

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



2811/2-77

25/vii-77
13 - 10571

Е.Н.Кладницкая, В.С.Кладницкий

СИММЕТРИЧНАЯ СИСТЕМА
ИЗ ЧЕТЫРЕХ ИДЕНТИЧНЫХ
КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

1977

13 - 10571

Е.Н.Кладницкая, В.С.Кладницкий

**СИММЕТРИЧНАЯ СИСТЕМА
ИЗ ЧЕТЫРЕХ ИДЕНТИЧНЫХ
КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ**

Симметричная система из четырех идентичных квадрупольных линз

Исследована симметричная оптическая система из четырех квадрупольных линз одинаковой длины, имеющих равные возбуждения. Для анализа ее оптических свойств использован матричный формализм. Показано, что такая система может создать: а) действительные изображения в обеих плоскостях одновременно; б) стигматическое изображение; в) стигматическое изображение, равное по величине предмету. При заданном возбуждении расстояние между парами линз и расстояние до предмета нельзя задать произвольно. Однако для каждого из вариантов систем эти параметры можно выбирать в широкой области их значений, что позволяет использовать систему в оптике пучков заряженных частиц. Возможность питания электромагнитных линз от общего источника тока является ее существенным экономическим преимуществом.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

ВВЕДЕНИЕ

Для транспортировки пучков заряженных частиц нередко применяются системы из большого числа квадрупольных линз. В таких случаях экономические соображения становятся особенно важными. Так, например, если все линзы имеют одинаковые возбуждения, для их питания можно использовать один мощный источник тока. Его стоимость оказывается существенно ниже суммарной стоимости отдельных источников питания для каждой линзы. Снижаются также и эксплуатационные расходы.

Рассмотрим систему из четырех квадрупольных линз одинаковой эффективной длины L , имеющих возбуждение

$$\theta = L \sqrt{\frac{G}{BR}},$$

где G - градиент магнитного поля, а BR - магнитная жесткость фокусируемых частиц. Первая пара линз образует антисимметричный дублет ^{1,2/}. Такой же дублет, но с обратным порядком чередования линз, составляет вторая пара. Расстояние d между линзами в каждой паре одинаково. Дублеты разделены свободным от поля участком длиной Λ .

Используем для анализа оптических свойств системы матричный формализм /1/. Полную матрицу системы в плоскости cddc представим в виде:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda a_{21} a_{22} + 2a_{11} a_{22} - 1 & \Lambda a_{22}^2 + 2a_{12} a_{22} \\ \Lambda a_{21}^2 + 2a_{11} a_{21} & \Lambda a_{21} a_{22} + 2a_{11} a_{22} - 1 \end{bmatrix} \quad /1/$$

а полную матрицу в плоскости dccd - в виде:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda a_{21} a_{11} + 2a_{11} a_{22} - 1 & \Lambda a_{11}^2 + 2a_{12} a_{11} \\ \Lambda a_{21}^2 + 2a_{22} a_{21} & \Lambda a_{21} a_{11} + 2a_{11} a_{22} - 1 \end{bmatrix} \quad /2/$$

где a_{ij} - матричные элементы антисимметричного дублета. Поскольку система линз симметрична относительно средней точки, мы имеем $P_{11} = P_{22}$ и $P_{12} = P_{21}$.

В дальнейшем будем полагать, что $0 < \theta < \pi/2$ и что расстояние p от входа системы до предмета в обеих плоскостях одинаково и положительно, т.е. предмет действителен. Все расстояния в формулах и на рисунках будем выражать в единицах L .

Цель данной работы - найти для заданного возбуждения θ такие значения Λ и p , при которых система создает: а/ действительные изображения одновременно в обеих плоскостях; б/ стигматичное изображение; в/ стигматичное изображение, равное по величине предмету.

1. СИСТЕМА, СОБИРАЮЩАЯ ПУЧОК В ОБЕИХ ПЛОСКОСТЯХ

Расстояние от выхода системы линз до изображения

$$q = F \frac{p - C}{p - F}, \quad /3/$$

где F - расстояние от границы системы до фокальной плоскости, а C - такое положение предмета относительно входа системы, при котором $q=0$. Действительное изображение ($q>0$) не может быть получено для произвольно взятого p . Ограничения, налагаемые на расстояние p , зависят от знаков F и C . Положим для определенности $F>C$. Из формулы /3/ находим:

а/ в случае $F>0, C>0$ p может принимать значения $0<p<C$ и $F<p<\infty$. Когда p меняется от нуля до C , q варьирует от C до нуля. Когда p принимает значения от F до ∞ , величина q меняется от ∞ до F ;

б/ в случае $F>0, C<0$ допустимы значения $F<p<\infty$;

в/ в случае $F<0, C>0$ допустимы значения $0<p<C$;

г/ в случае $F<0, C<0$ невозможно получить действительное изображение.

Следуя работе /3/, выразим F и C в плоскости $cdcc$ через матричные элементы: $F_{cdcc} = -\frac{P_{11}}{P_{21}}$ и $C_{cdcc} = \frac{P_{12}}{P_{11}}$.

Аналогичные формулы с заменой P на R справедливы в плоскости $dcdd$.

Каждый матричный элемент системы является функцией возбуждения θ и расстояния Λ . Величину d мы считаем заданной. Из соотношений /1/ и /2/ нетрудно найти Λ , при котором данный элемент проходит через нуль. Так, в плоскости $cdcc$ получим для P_{11}

$$\Lambda_{c11} = \frac{1 - 2a_{11}a_{22}}{a_{22}a_{21}} = \frac{90 - (900 - 77\theta^4)\theta^4}{25(6 + 12\theta^2 - 3\theta^4)\theta^4} \quad /4/$$

и для P_{21}

$$\Lambda_{c21} = -\frac{2a_{11}}{a_{21}} = \frac{90 - 180\theta^2 - 45\theta^4 + 4\theta^6}{75\theta^4} \quad /5/$$

Матричный элемент $R_{12} > 0$ для любого Λ . В плоскости $dccc$ матричные элементы R_{11} , R_{12} и R_{22} поочередно проходят через нуль, когда Λ принимает соответственно значения:

$$\Lambda_{d11} = \frac{1 - 2a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{21}} = \frac{90 - (900 - 770^4)\theta^4}{25(6 - 120^2 - 30^4)\theta^4}; \quad /6/$$

$$\Lambda_{d12} = \frac{2(1 - a_{11}a_{22})}{a_{11}a_{21}} = \frac{420^4 - 540}{90 - 1800^2 - 450^4 - 40^6}; \quad /7/$$

$$\Lambda_{d21} = \frac{2a_{22}}{a_{21}} = \frac{14}{\theta^4} \frac{90 + 1800^2 - 450^4 - 40^6}{1050 - 90^4}. \quad /8/$$

В правой части этих выражений матричные элементы дублета разложены по степеням θ при $d=1$.

Зависимости Λ от θ , определяемые соотношениями /4/-/8/, представлены на *рис. 1*. Точки θ_0 и θ_1 делят рассматриваемую область возбуждений на три интервала. Значение θ_0 находим из уравнения $a_{11}=0$, а значение θ_1 получаем из уравнения $2a_{11}a_{22}=1$. Если $d=1$, то имеем $\theta_0=0,672$ и $\theta_1=0,562$.

Заметим, что приведенное выше приближенное выражение для Λ_{d11} справедливо, если $\theta < 1$, а в случае $\theta > 1$ приближенная формула оказывается более громоздкой.

Воспользуемся теперь результатами анализа формулы /3/, чтобы найти области допустимых значений p и Λ для разных интервалов возбуждения. Зависимости F и C от Λ при постоянном θ рассчитаны на ЭВМ.

Пусть $0 < \theta < \theta_1$. График $F_{cddc}(\Lambda)$ на *рис. 2a* имеет две положительные ветви. Первая из них в точке с координатой Λ_{c11} пересекает ось абсцисс. Прямая $\Lambda = \Lambda_{c21}$ служит асимптотой второй ветви. У графика $C_{cddc}(\Lambda)$ только одна положительная ветвь, асимптотой которой является прямая $\Lambda = \Lambda_{c11}$. Из сказанного нетрудно понять, что в плоскости $cddc$ имеется две области допустимых значений p : одна из них заключена между кривыми $F(\Lambda)$, $C(\Lambda)$ и осью абсцисс, а вторая ограничена только

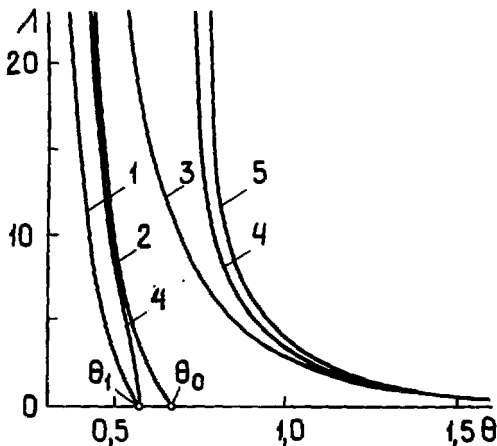


Рис. 1. Зависимость расстояния Λ , при котором матричный элемент проходит через нуль, от возбуждения линз: 1 - Λ_{c11} ; 2 - Λ_{c21} ; 3 - Λ_{d21} ; 4 - Λ_{d11} ; 5 - Λ_{d12} .

снизу второй ветвью графика $F(\Lambda)$. Обозначим их соответственно I и II. Область I существует при любом Λ , а область II - только при $\Lambda > \Lambda_{c21}$.

В плоскости $dccd$ зависимости F и S от Λ имеют аналогичный вид. Однако области I или II, принадлежащие разным плоскостям, перекрываются только частично. Чтобы получить действительные изображения в обеих плоскостях одновременно, следует взять p в общей части областей I или II, заштрихованной на рисунке. Общий участок области II можно использовать, если $\Lambda > \Lambda_{d21}$. При этом узкий интервал значений p , заключенный между графиками F_{eddc} и S_{eddc} , является запрещенным.

Пусть $\theta_1 \leq \theta < \theta_0$. В каждой плоскости график $F(\Lambda)$ сохраняет только ту ветвь, которая служит границей области II. Поэтому область I заключена между кривой $S(\Lambda)$ и осями координат (рис. 2б). Участок

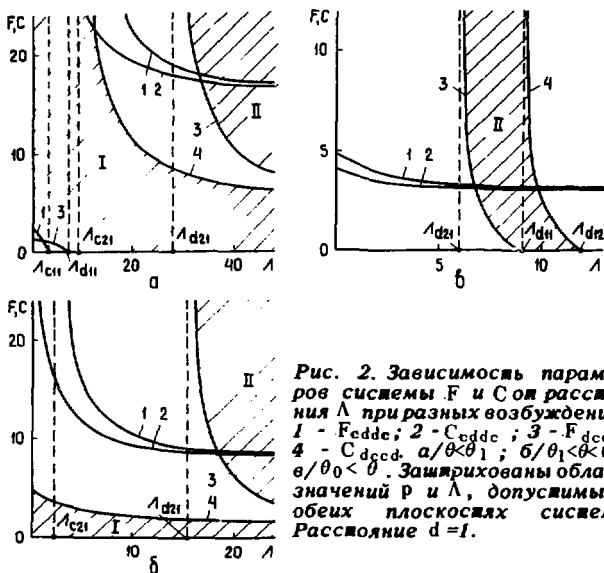


Рис. 2. Зависимость параметров системы F и C от расстояния Λ при разных возбуждениях: 1 - F_{edde} ; 2 - C_{edde} ; 3 - F_{dced} ; 4 - C_{dced} . $a/\theta < \theta_1$; б/ $b/\theta_1 < b < \theta_0$; в/ $b/\theta_0 < b$. Заштрихованы области значений ρ и Λ , допустимых в обеих плоскостях системы. Расстояние $d=1$.

области I, общий для обеих плоскостей, ограничен сверху кривой C_{dced} . Общая часть области II ограничена снизу кривой F_{dced} .

Пусть $\theta = \theta_0$. Области I в плоскости $dced$ не существует, так как $C_{dced} = 0$ при любом Λ . Следовательно, получить сходящийся пучок можно лишь при условии, что $\Lambda > \Lambda_{dz1}$ и ρ выбрано в общей части области II.

Пусть $\theta_0 < \theta < \pi/2$. Области I в плоскости $dced$ нет, поскольку при любом значении Λ $C_{dced} < 0$. Из рис. 1 видно, что по мере роста Λ матричные элементы проходят через нуль в такой последовательности: R_{21} , R_{11} , R_{12} . В соответствии с этим кривые $F_{dced}(\Lambda)$ и $C_{dced}(\Lambda)$ поочередно пересекают ось абсцисс в точках Λ_{d11} и Λ_{d12} и охватывают область II с обеих сторон /рис. 2в/. Нетрудно

убедиться, что с ростом возбуждения от θ_0 до $\pi/2$ область II в плоскости $dccd$ становится все более узкой и смещается на рисунке к началу координат. Для получения сходящегося пучка необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\Lambda_{d21} < \Lambda < \Lambda_{d12}$.

2. СИСТЕМА, СОЗДАЮЩАЯ СТИГМАТИЧНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Назовем плоскость $cdkc$ первой, а плоскость $dccd$ второй плоскостью системы. Присвоим оптическим параметрам в этих плоскостях индексы 1 и 2. Будем считать, что расстояния до изображений q_1 и q_2 одинаковы и равны некоторому q . Используя формулу /3/, найдем расстояния до предмета в каждой из плоскостей:

$$p_1 = F_1 \frac{q - C_1}{q - F_1} \quad \text{и} \quad p_2 = F_2 \frac{q - C_2}{q - F_2}.$$

Приравняв эти выражения, получим уравнение

$$(F_1 - F_2)q^2 + (F_2 C_2 - F_1 C_1)q + F_1 F_2 (C_1 - C_2) = 0 \quad /9/$$

для определения q . Благодаря симметрии оптической системы уравнение для p совпадает по виду с /9/.

При заданных θ и Λ коэффициенты в /9/ принимают определенные численные значения. Допустим, что получившееся квадратное уравнение имеет два положительных решения q_a и q_b . Эти же решения удовлетворяют уравнению для p , причем в случае $p = q_a$ расстояние до изображения $q = q_b$, и, наоборот, $p = q_b$ отвечает $q = q_a$. Таким образом, стигматичное изображение может быть создано при двух различных положениях предмета. Если же решения q_a и q_b совпадают, стигматичное изображение можно получить только для одного положения предмета $p = q$.

Очевидно, что Λ должно быть выбрано среди значений, допустимых для собирающей системы. Поскольку оптическая сила системы при $\theta = \text{const}$ пропорциональна расстоянию Λ между дублетами, подстановка в /9/

$q = 0$ дает соотношение для определения максимального расстояния: $C_1 = C_2$. Подстановка $q = \infty$ приводит к соотношению для нахождения минимального расстояния: $F_1 = F_2$.

Запишем эти соотношения в виде

$$P_{11} R_{12} - P_{12} R_{11} = 0$$

и

$$P_{11} R_{21} - P_{21} R_{11} = 0.$$

Воспользовавшись выражениями /1/ и /2/ для матричных элементов системы, имеем окончательно

$$a_{21}^2 \Lambda_{\max}^2 + \nu a_{21} (2\alpha - 1) \Lambda_{\max} + 2(2\alpha - 1)(\alpha - 1) = 0, \quad /10/$$

$$a_{21}^2 \Lambda_{\min}^2 + 2\nu a_{21} \Lambda_{\min} + 2(2\alpha - 1) = 0. \quad /11/$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения $\alpha = a_{11} a_{22}$ и $\nu = a_{11} a_{22}$. Разложив матричные элементы дублета по степеням θ , найдем в случае $d=1$ следующие приближенные формулы:

$$a_{21} = -\frac{5}{3} \theta^4 + \frac{1}{70} \theta^8;$$

$$\alpha = 1 - 5\theta^4 + \frac{77}{180} \theta^8;$$

$$\nu = 2 - \theta^4,$$

которые позволяют вычислить коэффициенты уравнений /10/ и /11/.

На рис.3 представлены зависимости Λ_{\max} и Λ_{\min} от θ , определяемые этими уравнениями. Построенные кривые ограничивают две области допустимых Λ . Если в общем случае собирающей системы Λ может быть задано произвольно при $\theta < \theta_0$, то в стигматичной системе выбор Λ ограничен при любом возбуждения линз.

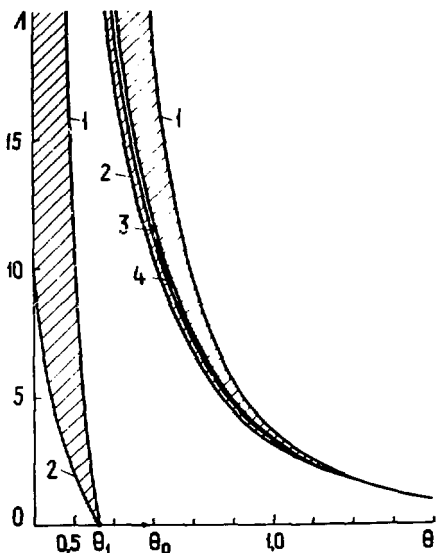


Рис. 3. Области Λ , допустимые для стигматичной системы с $d=1$. 1 - Λ_{\max} ; 2 - Λ_{\min} ; 3 и 4 - граничные кривые, определяемые соответственно формулами /21/ и /23/.

Вернемся теперь к графикам на рис. 2. Здесь Λ_{\min} - абсцисса точки пересечения графиков F_1 и F_2 , а Λ_{\max} - абсцисса точки пересечения графиков C_1 и C_2 . Ординаты этих точек обозначим F_0 и C_0 . Начнем с рис. 2в, на котором $F_0 > C_0$. Здесь область II разделена запрещенным для p интервалом на две изолированные подобласти. Как было показано выше, система создает реальные изображения, если в нижней подобласти p меняется в пределах $0 < p < C_0$, а в верхней - в пределах $F_0 < p < \infty$. Расстояния до изображений в этих случаях принимают соответственно значения $C_0 > q > 0$ и $\infty > q > F_0$. Поскольку в нижней подобласти оба граничные значения $q=0$ и $q=C_0$ отвечают одному и тому же $\Lambda = \Lambda_{\max}$, разумно предположить, что при некотором Λ кривая $q(\Lambda)$ меняет направление /рис. 4/.

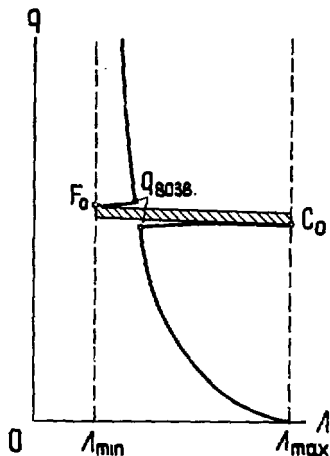


Рис. 4. Зависимость положения стигматического изображения от расстояния λ при $\theta > \theta_0$ и $d=1$.

В этой точке возврата оба решения q_a и q_b уравнения /9/ совпадают. Следовательно, здесь $q_{\text{возв}} = p_{\text{возв}}$. Когда p меняется от 0 до $q_{\text{возв}}$, q варьирует от C_0 до $q_{\text{возв}}$ и наоборот. Рассуждая аналогичным образом, следует предположить существование точки возврата и в верхней подобласти. Покажем, что таких точек всего две.

Пусть в каждой плоскости предмет и его изображение располагаются на одинаковом расстоянии от границ системы ($p_1 = q_1, p_2 = q_2$). Выразим в соотношении /3/ F и C через матричные элементы системы. Тогда это соотношение запишется для первой и второй плоскостей соответственно в виде

$$P_{21}q_1^2 + 2P_{11}q_1 + P_{12} = 0 \quad /12/$$

и

$$R_{21}q_2^2 + 2R_{11}q_2 + R_{12} = 0. \quad /13/$$

С учетом того, что детерминанты матриц /1/ и /2/ равны единице, находим решения этих уравнений:

$$(q_1)_a = \frac{1 - P_{11}}{P_{21}}; \quad (q_2)_a = \frac{1 - R_{11}}{R_{21}}; \quad /14/$$

$$(q_2)_b = -\frac{1 + P_{11}}{P_{21}}; \quad (q_2)_b = -\frac{1 + R_{11}}{R_{21}}. \quad /15/$$

Заменяя здесь P и R их значениями из /1/ и /2/, преобразуем решения к следующему виду:

$$(q_1)_a = -\frac{a_{22}}{a_{21}} + \frac{2}{a_{21}(\Lambda a_{21} + 2a_{11})}; \quad /16/$$

$$(q_2)_a = -\frac{a_{11}}{a_{21}} + \frac{2}{a_{21}(\Lambda a_{21} + 2a_{22})}; \quad /17/$$

$$(q_1)_b = -\frac{a_{22}}{a_{21}}; \quad /18/$$

$$(q_2)_b = -\frac{a_{11}}{a_{21}}. \quad /19/$$

Если какие-либо два решения, принадлежащие разным плоскостям, совпадут, мы получим стигматичное изображение на расстоянии $q=p$. Равенство решений /18/ и /19/ невозможно, так как при любом возбуждении $a_{11} \neq a_{22}$. Очевидно, что не могут совпасть решения /16/ и /18/, а также решения /17/ и /19/. Остальные равенства реализуются лишь для строго определенных Λ .

Так, например, равенство выражений /16/ и /17/ приводит к следующему квадратному уравнению для Λ

$$a_{21} \Lambda^2 + 2(a_{11} + a_{22})\Lambda + 4a_{12} = 0, \quad /20/$$

которое во всем рассматриваемом интервале θ имеет только одно положительное решение

$$\Lambda = - \frac{\nu + \sqrt{\delta^2 + 4}}{a_{21}}, \quad /21/$$

где $\delta = a_{22} - a_{11}$. В случае $d=1$ δ определяется следующим приближенным выражением:

$$\delta = 4\theta^2 \left(1 - \frac{\theta^4}{45}\right).$$

Формулы для ν и a_{21} даны выше.

Вычтем теперь /13/ из /12/, полагая $q_1 = q_2 = q$. Подставив в полученную разность матричные элементы из /1/ и /2/, приходим к следующему уравнению для q :

$$2a_{21}q^2 - 2a_{21}\Lambda q - 2a_{12} - (a_{11} + a_{22})\Lambda = 0,$$

решение которого

$$q = \frac{\Lambda}{2} \pm \frac{\sqrt{a_{21}\Lambda^2 + 2(a_{11} + a_{22})\Lambda + 4a_{12}}}{2a_{21}}.$$

Если Λ удовлетворяет уравнению /20/, то расстояние до стигматичного изображения $q = \sqrt{2}$.

Приравняв /17/ и /18/, будем иметь

$$q = - \frac{a_{22}}{a_{21}} \quad /22/$$

при условии, что расстояние между дублетами удовлетворяет соотношению

$$\Lambda = - \left(\frac{2a_{22}}{a_{21}} + \frac{2}{a_{21}\delta} \right). \quad /23/$$

Найденные значения q и Λ положительны при любом возбуждении и $q < \sqrt{2}$. Для расчета q в случае $d=1$ можно воспользоваться формулой

$$q = \frac{7}{\theta^4} \cdot \frac{90 + 180\theta^4 - 45\theta^8 - 4\theta^6}{1050 - 9\theta^4}. \quad /24/$$

И, наконец, из равенства решений /16/ и /19/ мы находим также q и Λ , которые при любом заданном возбуждении имеют противоположные знаки. Следовательно, практического интереса этот вариант не представляет.

Итак, при заданном возбуждении линз θ можно получить стигматичное изображение на расстоянии $q = p$ лишь для двух определенных значений Λ . Зависимости $\Lambda(\theta)$, рассчитанные по формулам /21/ и /23/, приведены на рис. 3. Нетрудно видеть, что найденные Λ действительно лежат между Λ_{\min} и Λ_{\max} .

Как следует из рис. 2а, в допустимой части области I $C_0 > F_0$. Мы получим реальное стигматичное изображение, если $0 < p < F_0$ или $C_0 < p < \infty$. Зависимости $p(\Lambda)$ представляют собой две монотонные кривые, соединяющие граничные точки указанных интервалов. Когда p принимает значения от 0 до F_0 , q меняется от C_0 до ∞ и наоборот. В любом случае $q \neq p$.

3. СТИГМАТИЧНАЯ СИСТЕМА, СОЗДАЮЩАЯ ИЗОБРАЖЕНИЕ, РАВНОЕ ПО ВЕЛИЧИНЕ ПРЕДМЕТУ

Найдем условия, при которых увеличения M_1 и M_2 стигматичной системы равны 1 или -1. Потребуем вначале, чтобы оба увеличения равнялись 1. Для этого необходимо, чтобы положение каждой из главных плоскостей H_1 и H_2 предметного пространства совпадало с положением предмета. В наших обозначениях это условие равносильно совпадению решений /16/ и /17/. Как было показано выше, в такой системе Λ удовлетворяет соотношению /21/, а $q = \sqrt{2}$.

Плоскость Π , расположенную симметрично главной плоскости относительно фокуса системы, назовем антиглавной. Пусть обе антиглавные плоскости предметного пространства располагаются вне области поля. Если удастся совместить \bar{H}_1 и \bar{H}_2 в точке, где находится предмет, мы получим $M_1 = M_2 = -1$. Это условие равносильно равенству решений /18/ и /19/, что, как было найдено выше, невозможно.

Пусть теперь $M_1 = 1$, а $M_2 = -1$. Чтобы получить такую комбинацию увеличений, нужно в точке, где находится предмет, совместить главную плоскость H_1 с антиглавной плоскостью \bar{H}_2 . Иными словами, нужно добиться совпадения решений /16/ и /19/, что также невозможно.

И, наконец, пусть $M_1 = -1$, а $M_2 = 1$. Для этого потребуется совпадение положений \bar{H}_1 и H_2 с положением предмета, т.е. потребуется равенство решений /17/ и /18/. Такая система реализуется на практике при условии, что Λ удовлетворяет соотношению /23/, а q определяется формулой /22/.

Таким образом, из четырех интересующих нас комбинаций увеличений могут осуществиться только две: $M_1 = M_2 = 1$ и $M_1 = -1, M_2 = 1$. В обоих случаях предмет и его изображение располагаются симметрично относительно центра системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Явор С.Я. Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами. Атомиздат, М., 1968.
2. Кладницкий В.С. ОИЯИ, Р9-9257, Дубна, 1975.
3. Regenstreif E. Contributions to the Theory of the Symmetric Quadrupole Triplet, CFRN 69-2, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 апреля 1977 года.