

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



6/4-78

13 - 11043

B - 191

696/2-78

Б.В.Васильев, В.К.Игнатович, Е.В.Колычева

ЭКРАНИРОВАНИЕ СЛАБЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
СВЕРХПРОВОДЯЩИМИ ОБОЛОЧКАМИ

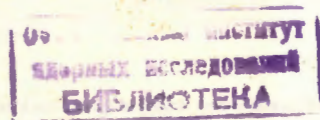
1977

13 - 11043

Б.В.Васильев, В.К.Игнатович, Е.В.Колычева

ЭКРАНИРОВАНИЕ СЛАБЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
СВЕРХПРОВОДЯЩИМИ ОБОЛОЧКАМИ

Направлено в ЖТФ



Васильев Б.В., Игнатович В.К., Колычева Е.В. 13 - 11043

Экранирование слабых магнитных полей сверхпроводящими оболочками

Описан метод расчета распределения магнитного поля в окрестности сверхпроводящих оболочек. В свете проведенных расчетов объясняется аномалия, экспериментально наблюдаемая при измерении, с помощью квантового сверхпроводящего интерферометра, коэффициента экранировки сверхпроводящих свинцовых стаканов, помещенных в однородное аксиальное внешнее магнитное поле.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Vasiliev B.V., Ignatovich V.K., Kolycheva E.V. 13 - 11043

The Shielding of Slow Magnetic Fields by Superconducting Coats

A method for calculating the magnetic field distribution inside and outside superconducting coats is described. In the light of the calculation performed there is explained the experimentally observed anomaly in the measurements using a quantum superconducting interferometer of the coefficient of shielding of superconducting lead glasses in the external homogeneous axial magnetic field.

The investigation has been performed at the Neutron Physics Laboratory, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Проблема экранирования магнитного поля сверхпроводниками имеет не только прикладное значение, но представляет определенный интерес и с точки зрения теории. Решение этой задачи наталкивается на значительные математические трудности, и в большинстве случаев может быть найдено лишь в приближенном виде ^{1/}, причем ошибки приближения не всегда поддаются анализу.

В настоящей работе сформулирован один из возможных методов расчета распределения магнитного поля в окрестности сверхпроводящих оболочек, позволяющий исследовать экранирующие свойства сверхпроводников как простейших, так и более сложных конфигураций. Расчет распределения магнитного поля внутри сверхпроводящего стакана, выполненный здесь в первом приближении, дает возможность объяснить аномалию, экспериментально наблюдаемую при исследовании экранирующих свойств таких оболочек с помощью квантового сверхпроводящего интерферометра /КСИ/^{2/}. Аномалия состоит в том, что на некоторой глубине внутри сверхпроводящего стакана, помещенного во внешнее однородное магнитное поле $H_{0\parallel}$, направленное вдоль его оси,

зависимость коэффициента экранировки $k_{\parallel}(z) / k_{\parallel}(z) = \frac{H_{\parallel}(z)}{H_{0\parallel}}$,

$H_{\parallel}(z)$ - аксиальная составляющая магнитного поля на оси стакана на расстоянии z от его открытого конца/ имеет ярко выраженную особенность ^{3/}.

В первой части работы излагается теория, во второй описывается эксперимент, приводятся его результаты и дается их объяснение.

ТЕОРИЯ

Задача об экранировании магнитного поля сверхпроводниками будет, как обычно, решаться в рамках магнитостатики, поскольку изучаемые экраны имеют толщину стенок, значительно превосходящую глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник, а поведение поля в непосредственной близости к поверхности сверхпроводника в данном случае не представляет интереса. В рамках магнитостатики напряженность магнитного поля можно записать в виде

$$\vec{H} = \text{grad } \Psi, \quad /1/$$

где Ψ - скалярный потенциал, имеющий на границе сверхпроводника нулевую нормальную производную:

$$\frac{d\Psi}{dn} \Big|_S = 0 \quad /2/$$

и удовлетворяющий уравнению Лапласа:

$$\Delta \Psi = 0. \quad /3/$$

Решение уравнения /3/ с граничными условиями /2/ ищется в соответствии с теоремой Грина:

$$\Psi(\vec{R}) = \Psi_0(\vec{R}) + \int [\nabla_n G(\vec{R}, \vec{R}') \Psi(\vec{R}') - G(\vec{R}, \vec{R}') \nabla_n \Psi(\vec{R}')] dS, \quad /4/$$

где интегрирование проводится по некоторой замкнутой поверхности S , а функция Грина $G(\vec{R}, \vec{R}')$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta G(\vec{R}, \vec{R}') = \delta(\vec{R} - \vec{R}') \quad /5/$$

и равна

$$G(\vec{R}, \vec{R}') = - \frac{1}{4\pi |\vec{R} - \vec{R}'|}. \quad /6/$$

Потенциал $\Psi_0(\vec{R})$ соответствует внешнему магнитному полю, невозмущенному наличием сверхпроводника.

Перейдем к рассмотрению конкретной задачи - задачи об экранирующих свойствах сверхпроводящего стакана. Введем цилиндрическую систему координат $\vec{R} = (\vec{r}, z)$, где $z=0$ соответствует открытому концу стакана, а $r=0$ - его оси.

Существенная особенность используемого здесь метода состоит в том, что интегрирование в уравнении /4/ проводится не по всей поверхности сверхпроводника, а только по внешней ее части. Интегрирование по внутренней поверхности заменяется интегрированием по отверстию, на котором поле задается в соответствии с разложением его по собственным функциям внутри стакана.

Рассмотрим отдельно два случая: а/ внешнее поле направлено вдоль оси z : $\Psi_0(\vec{R}) = z$, и б/ внешнее поле перпендикулярно оси стакана: $\Psi_0(\vec{R}) = r \cos \phi$. В обоих случаях стакан имеет внутренний радиус $a=1$, внешний радиус b , глубину ℓ и высоту ℓ' /рис. 1/. Напряженность внешнего магнитного поля предполагается равной 1.

Продольное внешнее поле

Как показано на рис. 1, интересующую нас поверхность интегрирования можно разбить на 4 части. Поскольку внешнее поле не зависит от азимутального угла ϕ , а сверхпроводник имеет цилиндрическую симметрию, то искомое решение и потенциалы Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 и Ψ_4 на соответствующих частях поверхности интегрирования также не зависят от ϕ . Скалярный потенциал внутри стакана может быть представлен в виде

$$\Psi_{\text{внутр.}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n J_0(p_n r) \text{ch}[p_n(z+\ell)]}{\sqrt{p_n} J_0(p_n) \sqrt{\text{ch}(p_n \ell) \text{sh}(p_n \ell')}} \quad /7/$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя, l - глубина стакана, ось которого расположена вдоль z , а собственные числа p_n определяются условием

$$J_1(p_n) = 0, \quad /8/$$

вытекающим из /2/. Представим элемент поверхности dS в виде $ds d\phi$, а функцию Грина запишем следующим образом:

$$G(\vec{R}, \vec{R}') = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} J_m(\nu r) J_m(\nu r') e^{-\nu|z-z'|} d\nu \cos m\phi, \quad /9/$$

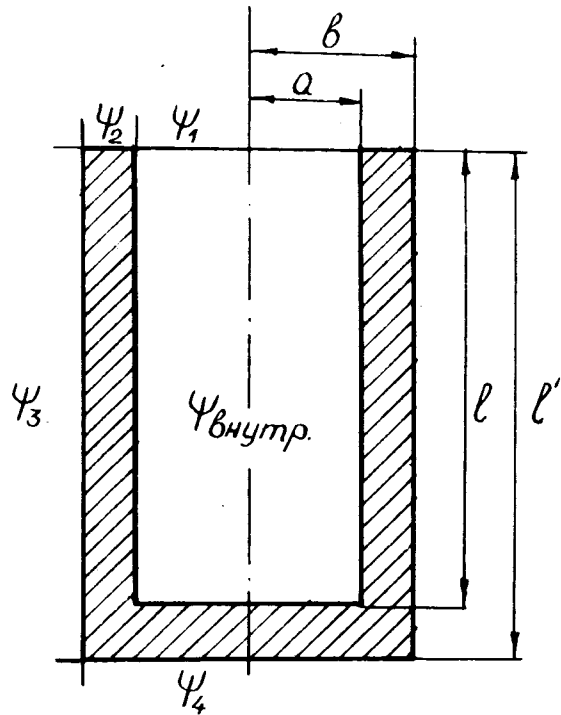


Рис. 1. Разбиение поверхности интегрирования для расчета потенциалов Ψ_i по теореме Грина.

где $J_m(x)$ - функция Бесселя, ϕ - угол между векторами \vec{r} и \vec{r}' , а штрих у знака суммы означает, что член с $m=0$ необходимо брать с коэффициентом $1/2$. Обозначим

$$g(r, r', z) = -\int_0^{2\pi} G(\vec{R}, \vec{R}') d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} J_0(\nu r) J_0(\nu r') e^{-\nu|z-z'|} d\nu. \quad /10/$$

Тогда для функции Ψ_1 на верхнем отверстии стакана получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Psi_1(r) = & -\int_0^1 g(r, r', 0) \frac{d\Psi_{\text{внутр}}(r', z')}{dz'} \Big|_{z'=0} r' dr' + \\ & + \int_{-\ell'}^0 \frac{d}{dr'} g(r, r', z) \Big|_{r=b} \Psi_3(b, z) b dz - \\ & - \int_0^b \frac{d}{dz} g(r, r', z) \Big|_{z=-\ell'} \Psi_4(r', -\ell') r' dr'. \end{aligned} \quad /11/$$

Аналогичные уравнения можно записать и для других функций Ψ_i .

Перейдем теперь от интегрального уравнения для Ψ_1 к алгебраическому уравнению для коэффициентов разложения /7/ C_n . Воспользовавшись условием нормировки

$$\int_0^1 J_0^2(p_n r) r dr = \frac{J_0^2(p_n)}{2} \quad /12/$$

и интегральным соотношением для функций Бесселя

$$\int_0^1 J_0(p_n r) J_0(\nu r) r dr = \frac{\nu J_0(p_n) J_1(\nu)}{\nu^2 - p_n^2}, \quad /13/$$

получим для C_n следующую систему уравнений:

$$C_n = -\sum_{m=1}^{\infty} C_m Q_{mn} - D_n, \quad /14/$$

где Q_{mn} - симметричная матрица:

$$Q_{mn} = \sqrt{p_n p_m} \frac{\text{th}(p_n \ell) \text{th}(p_m \ell)}{\text{th}(p_n \ell) \text{th}(p_m \ell)} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(\nu) \nu^2 d\nu}{(\nu^2 - p_n^2)(\nu^2 - p_m^2)}, \quad /15/$$

а D_n можно разбить на два слагаемых $D_n = D_{n3} + D_{n4}$, одно из которых выражается через интеграл от функции Ψ_3 , а другое - от функции Ψ_4 :

$$D_{n3} = \sqrt{p_n \operatorname{th}(p_n \ell)} b \int_0^\infty \frac{J_1(\nu) J_1(\nu b) \nu^2}{\nu^2 - p_n^2} \times \\ \times \int_{-\ell'}^0 e^{\nu z} \Psi_3(b, z) dz d\nu, \\ D_{n4} = \sqrt{p_n \operatorname{th}(p_n \ell)} \int_0^\infty \frac{J_1(\nu) J_0(\nu b) \nu^2}{\nu^2 - p_n^2} \times \\ \times \int_0^1 \Psi_4(r, -\ell') r dr e^{-\nu \ell'} d\nu. \quad /16/$$

Если предположить, что высота стакана $\ell' \gg 1$, то членом D_{n4} можно пренебречь, поскольку с ростом ℓ' он убывает как $(\ell')^{-4}$, а для $\Psi_3(b, z)$ в выражении /16/ - взять приближенное решения уравнения

$$\Psi_3(b, z) = z + \int_0^1 \nabla_n \Psi_1(r) g(r, b, z) r dr - \\ - \int_{S_i} \Psi_i(r_i) \nabla_{ni} g(b, r_i, z) ds_i. \quad /17/$$

В случае бесконечного цилиндра уравнение для $\Psi_3(b, z)$ имело бы точное решение $\Psi_3(b, z) = z$. Воспользовавшись им, получим:

$$D_n = - \sqrt{p_n \operatorname{th}(p_n \ell)} b \int_0^\infty \frac{J_1(\nu) J_1(\nu b)}{\nu^2 - p_n^2} d\nu. \quad /18/$$

Если распределение магнитного поля ищется достаточно глубоко внутри стакана, то при суммировании ряда /7/ можно ограничиться первым членом и решать систему /14/ в простейшем приближении, т.е. положив $C_n = 0$ для

$n > 1$. Проведя численные расчеты, получим для тонкостенного экрана ($b \approx 1$):

$$Q_{11} \approx 0.460, \quad D_1 \approx -0.087 \quad /19/$$

и

$$C_1 \approx \frac{-D_1}{1 + Q_{11}} \approx 0.060. \quad /20/$$

Для точек, лежащих вдали от дна стакана ($(\ell + z)p_1 > 1$), в разложении /7/ можно положить

$$\operatorname{ch}[p_n(z + \ell)] \approx \frac{1}{2} \exp[p_n(z + \ell)], \\ \operatorname{ch}(p_n \ell) \approx \operatorname{sh}(p_n \ell) \approx \frac{1}{2} \exp(p_n \ell).$$

Тогда для напряженности магнитного поля вдали от открытого конца экрана, где при суммировании ряда /7/ можно ограничиться первым членом, получим приближенное выражение:

$$\vec{H} \approx \vec{\nabla} \left[\frac{C_1}{\sqrt{p_1} J_0(p_1)} J_0(p_1 r) e^{-p_1 |z|} \right], \quad p_1 \approx 3.83. \quad /21/$$

Заметим, что на оси стакана магнитное поле \vec{H} имеет только z -ую компоненту

$$H_z \approx 0.29 e^{-p_1 |z|} \quad /22/$$

и с ростом z монотонно убывает.

Поперечное внешнее поле

В случае, когда $\Psi_0(\vec{r}, z) = r \cos \phi$, полный потенциал Ψ можно искать в виде

$$\Psi(\vec{r}, z) = \tilde{\Psi}(r, z) \cos \phi. \quad /23/$$

Положив $dS = ds d\phi'$ и проведя соответствующее интегрирование по ϕ' и усреднение по ϕ функции Грина $G(\vec{R}, \vec{R}')$, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(r, r', z) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\vec{R}, \vec{R}') \cos \phi' d\phi' \cos \phi d\phi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} J_1(\nu r) J_1(\nu r') e^{-\nu|z-z'|} d\nu. \end{aligned} \quad /24/$$

Уравнение для $\tilde{\Psi}_1$ будет иметь вид, формально совпадающий с /11/, но разложение для $\tilde{\Psi}_{\text{внутр.}}(r, z)$ теперь следует взять в несколько иной форме:

$$\tilde{\Psi}_{\text{внутр.}}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{C}_n J_1(p_n r) \text{ch}[p_n(z+\ell)]}{\sqrt{p_n} J_1(p_n) \sqrt{\text{ch}(p_n \ell) \text{sh}(p_n \ell)}}, \quad /25/$$

где собственные числа p_n определяются уравнением

$$J_1'(p_n) = J_0(p_n) - \frac{1}{p_n} J_1(p_n) = 0. \quad /26/$$

Используя соотношение нормировки для J_1 , аналогичное /12/, и интегральное соотношение

$$\int_0^1 J_1(p_n r) J_1(\nu r) r dr = -\frac{\nu J_1(p_n) J_1'(\nu)}{\nu^2 - p_n^2}, \quad /27/$$

получим для коэффициентов \tilde{C}_n систему уравнений, аналогичную /14/, где

$$\tilde{Q}_{mn} = \frac{1}{\sqrt{p_n p_m} \text{th}(p_n \ell) \text{th}(p_m \ell)} \int_0^{\infty} \frac{[J_1'(\nu)]^2 \nu^2 d\nu}{(\nu^2 - p_n^2)(\nu^2 - p_m^2)}. \quad /28/$$

а \tilde{D}_n , в пренебрежении вкладом $\tilde{\Psi}_4$, может быть записано в виде

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{\sqrt{p_n} \text{th}(p_n \ell) b} \int_0^{\infty} \frac{J_1(\nu) J_1'(\nu b) \nu}{p_n^2 - \nu^2} \int_{-\ell}^0 e^{\nu z} \Psi_3(b, z) dz d\nu. \quad /29/$$

Для аппроксимации $\Psi_3(b, z)$ воспользуемся решением для случая бесконечно длинного цилиндра во внешнем поперечном магнитном поле:

$$\Psi(r, z) = r \cos \phi + b^2 \frac{\cos \phi}{r}. \quad /30/$$

Это решение показывает, что для длинного цилиндра можно положить $\Psi_3(b, z) \approx 2b$. Ограничившись, как и прежде, первым членом разложения /25/ и проведя численные расчеты, получим:

$$\tilde{Q}_{11} \approx 0,229, \quad \tilde{D}_1 \approx -0,393, \quad \tilde{C}_1 \approx \frac{-\tilde{D}_1}{1 + \tilde{Q}_{11}} \approx 0,320. \quad /31/$$

При $p_1|z| > 1$ и $p_1(\ell - |z|) > 1$ из /25/ получаем следующее выражение для напряженности магнитного поля внутри стакана:

$$\vec{H} \approx \vec{V} \left[\frac{C_1}{\sqrt{p_1} J_1(p_1)} J_1(p_1 r) e^{-p_1|z|} \cos \phi \right], \quad p_1 \approx 1,84. \quad /32/$$

Заметим, что на оси стакана магнитное поле имеет только поперечную компоненту

$$H_r \approx 0,69 e^{-1,84|z|} \cos \phi, \quad /33/$$

монотонно убывающую с увеличением $|z|$.

ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментально определялся коэффициент экранировки на оси сверхпроводящих экранов, выточенных из технического свинца. Экраны имели форму стаканов, толщина стенок которых была ~ 1 мм, а отношение длина/диаметр менялось от опыта к опыту и было не менее 4.

В эксперименте цилиндрический экран помещался в гелиевый криостат. Однородное магнитное поле ($\frac{\Delta H}{H} \sim 10^{-4}$) создавалось в области вблизи экрана с помощью

калиброванных колец Гельмгольца /-1 Э/А/, расположенных вне криостата. В качестве измерительного прибора использовался КСИ с двухиндуктивным датчиком типа датчика Циммермана^{14/} и сверхпроводящим трансформатором магнитного потока. Первичная катушка трансформатора помещалась на оси экрана так, что ее ось была параллельна направлению внешнего магнитного поля, а вторичная - в одном из отверстий датчика КСИ. Датчик, имеющий коэффициент экранировки $\sim 10^{-3}$, располагался в глубине экрана, так что влиянием непосредственно на него изменения магнитного поля в экране можно было пренебречь. Коэффициент экранировки определялся как отношение тока в цепи колец Гельмгольца, соответствующего изменению показаний КСИ на $|\Delta\Phi|$ /знак изменения показаний КСИ не учитывался/, в отсутствие экрана, к той же величине, измеренной в экране на глубине z .

Полученные зависимости $k_{\perp}(z)$ для случая однородного внешнего магнитного поля, направленного перпендикулярно оси стакана, хорошо согласуются с расчетами. В случае продольного внешнего магнитного поля зависимость $k_{\parallel}(z)$ имеет характерную особенность /рис. 2/ и может быть описана выражением /22/ лишь в области $z_0 < z < 0$. Заметим, что вблизи $z = z_0$ величина $k_{\parallel}(z)$ практически обращается в нуль. Дальнейшее поведение зависимости $k_{\parallel}(z)$ ($z \ll z_0$) соответствует случаю поперечного внешнего магнитного поля. Это расхождение экспериментальных данных с предсказаниями теории можно объяснить непараллельностью внешнего магнитного поля, оси измерительной катушки и оси сверхпроводящего экрана.

Пусть α - угол наклона первичной катушки трансформатора к оси экрана, β - угол наклона оси колец Гельмгольца к оси экрана, тогда регистрируемый в эксперименте магнитный поток равен

$$\Delta\Phi = S_T H_0 \left(0,29 e^{3,83 z/a} \cos \alpha \cos \beta + 0,69 e^{1,84 z/a} \cos \phi \sin \alpha \sin \beta \right),$$

/34/

где ϕ - угол между направлением поперечной составляющей внешнего магнитного поля и проекцией оси

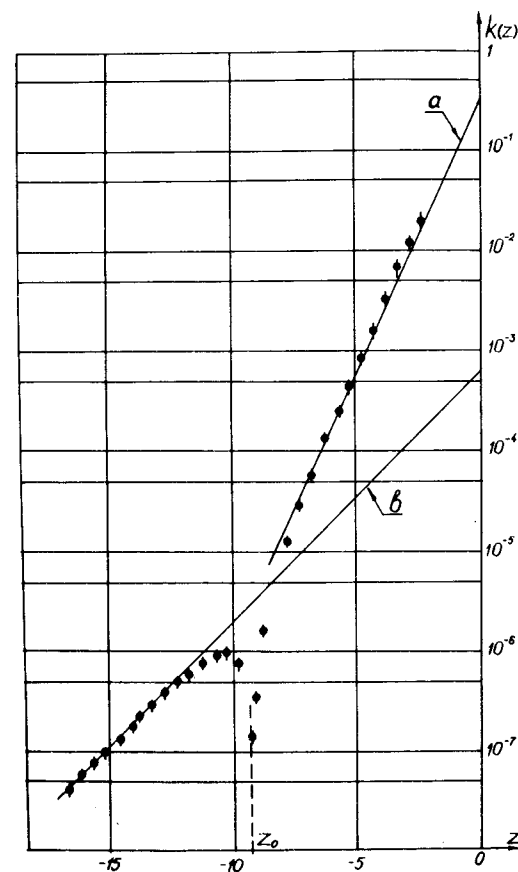


Рис. 2. Зависимость коэффициента экранировки $k_{\perp}(z)$ на оси сверхпроводящего цилиндрического экрана глубиной $l = 40$ см и внутренним радиусом $a = 3$ см, полученная с помощью КСИ. Толщина стенки экрана - 1 мм. По горизонтальной оси - координата z центра первичной катушки сверхпроводящего трансформатора потока, помещенной на оси экрана / $z = 0$ соответствует открытому концу экрана/. Для сравнения с экспериментальными точками сплошными линиями даны графики функций: а/ $k_{\parallel}(z) = 0,29 e^{3,83 z/a}$ б/ $k_{\perp}(z) = A \cdot 0,69 e^{1,84 z/a}$, где $A = \sin \alpha \sin \beta \cos \phi$ характеризует степень несоосности системы.

первичной катушки трансформатора на горизонтальную плоскость. При $\phi = 90^\circ$ величина $\Delta\Phi$ не обращается в нуль при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Однако, при малых отклонениях ϕ от этого значения $\Delta\Phi$, а следовательно, и коэффициент экранировки $k_{||}(z)$ может обращаться в нуль при некоторых значениях z , α и β . Пусть $\phi = 90^\circ + \Delta\phi$, $\Delta\phi \approx \alpha \approx \beta$, тогда, зная величину z_0 , при которой коэффициент экранировки обращается в нуль /рис. 2/, можно оценить величину углов разбаланса α , β и $\Delta\phi$

$$(\sin \alpha)^3 \approx \alpha^3 \approx \frac{0,29}{0,69} e^{(3,83-1,84)z_0/a} \quad /35/$$

В нашем случае ($|z_0| \approx 9$ см, $a = 3$ см) это дает $\alpha \approx \beta \approx \Delta\phi \approx 5^\circ$, что вполне допускается условиями эксперимента.

При $z > z_0$ основной вклад в величину $\Delta\Phi$ /34/ вносит первое слагаемое. Поведение зависимости $k_{||}(z)$ будет соответствовать случаю $\alpha = \beta = 0$, т.е. идеальной соосности системы. При $z < z_0$ величина $\Delta\Phi$ будет определяться вторым слагаемым в /34/, т.е. поперечной составляющей магнитного поля на оси экрана, затухающей медленнее, чем аксиальная составляющая. Соответствующим образом изменится и поведение зависимости $k_{||}(z)$.

Проведенные исследования показывают, что при расчете цилиндрических сверхпроводящих экранов в первую очередь необходимо учитывать наиболее проникающую поперечную составляющую внешнего магнитного поля.

Хорошее согласие экспериментальных данных с результатами расчетов и естественное объяснение в свете этих расчетов наблюдаемых аномалий указывает на возможность применения описанного метода расчета и для экранов более сложной конфигурации, например, таких, как изображенный на рис. 3. Горловина 1 здесь служит хорошим экспоненциальным фильтром, что позволяет получить дополнительное ослабление магнитного поля. Такие экраны могут быть изготовлены из свинцовой фольги или сделаны сборными. Опыт показал, что экраны из фольги работают лучше, чем сборные с соединением на резьбе или на пайке, и позволяют получить при

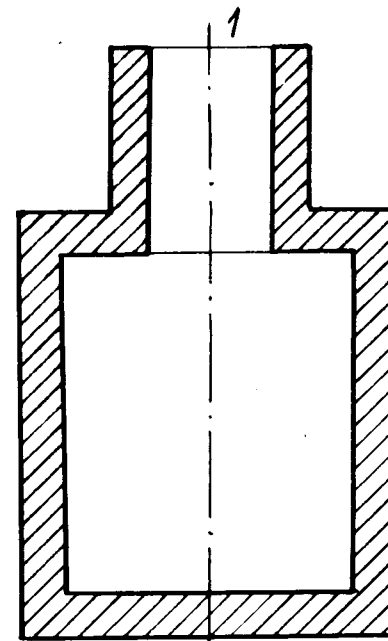


Рис. 3. Сверхпроводящий цилиндрический экран с узкой горловиной.

длине экрана ~ 15 см, радиусе $\sim 1,3$ см, длина горловины ~ 3 см и ее радиусе $\sim 0,6$ см ослабление внешних магнитных полей не хуже, чем в 10^8 раз на расстоянии ~ 3 см от дна экрана.

Авторы приносят благодарность Н.В.Петрову за помощь в проведении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондаренко С.Н. и др. ЖТФ, 1974, XLIV, в.6, с.1312.
2. Васильев Б.В., Иваненко А.И., Трофимов В.Н. Радиотехника и электроника, 1975, т. XX, №6, с.1255-1263.
3. Васильев Б.В., Данилов В.В., Лухарев К.К. ОИЯИ, P13-8233, Дубна, 1974.
4. J.E.Zimmerman, P.Thiene, J.Harding. J.Appl.Phys., 1970, v.41, 1572.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1977 года.