ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ким Зе Пхен

1283

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук

Е.П. Жидков

Дубна 1963

Ким Зе Пхен

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук

Е.П. Жидков

Дубна 1963

В квантовой теории и теории дисперсионных соотношений часто встречаются сингулярные интегральные уравнения[1-3].

В работе[1] выведено уравнение типа Чу-Лоу для процесса $\pi + N \to n\pi + N$.

Для случая $n = 2$, т.е. для процесса $\pi + N \to 2\pi + N$, уравнение можно писать в виде[4]

$$u(t) = \lambda - 1/\pi \int_0^1 dr \left\{ \frac{v(r)}{r - t} + \frac{N_1(r)\, u(r) - N_2(r)\, v(r)}{r + t} \right\}, \qquad /1/$$

$$v(t) = S_1(t)\, u(t) + S_2(t)\, v(t),$$

где $u(t)$, $v(t)$ – искомые вектор-функции, $S_1(t), S_2(t), N_1(t), N_2(t)$ – матрицы, каждый элемент которых принадлежит классу Гельдера $H(a)$ и на концах интервала обращается в нуль. Систему /1/ ниже описанными методами /§ 1, § 3/ можно свести к обычной системе линейных сингулярных интегральных уравнений.

Общая теория линейных сингулярных интегральных уравнений хорошо разработана советскими учеными-академиком Н.И. Мусхелишвили, С.Г. Михлиным, Ф.Д. Гаховым, И.Н. Векуа, Н.П. Векуа и другими.

В последние годы большое внимание уделяется приближенному решению сингулярных уравнений, например, в работах Н.Д. Софронова, А.В. Батырева, В.В. Иванова[5,6], Г.Ф. Манджавидзе[7].

Настоящая работа посвящена методам численного решения системы уравнений типа Чу-Лоу вида /1/.

В § 1 рассмотрена регуляризация системы уравнений /1/ для разных случаев. Регуляризация проводится методом, аналогичным методу, предложенному академиком Н.И. Мусхелишвили.

В частном случае, если $\det \| I - S(t) \| \neq 0$ всюду на $[0,1]$, где I – единичная матрица, система /1/ приводится к обычной системе сингулярных интегральных уравнений:

$$Ku \equiv u(t) + 1/\pi \int_0^1 \frac{S(r)\, u(r)}{r - t}\, dr + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{N(r)\, u(r)}{r + t}\, dr = \lambda, \qquad /2/$$

где

$$S(r) = (I - S_2(r))^{-1} S_1(r),$$

$$N(r) = N_1(r) - N_2(r)\, (I - S_2(r))^{-1} S_1(r).$$

Регуляризующим оператором берем оператор

$$M_\phi \equiv \phi(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{S(r)\, \phi(r)}{r - t}\, dr. \qquad /3/$$

Регуляризуя слева и справа, получим уравнения Фредгольма:

$$MKu = M\lambda, \qquad /4/$$

$$KM\phi = \lambda . \qquad /5/$$

Исходя из связи между решениями исходного и регуляризованного уравнений /8,9/, ...чем следующий вывод:

1. Если $M_\phi = 0$ не имеет нетривиальных решений в классе $H(a)$, то уравнение /2/ эквивалентно уравнению /4/.

2. Если $M_\phi = f$ разрешимо для любых f, то уравнение /5/ эквивалентно исходному уравнению /2/.

3. Если $M_\phi = 0$ имеет нетривиальные решения в классе $H(a)$, то уравнение /4/ может включать дополнительные решения.

Решая уравнение /4/ или /5/, мы можем выделить решение исходного уравнения /2/.

Если $\det \| I - S_2(t) \| = 0$ в некоторых точках в $[0, 1]$, то предыдущее рассуждение не применимо.

Перепишем систему уравнений /1/ в виде:

$$u(t) = \lambda - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{v(r)}{r-t}\, dr - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{w(r)}{r-t}\, dr,$$

$$v(t) = S_1(t)\, u(t) + S_2(t)\, v(t), \qquad /6/$$

$$w(t) = N_1(t)\, u(t) - N_2(t)\, v(t).$$

Подставляя выражение $u(t)$ во второе и третье выражение /6/, получим:

$$K\phi \equiv A(t)\,\phi(t) + \frac{B(t)}{\pi} \int_0^1 \frac{\phi(r)}{r-t}\, dr + \frac{C(t)}{\pi} \int_0^1 \frac{\phi(r)}{r+t}\, d\tau = f(t), \qquad /7/$$

где $\phi(t) \equiv (v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

Если $\det \| A(t) \pm B(t) \| \neq 0$ в $[0, 1]$,

то, следуя способу Мисхелишвили /8/, можно брать регуляризатор $M\psi$ в виде:

$$M\psi \equiv \tfrac{1}{2}[S^{-1}(t) + T^{-1}(t)]\,\psi(t) + \tfrac{1}{2}[S^{-1}(t) - T^{-1}(t)]\,\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\psi(r)}{r-t}\, dr, \qquad /8/$$

где $S(t) \equiv A(t) + B(t)$, $T(t) \equiv A(t) - B(t)$.

В работе рассмотрен случай, когда

$$\det \| I - S_2(t) \| = (t - c_1)(t - c_2)\, d(t),$$

где $d(t) \neq 0$ всюду в $[0,1]$.

Как стало известно автору в последнее время, Ф.Д. Гахов рассмотрел краевую задачу в случае, когда элементы матрицы обращаются в бесконечность или детерминант матрицы обращается в нуль /10,11/.

Решение задачи Ф.Д. Гахова находилось методом разложения матрицы на произведение двух матриц.

При решении данной задачи искомый вектор представляется в виде некоторой суммы:

$$K\phi \equiv (t-c_1)(t-c_2)\,\phi(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{B(r)\,\phi(r)}{r-t}\, dr + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{C(r)\,\phi(r)}{r+t}\, dr = f(t), \qquad /9/$$

где $u(t) = (t - c_1)(t - c_2)\,\phi(t) + (t - c_2)\,\mu + (t - c_1)\,\gamma$;

μ γ — векторы, удовлетворяющие условиям

$$A(c_1)\, S_1(c_1)\,\mu = 0, \quad A(c_2)\, S_1(c_2)\,\gamma = 0;$$

$A(t)$ — присоединенная матрица к матрице $I - S_2(t)$.

В этом случае регуляризующим оператором можно брать оператор

$$M\psi \equiv (t-c_1)(t-c_2)\,\psi(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{B(r)\,\psi(r)}{r-t}\, dr. \qquad /10/$$

Во всяком случае можно сделать регуляризацию системы /1/ следующим образом. Обозначая

$$K[u,v] \equiv u(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{v(r)}{r-t}\, dr + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{N_1(r)\, u(r) - N_2(r)\, v(r)}{r+t}\, dr = \lambda, \qquad /11/$$

$$A[u,v] \equiv (I - S_2(t))\, v(t) - S_1(t)\, u(t) = 0$$

и

$$M\psi \equiv (I - S_2(t))\,\psi(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{S_1(r)\,\psi(r)}{r-t}\, dr, \qquad /12/$$

получим систему уравнений Фредгольма:

$$MK[u,v] = M\lambda, \qquad /13/$$

$$A[u,v] = 0.$$

В §2 рассмотрено нахождение достаточного условия сходимости метода последовательных приближений для системы /1/.

Известно, что преобразование Гильберта ограничено в L^2 /12,13/.

Используя формулу $\left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(r)}{r-t}\, dr \right\| < \| \phi(t) \|$ $\quad (\phi(t) \subset L^2[-1,+1])$,

получаем следующее утверждение.

Если $\sqrt{n}\,(S_1 + S_2 + N_1 + N_2) \leq \varepsilon < 1$,

где $S_\beta = \max\limits_{i,j,t} | S_{\beta ij}(t) |$, $\quad N_\beta = \max\limits_{i,j,t} | N_{\beta ij}(t) |$,

то система /1/ имеет единственное решение в классе $H(a)$, и последовательные приближения

$$v_{m+1}(t) = [S_1(t) - N_1(-t)]\,\lambda - S_1(t)\,\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{v_m(r)}{r-t}\, dr + S_2(t)\, v_m(t) +$$

$$+ N_1(-t)\,\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{v_m(r)}{r+t}\, dr + N_2(-t)\, v_m(-t), \qquad /14/$$

$$v_0(t) \subset H(a)$$

сходятся по норме в L^2.

В § 3 рассмотрена система уравнений вида:

$$a(t)\,\phi(t) + b(t)\,\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\phi(r)}{r-t}\, dr = f(t), \qquad /15/$$

где $a(t)$, $b(t)$ – матрицы, $\phi(t)$ – искомая вектор-функция, $b(t)/\sqrt{1-t^2}$ – ограничена, $f(t)$ – заданная вектор-функция ($f(t) \subset H(a)$).

В случае $\det \| a(t) + i\,b(t) \| \neq 0$ $[-1,+1]$ система /15/ эффективно решается.

Аппроксимируем $a(t)$, $b(t)$ полиномами.

Допустим, что

$$a(t) = P(t) + \xi(t), \qquad b(t) = \sqrt{1-t^2}\, Q(t) + \sqrt{1-t^2}\, \eta(t),$$

$$\max |\xi_{ij}(t)| < \epsilon, \qquad \max |\eta_{ij}(t)| < \epsilon,$$

где $\epsilon > 0$ достаточно малое число, $P(t)$, $Q(t)$ – матрицы, элементы которых есть полиномы.

Систему /15/ можно переписать в виде:

$$\bar{K}\phi(t) = f(t) - S\phi(t), \qquad /16/$$

где

$$\bar{K}\phi(t) = P(t)\phi(t) + \sqrt{1-t^2}\, Q(t) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

$$S\phi(t) = \xi(t)\phi(t) + \sqrt{1-t^2}\,\eta(t) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Вначале считаем, что правая часть системы /16/ известна. Тогда система /16/ решается методом, аналогичным указанному Мусхелишвили [8]. Система /16/ эквивалентна следующей системе:

$$\phi(t) = \Gamma f(t) - \Gamma S\phi(t) + B(t)\, R(t), \qquad /17/$$

где

$$\Gamma f(t) \equiv A(t)\, f(t) + B(t) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

$$A(t) = Re\,[x^+(t)]^{-1}, \qquad B(t) = Im\,[x^+(t)]^{-1},$$

$$x(z) = P(z) + \sqrt{z^2-1}\, Q(z), \qquad R(t) \text{ – полином.}$$

Мы берем ϵ таким, что удовлетворяется условие $\|\Gamma S\| \leq g < 1$. Тогда в силу вывода § 2 решение системы /17/ дается в виде:

$$\phi(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-\Gamma S)^{\ell} \, (\Gamma f(t) + B(t)\, R(t)). \qquad /18/$$

В $R(t)$ имеются неопределенные коэффициенты.

Подставляя /18/ в /15/, мы можем определить коэффициенты.

В работе показано, что систему /1/ можно свести к системе вида /15/.

В § 4 изложена реализация приближенных методов § 1 и 3 на электронной вычислительной машине и показаны результаты численного решения уравнения типа Чу-Лоу для процесса $\pi + N \to 2\pi + N$.

Литература

1. В. Целлнер. Кандидатская диссертация. ОИЯИ. 1961.
2. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, А.Н. Тавхелидзе. Применение методов Н.И. Мусхелишвили для решения сингулярных интегральных уравнений в квантовой теории поля. Проб-

лемы механики сплошной среды /сборник/. изд. АН СССР, стр. 45-59, Москва, 1961.
3. R. Omnes. Nuovo Cimento v. VIII, No. 2, 316-326 (1958).
4. Kim. Tze Peng and W.Zoellner. Nuclear Physics 34, 491–497 (1962).
5. В.В. Иванов. ДАН СССР 114, № 5, 945-948 (1957).
6. В.В. Иванов. ДАН СССР. 129, №1, 27-29 (1959).
7. Г.Ф. Манджавидзе. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. 365-370, Физматгиз, 1960.
8. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
9. Ф.Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, 1957.
10. Ф.Д. Гахов. Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 549-568 /1950/.
11. Ф.Д. Гахов. Изв. АН. СССР, сер. матем., 16, 147-156 /1952/.
12. С.Г. Михлин. Матем. сб., нов.сер., т. 3 /45/, 121-141 /1938/.
13. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 апреля 1963 г.