholm integral equation of the first kind is needed to be solved for reestablishing differential cross sections. To avoid the problem of ill-conditioning the method of regularization considered by Tikhonov is used. The estimations of reacheable precisions for angular distributions for PION installation are performed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. В экспериментах на низкоинтенсивных и широкоапертурных пучках частиц в качестве относительно простого и эффективного способа исследований угловых распределений может быть использован следующий интегральный метод измерения */рис. 1/*. Полый секционированный детектор регистрирует частицы, рассеянные на передвигающейся вдоль оси детектора мишени. Такой способ измерений, когда одновременно регистрируются частицы, рассеянные в большой телесный угол, позволяет сократить время, необходимое для достижения требуемой статистической точности. Но при этом взаимосвязь дифференциальных сечений и скорости счета детектора приобретает сложный характер.

Скорость счета детектора $n(x)$ в зависимости от координаты мишени x можно записать в виде

$$n(x) = J \int_0^{\pi} N \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \cdot \delta(x,\theta)\, 2\pi \sin\theta \, d\theta , \qquad /1/$$

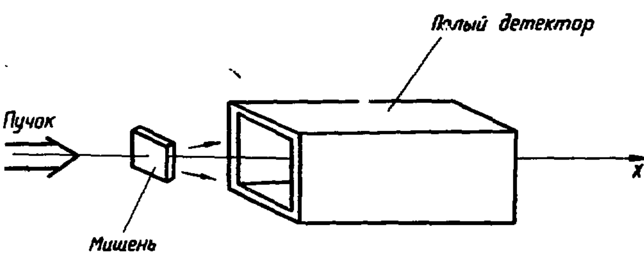

Рис. 1. Схема интегрального метода.

где J - поток падающих на мишень частиц, N - количество ядер мишени на 1 $см^2$ площади, $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$ - дифференциальное сечение рассеяния на угол θ, $\delta(x,\theta)$ - вероятность регистрации детектором частицы, рассеянной под углом θ на мишени, расположеной в точке x.

Вид функции $\delta(x,\theta)$ определяется геометрическими размерами детектора *и мишени*, конфигурацией падающего пучка и эффективностью регистрации частиц детектором. Таким образом, эта аппаратурная функция вычисляется с точностью, ограниченной точностями определения перечисленных параметров.

Вводя безразмерные величины $u(x) = \frac{n(x)}{J}$ и $g(\theta) = 2\pi N \sin\theta \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$, запишем /1/ в виде

$$u(x) = \int_0^{\pi} g(\theta)\,\delta(x,\theta)\,d\theta . \qquad /2/$$

Таким образом, восстановление дифференциальных сечений в рассматриваемом методе сводится к решению *интегрального уравнения /2/*.

2. Задача решения интегрального уравнения /2/, уравнения Фредгольма первого рода /операторная форма $u = Ag$ /, принадлежит к классу неустойчивых задач[1] /изменение левой части уравнения на малую величину приводит к большим вариациям решения/. Поэтому для нахождения $g(\theta)$ по функции $u(x)$, известной из эксперимента с погрешностью, применяют регуляризационные методы. Метод регуляризации позволяет строить приближенное решение уравнения /2/, устойчивое к малым изменениям исходных данных. Мы воспользуемся методом Тихонова. В работе[2] показано, что устойчивое решение уравнения /2/ можно получить, минимизируя функционал

$$M^{\alpha}[g,u] = \|Ag - u\|^2 + \alpha\Omega[g], \qquad /3/$$

где $\Omega[g]$ - непрерывный неотрицательный функционал, α - "малый" неотрицательный параметр /коэффициент регуляризации/. Устойчивость решения к малым изменениям входных данных достигается введением стабилизирующего функционала $\Omega[g]$. Если положить, например,

$$\Omega[g] = \int_0^{\pi} \sum_{s=0}^{p} Q_s(\theta)\left(\frac{d^s g}{d\theta^s}\right)^2 d\theta,$$

где $Q_s(\theta)$ - неотрицательные функции, решение $g_\alpha(\theta)$, минимизирующее /3/, будет "наиболее гладкой" /до "порядка p"/ функцией, для которой $\|Ag - u\|^2$ не превышает погрешности измерения функции $u(x)$.

3. В качестве одной из реализаций интегрального метода может быть рассмотрен эксперимент на установке Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ "Пион" по измерению дифференциальных сечений упругого рассеяния π -мезонов на ядрах. Детектирующая система установки "Пион" выполнена в виде полого параллелепипеда. Параллелепипед составлен из трех раздельных секций одинаковых размеров /*20x10x10 см* ^{3}/. Съем информации осуществляется с каждой секции независимо, и, таким образом, измерения счета для трех секций при одном положении мишени равнозначны измерению скоростей счета для одной секции в трех различных положениях мишени.

Возможности интегрального метода с применением метода регуляризации Тихонова для восстановления угловых распределений можно оценить математическим моделированием. Основной интересующий нас вопрос - точность восстановления функции распределения $g(\theta)$ в зависимости от точности исходных данных $u(x)$. Процесс моделирования состоит из следующих шагов:

i) задаваясь функцией $g(\theta)$ на сетке по $\theta:\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\}$, численным интегрированием находим точную функцию загрузок $u(x) = \int_0^{\pi} g(\theta)\delta(x,\theta)\,d\theta$ на сетке по $x:\{x_1,x_2,...,x_n\}$;

ii) внесением случайных ошибок ϵ_i в $u(x)$ получаем "экспериментальный" спектр $\tilde{u}(x)$:

$$\tilde{u}(x_i) = u(x_i) + \epsilon_i;$$

iii) с помощью упомянутого выше метода по функции $\tilde{u}(x)$ при определенном численном значении параметра α находим регуляризированное решение $\tilde{g}_\alpha(\theta)$;

iv) вычисляем функцию $\tilde{u}_\alpha(x) = \int_0^\pi \tilde{g}_\alpha(\theta)\,\delta(x,\theta)\,d\theta$;

v) получаем величины уклонения функций $\tilde{u}_\alpha(x)$ и $\tilde{u}(x)$, $\tilde{g}_\alpha(\theta)$ и $g(\theta)$:

$$R_u(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{u}_\alpha(x_i) - \tilde{u}(x_i))^2 ,$$

$$R_g(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{g}_\alpha(\theta_i) - g(\theta_i))^2 .$$

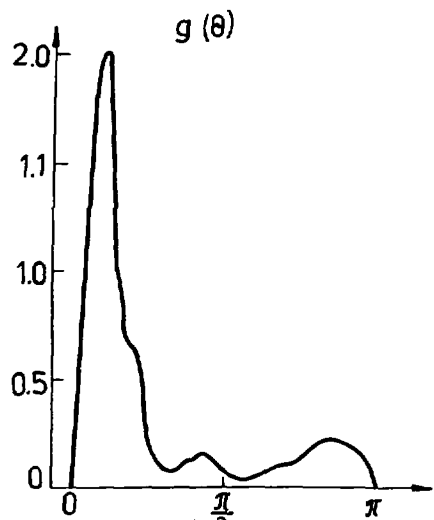

Рис.2. Функция распределения, полученная из экспериментальных данных по упругому рассеянию пионов на углероде [3].

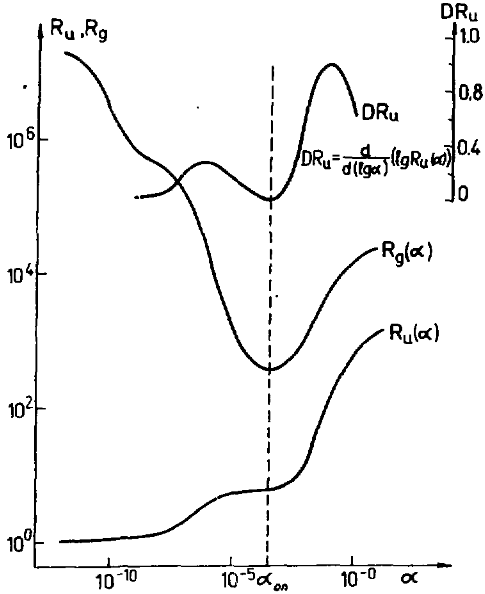

Рис.3. График уклонения R_u *и* R_g *в зависимости от параметра регуляризации* α*; в исходную функцию* $u(x)$ *внесены относительные ошибки /5%/.*

В предположении, что дифференциальные сечения ограничены для углов $\theta=0$ и $\theta=\pi$, находим, что функция угловых распределений удовлетворяет краевым условиям $g(0)=g(\pi)=0$. В качестве пробных и были рассмотрены различные функции, удовлетворяющие таким краевым условиям. На *рис. 2* приведена одна из рассмотренных функций, соответствующая реальному угловому распределению упругого рассеяния пионов на ядре углерода/3/. Ниже приводятся результаты расчета для этого распределения.

Один из важных моментов в методе Тихонова - выбор параметра регуляризации. На *рис. 3* приведены уклонения R_u и R_g в зависимости от α. При $\alpha \approx \alpha_{оп}$ решение, полученное методом регуляризации, будет наиболее близко к исходному. Для нахождения $\alpha_{оп}$ мы имеем на практике в своем распоряжении только $\tilde{u}(x)$, $\tilde{g}_{\alpha}(\theta)$ и $R_u(\alpha)$. В работе /2/ описано несколько способов выбора параметра регуляризации. Проведенные расчеты показали, что для рассматриваемого нами класса функций $\alpha_{оп}$ можно выбирать исходя из характера поведения

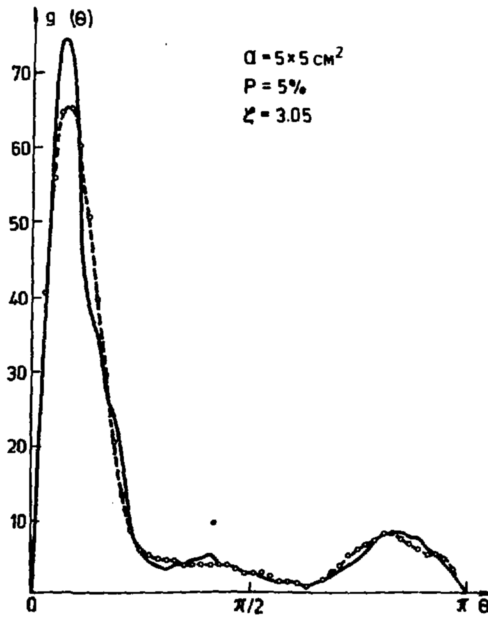

Рис. 4. Пример восстановления углового распределения при внесении в функцию $u(x)$ *одинаковых относительных ошибок.* a - *размер мишени,* P - *величина вносимых возмущений,* $\zeta = \sqrt{R_g/n}$, *где* n - *число узловых точек на сетке по* θ.

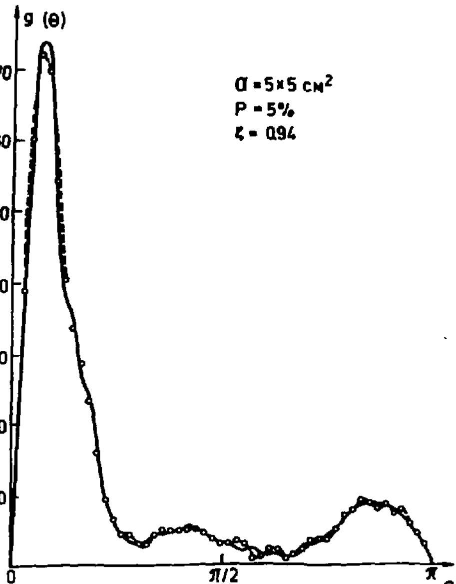

Рис.5. То же, что и на рис. 4, когда в функцию $u(x)$ *вносились одинаковые абсолютные ошибки* $P=\epsilon_n/u(x_n)$.

функции $R_u(a)$ /*рис. 3*, кривая DR_u /. $a_{оп}$ соответствует первому локальному минимуму со стороны больших a для функции $\dfrac{d(\lg R_u(a))}{d(\lg a)}$.

На *рис. 4* приведены результаты восстановления, когда в функцию $u(x)$ вносились одинаковые по величине случайные относительные ошибки. Сплошная линия - пробная функция, точки, соединенные пунктиром, - результаты восстановления. На *рис. 5* представлены результаты восстановления, когда в $u(x)$ вносились одинаковые абсолютные ошибки. Проведенные расчеты сви-

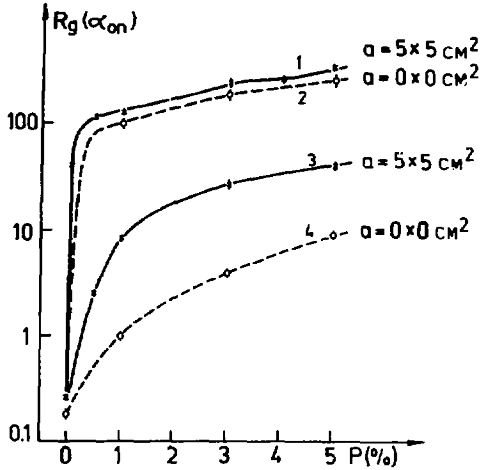

Рис.6. Зависимость точности восстановления от вносимых в функцию $u(x)$ *возмущений. Кривые 1 и 2 отвечают равным относительным ошибкам, кривые 3 и 4 - равным абсолютным ошибкам. Параметры те же, что и на рис. 4 и 5.*

детельствуют об эффективности применения рассмотренного интегрального метода для восстановления угловых распределений на установке "Пион". При 5%-ной статистической точности измерения функции загрузок $u(x)$ можно ожидать, в соответствии с *рис. 5* и *6*, восстановления угловых распределений с точностью 5-10%. Использование мишени меньших размеров и улучшение точности измерения функции загрузок $u(x)$ приводит к улучшению восстановления угловых распределений. На *рис. 6* приведены зависимости точности восстановления от точности исходных данных $u(x)$ для разных размеров мишени. Кривые 1 и 2 соответствуют измерению $u(x)$ с одинаковой относительной точностью на сетке $\{x\}$, кривые 3 и 4 соответствуют измерению с одинаковой абсолютной точностью.

Все вычисления проведены на ЭВМ CDC-6500. Для нахождения приближенного решения уравнения /2/ была составлена фортранная программа, алгоритм которой реализует метод Тихонова. Из библиотечных программ была использована программа решения линейной системы уравнений LINEQ1.

В заключение авторы выражают благодарность Е.П.Жидкову за поддержку, Б.М.Головину и Л.М.Сороко за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н. ДАН СССР, 1963, 151, с. 3.*
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1974.*
3. Edelstein R.M., Barker W.F., Rainwater J. Phys.Rev., 1961, 122,252.

Рукопись поступила в издательский отдел 2 ноября 1978 года.